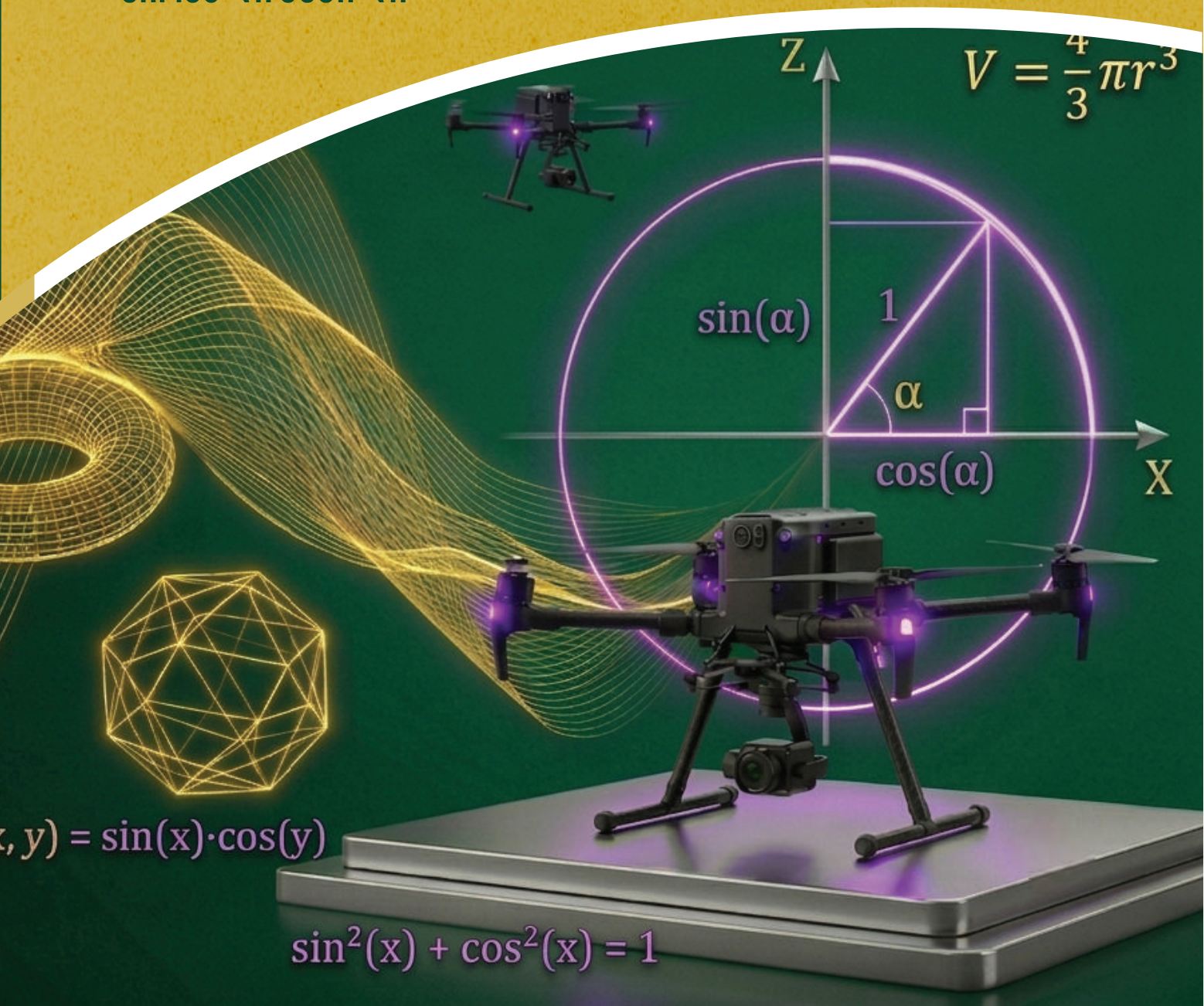
განათლების, მეცნიერებისა და
ახალგაზრდობის სამინისტრო

მათემატიკა 10

მასწავლებლის წიგნი
პირველი ნაწილი



თინა ბექაური, ავთანდილ საგინაშვილი,
გიორგი ბექაური, ზაზა გერგაული

მათემატიკა 10

მასწავლებლის წიგნი
პირველი ნაწილი

სახელმძღვანელო შექმნილია
საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტროს მიერ

საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტრო
თბილისი
2026

მათემატიკა
X კლასი, I ნაწილი
მასწავლებლის წიგნი

საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტრო
პირველი გამოცემა, თბილისი, 2026 წ.

ავტორები:
თინა ბექაური
ავთანდილ საგინაშვილი
თანაავტორები:
გიორგი ბექაური
ზაზა გერგაული

საგნის ექსპერტ-კონსულტანტი: ვახტანგ ჯაოშვილი

სამეცნიერო რეცენზენტები: დავით ნატროშვილი
ფსიქოლოგი-მეთოდისტი: ნუცა საღარაძე
რედაქტორი: ქეთი ჩხობაძე
ილუსტრატორი: ალექსი კახნიაშვილი
დამკაბადონებელი: ალექსი კახნიაშვილი
ყდის დიზაინერი: ნინო ხვინგია

სახელმძღვანელო განკუთვნილია მეათე კლასის მასწავლებლებისთვის და შექმნილია ეროვნული სასწავლო გეგმის მოთხოვნების შესაბამისად.

სახელმძღვანელოს კომპლექტის შემადგენლობა:
მოსწავლის წიგნი I და II ნაწილები;
მასწავლებლის წიგნი I და II ნაწილები.

განათლების, მეცნიერებისა და
ახალგაზრდობის სამინისტრო

© საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტრო

სარჩევი

შესავალი ---------- 4

რუბრიკა „სამიზნე ცნების არსი“ ---------- 7

პირველი სემესტრის სასწავლო გეგმა (კურიკულუმი) ---------- 8

მიზნები, მეთოდური რეკომენდაციები, კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები ---------- 10

თავი 1. ტრიგონომეტრია ---------- 10

1.1 ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები ---------- 11

პრაქტიკული სამუშაოს შეფასების ნიმუში-- ---------- 16

1.2 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა გამოთვლა ---------- 18

1.3 კოსინუსებისა და სინუსების თეორემები ---------- 22

1.4 ერთეულოვანი წრეწირი ---------- 29

1.5 რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ---------- 35

1.6 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები ---------- 38

1.7 დაყვანის ფორმულები ---------- 43

პირველი თავის დამატებითი სავარჯიშოები ---------- 45

პროექტი „პრაქტიკული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით“---------- 47

პროექტის შეფასება ---------- 48

შემაჯამებელი სამუშაო N1 ---------- 50

შემაჯამებელი სამუშაოს I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების ნიმუში------ 51

შემაჯამებელი სამუშაოს II ვარიანტის განმავითარებელი შეფასების ნიმუში ---- 51

თავი 2. სტერეომეტრიის საწყისები- ---------- 53

2.1 წრფეები და სიბრტყეები სივრცეში ---------- 53

2.2 სიბრტყისადმი მართობი, დახრილი ---------- 58

„აბა, სცადე!“ – შეფასების რუბრიკა ---------- 62

2.3 სამი მართობის თეორემა ---------- 63

2.4 ორწახნაგა კუთხე ----------65

მეორე თავის დამატებითი სავარჯიშოები ---------- 73

წყვილებში სამუშაო (პროექტი) ---------- 75

პროექტის შეფასების ნიმუში---------- -- 77

შემაჯამებელი სამუშაო №2 ---------- 80

შემაჯამებელი სამუშაოს I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასება ----------82

შემაჯამებელი სამუშაოს II ვარიანტის განმავითარებელი შეფასების ნიმუში------83

თავი 3. ვექტორები ---------- 85
3.1 ვექტორები სიბრტყეზე ---------- 86
3.2 ვექტორის კოორდინატები ---------- 94
დამოუკიდებელი სამუშაოს შეფასება ----------97
3.3 ვექტორების სკალარული ნამრავლი---------- 102
3.4 მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში----------110
3.5 ვექტორები სივრცეში ----------113
3.6 ვექტორების გამოყენება გეომეტრიაში ----------119
3.7 სიმეტრია და მობრუნება ----------123
3.8 ჰომოთეტია და პარალელური გადატანა ---------- 133
მესამე თავის დამატებითი სავარჯიშოები ----------144
პროექტი „დაგეგმარება ვექტორებით“ ---------- 146
მოსწავლის პროექტზე მუშაობის შეფასების ნიმუში---------- 147
შემაჯამებელი სამუშაო №3 ---------- 151
შემაჯამებელი სამუშაოს I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების ნიმუში-------152
შემაჯამებელი სამუშაოს II ვარიანტის განმავითარებელი შეფასების ნიმუში-----153
თავი 4 ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ----------155
4.1 პერიოდული, ლუწი და კენტი ფუნქციები ----------155
4.2 $y = \sin x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი ---------- 162
4.3 $y = \cos x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი ----------170
4.4 $y = \tan x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი ----------173
4.5 უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა---------- 178
მეოთხე თავის დამატებითი სავარჯიშოები ----------190
პროექტი „რა სიმაღლეზე არიან?“----------191
პროექტის შეფასების ნიმუში----------192
შემაჯამებელი სამუშაო №4 ----------194
შემაჯამებელი სამუშაოს I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების ნიმუში--------195
შემაჯამებელი სამუშაოს II ვარიანტის განმავითარებელი შეფასების ნიმუში -----195
45-წუთიანი გაკვეთილის გეგმის ნიმუში ---------- 197
შეცდომების ანალიზის რუბრიკა ---------- 197
რეკომენდაციები ტიპური ხარვეზების აღმოსაფხვრელად ----------199
დიფერენცირებული სწავლების სტრატეგიები----------201

შესავალი

მე-10 კლასის სახელმძღვანელოს პირველი ნაწილი აგებულია საშუალო საფეხურის სტანდარტის გათვალისწინებით.

მოსწავლის სახელმძღვანელოს სტრუქტურა

სახელმძღვანელოს საბაზო ერთეულია პარაგრაფი, რომელიც ერთ ან რამდენიმე გაკვეთილზეა გათვლილი. მასში, სახელმწიფო სტანდარტების მოთხოვნებიდან გამომდინარე, ჩამოყალიბებულია მიზნები, რომელთა მიღწევასაც ემსახურება მოცემულ პარაგრაფში მოყვანილი სასწავლო შინაარსი და სავარჯიშოები.

პარაგრაფის ტიპური აგებულება ასეთია:

- ჩამოყალიბებულია პარაგრაფის მიზანი, რომელშიც აღწერილია, რა უნდა შეძლოს მოსწავლემ ამ პარაგრაფის შესწავლის შემდეგ. მიზნები ემსახურება საგნობრივი სტანდარტით განსაზღვრული სასწავლო მიზნების მიღწევას.
- განხილული და ამოხსნილია შესასწავლ მასალასთან დაკავშირებული მაგალითები და ამოცანები.
- განხილულ ამოცანებზე დაყრდნობით ახსნილია თეორიული მასალა.
- ამოხსნილია კლასში შესასრულებელი ტიპური სავარჯიშოები.

პარაგრაფის მომდევნო კითხვებისა და სავარჯიშოების ნაწილი გათვალისწინებულია საშინაო დავალებებისა და კლასში მუშაობისათვის. მასში მოცემულია:

- ✓ კითხვები, რომლებიც მოსწავლეს აძლევს თვითშემოწმების საშუალებას;
- ✓ პარაგრაფის თემასთან დაკავშირებული სავარჯიშოები;
- ✓ მომდევნო პარაგრაფისათვის საჭირო საკითხების გასამეორებელი სავარჯიშოები.

სახელმძღვანელოში გვხვდება დავალებები, რომელთა შესასრულებლად ინფორმაციულ-საკომუნიკაციო ტექნოლოგიების გამოყენებაა საჭირო. ასეთი დავალებები მრავალფეროვანია: გამოთვლების შესასრულებლად, გრაფიკის შესადგენად და მისი ცვლილების შესასრულებლად კომპიუტერის შესაბამისი პროგრამის გამოყენება, ინფორმაციის მოპოვება ინტერნეტის საძიებო სისტემების საშუალებით, პროექტებზე მუშაობა, პრეზენტაცია და სხვ.

პარაგრაფები თემების მიხედვით გაერთიანებულია თავებად. სახელმძღვანელოს პირველ ნაწილში სულ 4 თავია:

1. ტრიგონომეტრია;
2. სტერეომეტრიის საწყისები;
3. ვექტორები;
4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

ყოველ თავს აქვს თავფურცელი, რომელშიც მოცემულია ამ თავის საკითხთა ჩამონათვალი, თავის მიზნები და თავში განხილული თემების მნიშვნელობა თანამედროვე პრაქტიკასა და ტექნოლოგიებში. თავის ბოლოს მოცემულია ამ თავის დამატებითი სავარჯიშოები და თავის თემატიკასთან დაკავშირებული ისტორიული ფაქტები.

დავალებებს შორის მნიშვნელოვან როლს თამაშობს სხვადასხვა რუბრიკა, როგორებიცაა: „აბა, სცადე!“, „შესაძლებელია?“, „წყვილებში სამუშაო“, „ეს საინტერესოა“. მათი მიზანია, მათემატიკური ცოდნის გაღრმავებასთან ერთად, მიაჩვიოს მოსწავლე კრიტიკულ აზროვნებას, შეძენილი ცოდნის რეალურ გარემოში გამოყენებას, სამუშაოს დაგეგმვას, საჭირო ინფორმაციის დამოუკიდებლად მოპოვებასა და დამუშავებას, გამოთვლას, დასაბუთებასა და პრეზენტაციას.

მოსწავლის სახელმძღვანელოს შინაარსი

სახელმძღვანელოს პირველ სამ პარაგრაფში მოცემული საკითხები, ახალი სტანდარტის მიხედვით, მომავალში IX კლასში იქნება გადატანილი. ამიტომ, აქ ეს საკითხები გამეორების სახითაა გადმოცემული. მაგალითად, სინუსებისა და კოსინუსების თეორემისათვის საჭირო ბლაგვი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ფორმულის სახით, ხოლო სინუსებისა და კოსინუსების თეორემები დამტკიცების გარეშეა მოცემული (კოსინუსების თეორემა მტკიცდება მე-3 თავში ვექტორების გეომეტრიაში გამოყენების დემონსტრირებისთვის).

პირველი თავის მე-4-მე-7 პარაგრაფებში ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ჯერ განიმარტება ნებისმიერი გრადუსული არგუმენტისთვის, როგორც ერთეულოვანი წრის წერტილთა კოორდინატები, ხოლო შემდეგ, კუთხის რადიანული ზომის შემოღებით, როგორც რიცხვითი არგუმენტის ფუნქციები. ერთეულოვან წრეზეა ნაჩვენები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა პერიოდულობისა და ლუწ-კენტობის თვისებები. ბოლო, მე-7 პარაგრაფში მოცემულია დაყვანის ფორმულები.

პირველ თავში მრავლადაა პრაქტიკული შინაარსის ამოცანები. პრაქტიკული შინაარსისაა ამ თავში მოცემული წყვილებში სამუშაო პროექტიც „პრაქტიკული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით“. პროექტის ფარგლებში მოსწავლეებს ევალება: ა) გაზომონ მიუვალ ობიექტებამდე მანძილები და ობიექტების ზომები მოცემული ნახაზებისა და მონაცემების მიხედვით; ბ) თვითონვე შეადგინონ ნახაზები, მოიპოვონ მონაცემები და ჩაატარონ საჭირო გამოთვლები მათ გარშემო რეალურად არსებული ობიექტებისათვის.

მეორე თავის მიზანია სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებების ურთიერთმიმართებისა და ურთიერთგანლაგების შემთხვევათა განხილვა. ამასთან ერთად, სივრცული წარმოდგენების სტერეომეტრიული ნახაზების სწორად შესრულების უნარების განვითარების მიზნით ყველა დებულებასა თუ ამოცანას ახლავს შესაბამისი ნახაზი. ამავე მიზნის მისაღწევად, დავალებათა უმრავლესობაში, მოსწავლეს შესაბამისი ნახაზის შესრულება მოეთხოვება.

ამ თავშიც მრავლადაა პრაქტიკული შინაარსის ამოცანები (უმოკლესი ბაგირის დაპროექტება, უმოკლესი მანძილის მოძებნა, ბოძის ვერტიკალურად დამაგრება და სხვ.)

პრაქტიკული შინაარსისაა წყვილებში სამუშაო პროექტიც. ამ სამუშაოს შესასრულებლად მოსწავლეებს ამოცანის სივრცულ გააზრებასთან ერთად მოუწევთ შესაბამისი კვადრატული ფუნქციის შედგენა და მისი გამოკვლევა.

ვექტორები, მათზე წრფივი მოქმედებები და კოორდინატებში ჩაწერა მე-9 კლასში ისწავლებოდა. მე-10 კლასის სახელმძღვანელოს მესამე თავში, ამ საკითხების გამეორებასთან ერთად, მოცემულია სკალარული ნამრავლის განმარტება, თვისებები და კოორდინატებში გამოსახვა. ორგანზომილებიანი შემთხვევის შემდეგ მოცემულია კოორდინატთა სისტემა სივრცეში და მოქმედებები სამგანზომილებიან ვექტორებზე. გადმოცემულია ვექტორის წარმოდგენა არაკომპლანარული ვექტორების (მათ შორის ორტების) საშუალებით და ვექტორის სიგრძისა და ვექტორებს შორის კუთხის კოორდინატების საშუალებით გამოთვლის ფორმულები.

თავში მოცემული პროექტი – „დაგეგმარება ვექტორებით“ ორი ნაწილისაგან შედგება. პირველი ნაწილი მოცემული სქემის გამოკვლევას (პუნქტებს შორის მანძილებისა და მიმართულებებს შორის კუთხეთა ზომების დადგენას), ხოლო მეორე – საკუთარი, რეალური გეგმის შედგენას გულისხმობს.

მეოთხე თავი ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გრაფიკების აგებას და მათზე დაყრდნობით თვისებების შესწავლასა და უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამონახსნთა ფორმულების დადგენას ეძღვნება.

თავის პირველ პარაგრაფში მოცემულია პერიოდული, ლუწი და კენტი ფუნქციების ზოგადი დახასიათება და მათი გრაფიკების თავისებურებები. ფუნქციათა ამ თვისებებს

მოსწავლეები ადრეც იცნობდნენ. სახელმძღვანელოს პირველ თავში მათ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლუწ-კენტოვნება და პერიოდულობა ერთეულოვანი წრეწირის საშუალებით აქვთ დასაბუთებული. ამ თავში კი პერიოდულობისა და ლუწ-კენტობის თვისება გამოყენებულია ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკების ასაგებად და ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოსახსნელად.

თავში მოცემული პროექტი – „რა სიმაღლეზე არიან?“ წარმოადგენს ტრიგონომეტრიის პრაქტიკული გამოყენების მარტივ და თვალსაჩინო ნიმუშს. იმისათვის, რომ ეს სამუშაო წარმატებით შეასრულონ, მოსწავლეებს მოუწევთ დროსა და სიმაღლეს შორის კავშირის დადგენა, ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა და საჭირო ამონახსნების შერჩევა.

მასწავლებლის წიგნში მოცემულია:

- თითოეული თავის ძირითადი მიზნები;
- იმ ცოდნისა და უნარების ჩამონათვალი, რომელსაც შეიძენს მოსწავლე თითოეული პარაგრაფის შესწავლის შედეგად;
- მეთოდური რეკომენდაციები (სცენარები, აქტივობები, საკლასო და საშინაო დავალებების განხილვები და სხვ.);
- სავარჯიშოთა უმრავლესობის ამოხსნები, კომენტარები და პასუხები;
- პროექტების ანალიზი;
- შემაჯამებელი წერის ნიმუშები ორ ვარიანტად (ვარიანტებს შორის მხოლოდ რიცხვითი მონაცემებია განსხვავებული);
- განმსაზღვრელი და განმავითარებელი შეფასების ნიმუშები;
- 45-წუთიანი გაკვეთილის გეგმის ნიმუში;
- შეცდომების ანალიზის რუბრიკა;
- რეკომენდაციები ტიპური ხარვეზების აღმოსაფხვრელად;
- დიფერენცირებული სწავლების სტრატეგიები.

მეათე კლასის მათემატიკის სწავლების მიზანია მოსწავლემ მათემატიკური ცოდნა გამოიყენოს არა მხოლოდ ფორმულებისა და ალგორითმების შესასწავლად, არამედ რეალური და მათემატიკური სიტუაციების მოდელირების, კანონზომიერების აღმოჩენის, დასკვნების გამოტანისა და ლოგიკური მსჯელობისათვის.

სასწავლო პროცესი ორიენტირებულია **სამ ძირთად სამიზნე ცნებაზე:**

- მათემატიკური მოდელი;
- კანონზომიერება;
- ლოგიკა.

ამ ცნებების განვითარება ხდება ყველა ძირითად თემაში და არა ცალკე, იზოლირებულად.

სამიზნე ცნების არსი

სამიზნე ცნება	მოსწავლისთვის მისაწვდომი არსი	რა უნდა შეძლოს მოსწავლემ
მათემატიკური მოდელი	რეალური ან მათემა-ტიკური სიტუაციის მათემატიკური ენით წარმოდგენა	სიტუაციის აღწერა ცვლადებით, გამოსახულებით, განტოლებით, ფუნქციით, გრაფიკით, სქემით; მოდელის გამოყენება პრობლემის გადასაჭრელად და მიღებული შედეგის რეალურ პირობებთან შედარება.
კანონზომიერება	ობიექტებს, სიდიდეებსა და მოვლენებს შორის წესისა და დამოკიდებუ-ლების აღმოჩენა	კანონზომიერების ამოცნობა, აღწერა, ფორმულირება, ზოგად შემთხვევაში გადატანა და პროგნოზირება.
ლოგიკა	მათემატიკური მსჯელობის აგება და დასაბუთება	პირობის გააზრება, ვარაუდის ჩამოყალიბება, არგუმენტის მოყვანა, დასკვნის გამოტანა, შეცდომის აღმოჩენა და მიღებული შედეგის დასაბუთება.

პირველი სემესტრის სასწავლო გეგმა (კურიკულუმი)

თემა	საა-თები	საკითხი / საკითხები ცნება / ქვეცნებები
ტრიგო-ნომეტ-რია	21	• ტრიგონომეტრიული დამოკიდებულობები მართკუთხა სამკუთხედში; • ტრიგონომეტრიული იგივეობები; • ბლაგვი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები; • კოსინუსების თეორემა; • სინუსების თეორემა; • სამკუთხედის ამოხსნა; • ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება ერთეულოვანი წრეწირზე; • ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები; • კუთხის რადიანული ზომა; • დაყვანის ფორმულები; • წყვილებში სამუშაო „პროექტი“: „პრაქტიკული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით“; • შემაჯამებელი სამუშაო N1.
სტერეო მეტ-რია	13	• წრფეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის, სიბრტყეებს შორის მიმართებები სივრცეში; • კუთხე გადამკვეთ და აცდენილ წრფეებს შირის; • პარალელობა სივრცეში (წრფეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის, სიბრტყეებს შორის) • მართობულობა სივრცეში (წრფეებს შორის, წრფესა და სიბრტყეს შორის, სიბრტყეებს შორის); • დახრილი და გეგმილი, კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის; • სამი მართობის თეორემა; • ორწახნაგა კუთხე; • ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე; • წყვილებში სამუშაო (პროექტი); • შემაჯამებელი სამუშაო N2.

ვექტორები	23	• ტოლი, თანამომართული, საწინააღმდეგოდ მიმართული, კოლინეალური, არაკოლინეალური ვექტორები; • წრფივი მოქმედებები ვექტორებზე; • ვექტორთა კოორდინატები; • ორტები ვექტორების ჩაწერა კოორდინატებისა და ორტების საშუალებით; • ვექტორთა სკალარული ნამრავლი; • კოორდინატები და მანძილები სივრცეში; • ვექტორები სივრცეში; • კომპლანარული და არაკომპლანარული ვექტორები; • ვექტორის სიგრძისა და ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა კოორდინატებით სივრცეში; • ვექტორების გამოყენება გეომეტრიაში; • მობრუნება; • ცენტრული და ღერძული სიმეტრია; • ჰომოთეტია; • პარალელური გადატანა; • წყვილებში სამუშაო (პროექტი) „დაგეგმარება ვექტორებით“; • შემაჯამებელი სამუშაო N3.
ტრიგო-ნომეტ-რიული ფუნ-ქციები	15	• პერიოდული, კენტი და ლუწი ფუნქციები; • სინუსის გრაფიკი და თვისებები; • კოსინუსის გრაფიკი და თვისებები; • ტანგენსის გრაფიკი და თვისებები; • უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებები; • წყვილებში სამუშაო (პროექტი) „რა სიმაღლეზეა არიან?“; • შემაჯამებელი სამუშაო N4

მიზნები, მეთოდური რეკომენდაციები, კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები

თავი 1. ტრიგონომეტრია

თავის მიზანი:

მოსწავლემ უნდა შეძლოს:

- მართი და ბლაგვი კუთხის სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის განმარტება, გამოთვლა და პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება;
- ტრიგონომეტრიის ძირითადი იგივეობების დამტკიცება და გამოყენება;
- პითაგორას, სინუსების, კოსინუსების თეორემებისა და მათი შედეგების ჩამოყალიბება;
- პითაგორას, სინუსების, კოსინუსების თეორემებისა და მათი შედეგების პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება;
- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განმარტება ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით;
- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებების (ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა, ნიშან–მუდმივობისა და ზრდადობა/კლებადობის შუალედები) დასაბუთება ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით;
- კუთხის რადიანული ზომის გრადუსულ ზომასთან დაკავშირება;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების, როგორც რიცხვითი ფუნქციების განმარტება;
- დაყვანის ფორმულების ჩამოყალიბება, დასაბუთება და გამოყენება;
- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობების გამოთვლა კალკულატორის გამოყენებით;
- ტრიგონომეტრიის გამოყენება პრაქტიკული და გეომეტრიული ამოცანების (ობიექტთა გრძივი ზომები, ფიგურათა ფართობი, ფუნქციათა მნიშვნელობები და სხვ.) გადასაწყვეტად;
- სამკუთხედის ამოხსნა მისი სამი ელემენტით (რომელთაგან ერთი მაინცაა გვერდი);
- სამკუთხედის სამი ელემენტით (მაგალითად, სამი გვერდით) სამკუთხედთან დაკავშირებული სიდიდეების (მედიანა, ბისექტრისა, სიმაღლე, ფართობი, ჩახაზული და შემოხაზული წრის რადიუსი და სხვ.) პოვნა.

ტრიგონომეტრია ქართულად სამკუთხედის გაზომვას ნიშნავს. იგი სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის მიმართებებს ადგენს. ტრიგონომეტრიული გამოთვლები გამოიყენება მათემატიკის, ფიზიკისა და საინჟინრო საქმის ყველა მიმართულებაში. ტრიგონომეტრიას იყენებენ ასტრონომები ვარსკვლავებამდე, ხოლო გეოგრაფები გეოგრაფიულ ობიექტებამდე მანძილის დასადგენად, მედიკოსები – კომპიუტერულ ტომოგრაფიაში, ნავიგაციის სპეციალისტები – საჰაერო და საზღვაო ნავიგაციაში და სხვ.

ტრიგონომეტრიას, გარკვეული გაზომვების ჩასატარებლად, წინა წლებშიც ვიყენებდით. ვადგენდით ხის ან შენობის სიმაღლეს, მანძილს ორ წერტილს შორის და ა.შ. მაგრამ ყველა ამ გამოთვლაში ვსარგებლობდით მხოლოდ მართკუთხა სამკუთხედში არსებული ტრიგონომეტრიული დამოკიდებულებებით.

ამ თავში მოცემული მასალა საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ნებისმიერი სამკუთხედი, ანუ სამკუთხედის მოცემული სამი ელემენტით, რომელთაგან ერთი მაინცაა გვერდი, ვიპოვოთ სამკუთხედის დანარჩენი ელემენტები.

სამკუთხედის ამოხსნის ამ თავში განხილული მეთოდები საშუალებას იძლევა პრაქტიკული გაზომვები ვაწარმოოთ გასაზომი ობიექტიდან დიდ მანძილზე ყოფნის შემთხვევაშიც. ასეთი გაზომვის რამდენიმე მაგალითი სახელმძღვანელოშია მოცემული.

1.1 ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები (2 სთ)

მიზანი: წინარე ცოდნის გააქტიურება თემებზე:

- მახვილი კუთხის სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის განმარტება;
- ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობების დამტკიცება;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება.

პირველი საათი

მიზანი: წინარე ცოდნის გააქტიურება და განმტკიცება საკითხებზე:

- სამკუთხედების მსგავსება და მსგავსების ნიშნები, მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსება და მსგავსების ნიშნები;
- სამკუთხედის პერიმეტრისა და ფართობის გამთვლა;
- მახვილი კუთხის სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის განმარტება;
- ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობების დამტკიცება და მათი გამოყენება ამოცანების ამოსახსნელად.

რესურსები: კალკულატორი.

გაკვეთილის მსვლელობა

ორგანიზაციული მომენტი

მოსწავლეთა დასწრების შემოწმება და საორგანიზაციო საკითხების მოგვარება.

წინარე ცოდნის გააქტიურება, მიზნისა და ამოცანების გაცნობა

პირველ საათზე იხსენებენ სამკუთხედების მსგავსების სამ ძირითად ნიშანს და შედეგს, რომ მართკუთხა სამკუთხედების შემთხვევაში საკმარისია თითო მახვილი კუთხის ტოლობა.

ყურადღება უნდა გამახვილდეს მსგავს სამკუთხედებში პროპორციის სწორად შედგენაზე (კერძოდ, ტოლი კუთხეების მოპირდაპირე გვერდებს შორის შეფარდებები ტოლია).

1-ელი ამოცანის განხილვისას მასწავლებელი სვამს შეკითხვებს:

– ხის სიმაღლის გაზომვის რა მეთოდები იცით?

– ხომ არ გიცდიათ ხის სიმაღლის დადგენა მისი ჩრდილის მიხედვით?

მოსწავლეებმა სცადონ თავად ახსნან ხითა და მისი ჩრდილით წარმოქმნილი სამკუთხედი რატომაა ჯოხითა და მისი ჩრდილით შექმნილი სამკუთხედის მსგავსი (დღის ერთსა და იმავე მომენტში მზის სხივის დაცემის კუთხეები ტოლია).

კარგი იქნება, თუ სიმაღლის გაზომვის 1-ელ ამოცანაში განხილულ მეთოდს პრაქტიკულად განახორციელებენ. მაგალითად, სკოლის ეზოში გაზომავენ ხის ან რაიმე ობიექტის სიმაღლეს.

გაიხსენებენ მახვილი კუთხის სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის განსაზღვრებებს და ამოხსნიან №2 სავარჯიშოს.

მოსწავლეები დაფაზე მორიგეობით ამტკიცებენ ტრიგონომეტრიულ იგივეობებს და იხილავენ ტექსტში ამოხსნებით მოცემულ 1-ელ და მე-2 მაგალითებს.

განმტკიცება.

დაფაზე და რვეულებში მუშაობენ სახელმძღვანელოს №5, №6, №7-ის ა), №8 და №9 სავარჯიშოების ამოხსნაზე.

დამოუკიდებელი სამუშაო:

I ვარიანტი: №3 სავარჯიშო,

II ვარიანტი: №4 სავარჯიშო.

შედეგების შეჯამება, რეფლექსია

მასწავლებელი: – რა იყო ჩვენი დღევანდელი მიზანი?

– მივაღწიეთ მიზანს? რა გავაკეთეთ მიზნის მისაღწევად?

– რატომ გავიხსენეთ წინასწარ მართკუთხა სამკუთხედები?

– რას წარმოადგენს მახვილი კუთხის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?

– შეუძლია თუ არა მახვილი კუთხის: ა) სინუსს; ბ) კოსინუსს; გ) ტანგენსს 1-ის ტოლი ან 1-ზე მეტი მნიშვნელობის მიღება? პასუხები დაასაბუთეთ.

– როგორ გამოვთვალოთ მახვილი კუთხის სინუსის მნიშვნელობა, როცა ვიცით ამ კუთხის კოსინუსის მნიშვნელობა?

– როგორ გამოვთვალოთ მახვილი კუთხის სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობები, როცა ვიცით ამ კუთხის ტანგენსის მნიშვნელობა?

–თუ მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ ერთი რომელიღაც მნიშვნელოვანი თეორემა გავიხსენეთ და დღეს რამდენჯერმე გამოვიყენეთ. რომელი თეორემაა ასეთი მნიშვნელოვანი დღეს ჩვენთვის? (პითაგორას თეორემა)

– როგორი სამკუთხედისთვისაა მართებული პითაგორას თეორემა?

– რაში მდგომარეობს პითაგორას თეორემა?

საშინაო დავალება: პასუხების მოფიქრება რუბრიკისთვის: „უპასუხე კითხვებს“ და №1, №5, №7 (დარჩენილი ნაწილი), №10 სავარჯიშოები.

მეორე საათი:

მიზანი: ცოდნის გამეორება - გაღრმავება თემებზე:

- მახვილი კუთხის სინუსის, კოსინუსის და ტანგენსის განმარტება;
- ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობების დამტკიცება;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება.

გაკვეთილის მსვლელობა

I. **ორგანიზაციული ეტაპი** (2 წთ)

II. **საშინაო დავალების შემოწმება** (2 წთ)

III. **წინარე ცოდნის გააქტიურება** (6 წთ)

მზადება გაკვეთილის მიზნის მისაღწევად საჭირო მასალის გახსენებით:

ა) პასუხობენ პარაგრაფის შეკითხვებს:

1. მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსების რა ნიშანი გამოიყენა კახამ ხის სიმაღლის დასადგენად?
2. მიიღებდა თუ არა კახა იმავე შედეგს, ჯოხი და მისი ჩრდილი დღის 12 საათზე, ხოლო ხის ჩრდილი 15 საათზე რომ გაეზომა?
3. რა თეორემა გამოვიყენეთ მე-5 იგივეობის დასამტკიცებლად?
4. რომელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის ცოდნაა საჭირო ხის სიმაღლის დასათვლელად, თუ ვიცით ხის ჩრდილის სიგრძე და კუთხე, რომლითაც ეს ხე მოჩანს დამკვირვებლიდან?
5. რას უდრის α მახვილი კუთხე, თუ: $\sin\alpha = \cos\alpha$?

ბ) ამოწმებენ შესრულებულ დავალებებს. პასუხობენ დავალების შესახებ დასმულ შეკითხვებს და ასწორებენ აღმოჩენილ შეცდომებს. საჭიროების შემთხვევაში მასწავლებელი ცვლის რიცხვებს ამოცანის პირობაში და დაფაზე ხსნიან ამოცანას შეცვლილი რიცხვითი მონაცემებით.

IV. **გაკვეთილის მიზნის გაცნობა** (1 წთ)

მასწავლებელი აცნობს მოსწავლეებს გაკვეთილის მიზანს (წინა კლასებში შეძენილი ცოდნის გამეორება-განმტკიცება).

V. **გაკვეთილის თემაზე მუშაობა, წინა კლასში შეძენილი ცოდნის გახსენება** (10 წთ)

მასწავლებელი: – როგორ გამოვთვალოთ მახვილი კუთხის კოსინუსი, თუ ვიცით ამავე კუთხის: ა) ტანგენსი? ბ) სინუსი? (ვიყენებთ პარაგრაფის: ა) მე-6 ფორმულას, ბ) მე-5

ფორმულას.)

– რა კავშირია სამკუთხედის მახვილი კუთხეების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის? (პასუხი: ერთის სინუსი უდრის მეორის კოსინუსს, ერთის ტანგენსი მეორის ტანგენსის შებრუნებულს).

– რატომაა მახვილი კუთხის სინუსი 1-ზე ნაკლები? (მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის სინუსი განიმარტება ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტის ჰიპოტენუზასთან შეფარდებით. კათეტის სიგრძე ნაკლებია ჰიპოტენუზის სიგრძეზე, ამიტომ კათეტის ჰიპოტენუზასთან ფარდობა, ანუ სინუსი 1-ზე ნაკლებია).

– რატომაა მახვილი კუთხის სინუსისა და კოსინუსის ჯამი 1-ზე მეტი? (სამკუთხედის უტოლობით).

– როგორ ვითვლით სამკუთხედის ფართობს?

– როგორ ვითვლით მართკუთხა სამკუთხედის ფართობს?

– რა არის ფიგურის პერიმეტრი?

ყველა შეკითხვაზე გაცემული პასუხი უნდა იქნეს დასაბუთებული!

დაფასთან მუშაობენ პარაგრაფში განხილულ მეორე ამოცანასა და მესამე მაგალითზე.

VI. განმტკიცება, პრაქტიკული მუშაობა (12 წთ)

დაფაზე და რვეულებში მუშაობენ №11, №13, №15 და №17 სავარჯიშოების ამოხსნაზე.

VII. დამოუკიდებელი სამუშაო: (7 წთ)

I ვარიანტი: №19- ა,

II ვარიანტი: №19 — ბ.

VIII. რეფლექსია. შედეგების შეჯამება (3 წთ)

– რა ვისწავლეთ დღეს?

– უპასუხეთ რუბრიკის: „შესაძლებელია თუ არა“- შეკითხვებს:

ა) მახვილი კუთხის სინუსის ან კოსინუსის მნიშვნელობა 1-ზე მეტი იყოს? ტანგენსის მნიშვნელობა 1-ზე მეტი იყოს? დაასაბუთეთ პასუხი.

ბ) მახვილი კუთხის სინუსის და კოსინუსის ჯამი 1-ზე ნაკლები ან 1-ის ტოლი იყოს?

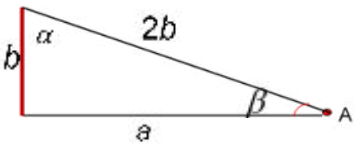
IX. საშინაო დავალება (2 წთ)

N11, №13, №15, №17 სავარჯიშოები.

სავარჯიშოების ამოხსნები და პასუხები:

სავ.N2. ვთქვათ, კათეტებია $8k$ და $15k$. პითაგორას თეორემის მიხედვით, ჰიპოტენუზა იქნება $17k$. სამკუთხედი მართკუთხაა, ამიტომ უმცირესია ის მახვილი კუთხე, რომელიც უმცირესი კათეტის პირდაპირ ძევს. კუთხის სინუსი იქნება $\frac{8}{17}$, კოსინუსი $\frac{15}{17}$, ტანგენსი $\frac{8}{15}$.

სავ.N5. რადგან $\tan\alpha = 2$, ვასკვნით, რომ კათეტების ფარდობა 2-ის ტოლია, ანუ ერთი კათეტი მეორეზე 2-ჯერ დიდია. თუ მცირე კათეტია a, მაშინ ჰიპოტენუზა იქნება $a\sqrt{5}$. მაშინ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

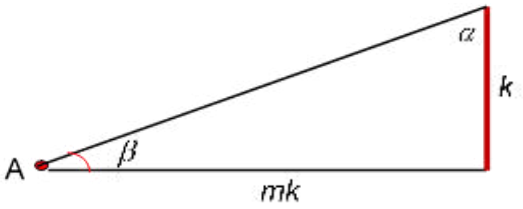


სავ.N7. ა) თუ კათეტებს აღვნიშნავთ $a > b$ ასოებით, მაშინ ჰიპოტენუზა იქნება $2b$, რადგან $\cos\alpha = 0{,}5$.

$$a = \sqrt{4b^2 - b^2} = b\sqrt{3}\ ;\ \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

სავ.N8. ვთქვათ, α-ს მოპირდაპირე კათეტია mk,

ხოლო მიმდებარე – k, მაშინ ჰიპოტენუზა იქნება $k\sqrt{1+m^2}$, ამიტომ



$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\ \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

სავ.N 10. ვთქვათ, კათეტებია a და b, ჰიპოტენუზა c, მაშინ $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{b}{c} + \frac{a}{c} = \frac{a+b}{c} = \frac{17}{13}$.

სავ.N 17. ვთქვათ, კათეტებია 8x და 15x. პითაგორას თეორემის გამოყენებით ვასკვნით, რომ კათეტები 8 სმ და 15 სმ-ია. ამიტომ P=8+15+17=40 (სმ), ხოლო ფართობი S=8×15:2=60 (სმ^2).

სავ.N18. რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია. ამიტომ მივიღებთ მართკუთხა სამკუთხედს კათეტებით: 3 სმ და 4 სმ. პითაგორას თეორემის გამოყენებით მივიღებთ, რომ ჰიპოტენუზის სიგრძეა 5სმ.

პასუხი: სინუსია 0,6; კოსინუსი 0,8; ტანგენსი 0,75.

სავ.N19. ა) მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ cosα-ზე. მივიღებთ: $\frac{3-1}{3+1} = 0{,}5$.

სავ.N20. 3x+4x+5x=36, x=3. პასუხი: 9 მ, 12 მ, 15 მ.

აბა, სცადე!

ა) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha \geq 0 \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha \leq 0{,}5;$

ბ) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha \leq 1 + 1 = 2 \Rightarrow \sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{2}.$

პრაქტიკული სამუშაოს შეფასების ნიმუში

მაქსიმალური ქულა – 20

№	შეფასების კრიტერიუმი	მაღალი დონე 2 ქულა	საშუალო დონე 1 ქულა	დაბალი დონე 0 ქულა
1	**გაზომვის დაგეგმვა და მეთოდის სწორად გამოყენება**	სწორად იაზრებს ტექსტში მოცემული ამოცანის ამოხსნის მეთოდს და დამოუკიდებლად გეგმავს გაზომვის პროცესს	მეთოდს ძირითადად სწორად იყენებს, მაგრამ აქვს მცირე ხარვეზი გაზომვის ორგანიზებაში	ვერ იყენებს მოცემულ მეთოდს ან ვერ გეგმავს გაზომვის პროცესს
2	**საჭირო სიდიდეების გაზომვა**	ყველა სიდიდე სწორად და თანმიმდევრულად აქვს გაზომილი და დაფიქსირებული	საჭირო სიდიდეები ძირითადად გაზომილია, მაგრამ რომელიმე მონაცემი არაზუსტია ან არასრულადაა წარმოდგენილი	მნიშვნელოვნად აკლია მონაცემები ან გაზომვები არასწორადაა შესრულებული
3	**სკოლის შენობის სიმაღლის გამოთვლა**	სწორად ადგენს პროპორციას და უშეცდომოდ ითვლის სკოლის შენობის სიმაღლეს	გამოყენებული გზა სწორია, მაგრამ აქვს მცირე გამოთვლითი შეცდომა	ვერ ადგენს შესაბამის დამოკიდებულებას ან გამოთვლა არსებითად არასწორია
4	**სიმაღლის გაზომვა მეორე ხერხით**	დამოუკიდებლად და სწორად განსაზღვრავს შენობის სიმაღლეს მეორე მეთოდით	მეთოდს იყენებს, მაგრამ აქვს მცირე უზუსტობა ან დახმარება სჭირდება	ვერ ასრულებს მეორე გაზომვას ან მიღებული შედეგი არაა დასაბუთებული
5	**მიღებული შედეგების შედარება**	ადარებს ერთმანეთს ორივე შედეგს. მიუთითებს განსხვავებას და სწორად აფასებს შედეგების სიახლოვეს	ადარებს შედეგებს, მაგრამ შედეგები არასრულია ან განსხვავების სიდიდე არა აქვს განსაზღვრული	შედეგებს არ ადარებს ან შედარება არასწორია
6	**განსხვავების მიზეზის ახსნა**	სწორად ხსნის განსხვავების შესაძლო მიზეზებს: გაზომვის უზუსტობა, ჩრდილის მკაფიობის პრობლემა, ჯოხის ვერტიკალურობის	ასახელებს განსხვავების ერთ სწორ მიზეზს, მაგრამ ახსნა არასრულია	ვერ ხსნის განსხვავების მიზეზს ან ასახელებს შეუსაბამო მიზეზს

		დარღვევა, მზის მდებარეობა, ზედაპირის არათანაბრობა და სხვ.		
7	**გაზომვის სიზუსტისა და შეცდომის შეფასება**	მსჯელობს გაზომვის შესაძლო ცდომილებაზე და აცნობიერებს, რომ პრაქტიკული გაზომვა ყოველთვის არ იძლევა იდეალურ შედეგს	აღნიშნავს, რომ გაზომვაში შეიძლება იყოს შეცდომა, მაგრამ არ აკონკრეტებს მიზეზს	საერთოდ არ აფასებს გაზომვის სიზუსტეს
8	**მონაცემების წარმოდგენა და ნაშრომის ორგანიზება**	მონაცემები წარმოდგენილია ცხრილის/სქემის სახით. ერთეულები სწორადაა მითითებული, ნაშრომი თანმიმდევრული და გასაგებია	მონაცემები წარმოდგენილია, თუმცა არის მცირე ხარვეზები ერთეულებში, ჩანაწერში ან ორგანიზებაში	მონაცემები მოუწესრიგებელია ან შედეგის გაგება რთულია
9	**დასკვნა**	აკეთებს მკაფიო, არგუმენტირებულ დასკვნას და აკავშირებს მას მიღებულ შედეგებთან	დასკვნა სწორია, მაგრამ მოკლე ან არასაკმარისად დასაბუთებული	დასკვნა არასწორია ან საერთოდ არ არის
10	**დამოუკიდებელი და პრაქტიკული უნარები**	სამუშაოს ძირითადად დამოუკიდებლად ასრულებს, სწორად იყენებს საზომ ხელსაწყოებს და იცავს გაზომვის წესებს	მუშაობს ნაწილობრივი დახმარებით ან უშვებს მცირე პრაქტიკულ შეცდომებს	სამუშაოს შესასრულებლად მუდმივად სჭირდება დახმარება ან სწორად ვერ იყენებს ხელსაწყოებს

ქულების ინტერპრეტაცია

ქულა	შეფასება	აღწერა
18 – 20	ძალიან მაღალი	მოსწავლე სრულად ფლობს როგორც პრაქტიკულ, ისე მათემატიკურ მხარეს; შედეგებს აანალიზებს და ასაბუთებს.
15 – 17	მაღალი	სამუშაო სწორადაა შესრულებული, მცირე ხარვეზებით
11 – 14	საშუალო	ძირითადი უნარები გამოვლენილია, თუმცა საჭიროა ცალკეული კომპონენტების გაუმჯობესება.
7 – 10	დამაკმაყოფილებელი	მოსწავლემ დავალების მხოლოდ ძირითადი ნაწილი შეასრულა
0 – 6	გასაუმჯობესებელი	ვერ შეძლო მეთოდის სრულად გამოყენება და მიღებული შედეგების გაანალიზება.

ამ სამუშაოში არაა აუცილებელი, რომ მოსწავლემ ზუსტად „ნამდვილი“ სიმაღლე მიიღოს. მნიშვნელოვანია, რომ სწორად ჩაატაროს გაზომვა, გამოიყენოს პროპორციული დამოკიდებულება, დააფიქსიროს მონაცემები და შეძლოს ცდომილების მიზეზის გააზრება. პრაქტიკული სამუშაო შეიძლება შესრულდეს წყვილებში ან 3-4– მოსწავლიან ჯგუფებში.

1.2 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების რიცხვითი მნიშვნელობების გამოთვლა (2 სთ)

მიზანი: ტრიგონომეტრიული ფუნქციების რიცხვითი მნიშვნელობების შესახებ შეძენილი ცოდნის გამეორება/განმტკიცება.

პარაგრაფის შესწავლის შემდეგ მოსწავლემ უნდა შეძლოს:

- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების რიცხვითი მნიშვნელობების გამოთვლა (მათ შორის კალკულატორის გამოყენებით);
- შეძენილი ცოდნის გამოყენება ამოცანების ამოსახსნელად;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების რიცხვითი მნიშვნელობების განმარტება მართი, ბლაგვი და გაშლილი კუთხეებისათვის და გამოთვლა;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ფიგურათა ფართობების გამოსათვლელად გამოყენება.

რესურსები: ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცხრილი, კალკულატორი.

პირველი საათი

გაკვეთილის მსვლელობა

I. ორგანიზაციული ეტაპი, საშინაო დავალების შემოწმება

II. გაკვეთილის მიზნისა და ამოცანების გაცნობა

III. წინარე ცოდნის გახსენება

დავალების შემოწმებისა და განხილვის შემდეგ მასწავლებელი:

– როგორ გამოვთვალოთ კუთხის მიმდებარე კათეტი მოპირდაპირე კათეტითა და კუთხის ტანგენსით?

– როგორ გამოვთვალოთ კუთხის მოპირდაპირე კათეტი მიმდებარე კათეტითა და კუთხის ტანგენსით?

– როგორ გამოვთვალოთ კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზითა და ამ კუთხის სინუსით?

– როგორ გამოვთვალოთ კუთხის მიმდებარე კათეტი ჰიპოტენუზითა და ამ კუთხის კოსინუსით?

– დღეს განვიხილავთ საინტერესო პრაქტიკულ ამოცანას, რომელიც ცხადყოფს მათემატიკის ცხოვრებასთან კავშირს.

ჩვენი ამოცანის მიზანია დავადგინოთ ისეთი ობიექტის ზომები, რომელიც ჩვენთვის მიუწვდომელ ადგილზე მდებარეობს. წაიკითხეთ სახელმძღვანელოს ძირითად ტექსტში 1-ელი ამოცანა.

კითხულობენ პარაგრაფის პირველ ამოცანას და მსჯელობენ მისი ამოხსნის წარმოდგენილ მეთოდზე.

იხილავენ მე-2 ამოცანას. ეცნობიან ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობების გამოთვლას კალკულატორის გამოყენებით. კალკულატორის საშუალებით ითვლიან და ამრგვალებენ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობებს.

მასწავლებელი:

– რაში მდგომარეობს ათწილადის მოცემულ თანრიგამდე დამრგვალების წესი? (პასუხობენ).

მასწავლებელი: – ზოგიერთი მახვილი კუთხისათვის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ზუსტი მნიშვნელობები მარტივად შეგვიძლია დავადგინოთ. ეს კუთხეებია: 30°, 45°, 60°.

ნახეთ ძირითად ტექსტში მე-3 ამოცანა.

ამ კუთხეების ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობების დადგენისას პარალელურად ადგენენ ცხრილს (დაფაზე და რვეულებში).

α	30°	45°	60°
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tanα	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

მასწავლებელი: – სასურველია, ეს ცხრილი ზეპირად იცოდეთ.

განმტკიცება

მუშაობენ დაფასთან და რვეულებში. ხსნიან №1, №3, №5 სავარჯიშოებს.

სავ.№1. სავარჯიშოში მოცემულია 6 ტრიგონომეტრიული ფუნქცია, რომელთა მნიშვნელობებიც კალკულატორის გამოყენებით უნდა გამოითვალონ. ამას მასწავლებელი რიგების მიხედვით გაანაწილებს. თითო მაგალითის პასუხს რიგიდან თითო მოსწავლე ასახელებს. განსხვავებული პასუხები შემოწმდება, დაშვებული შეცდომები გასწორდება. სწორად გამოთვლის გზას დაფაზე აჩვენებენ (ერთ შეცდომაზე პასუხობს ერთი მსურველი).

სავ.№3. მაგალითებს ხსნიან დაფაზე და რვეულებში.

სავ.№5. ამოცანის ამოსახსნელად, სასურველია, დაიხმარონ სქემატური ნახაზი.

მუშაობენ მახვილი, ბლაგვი და მართი კუთხეების ფუნქციის მნიშვნელობების გამოთვლა-ზე. საჭიროების შემთხვევაში, ბლაგვი კუთხის ფუნქცია დაჰყავთ მახვილი კუთხის ფუნქციაზე.

დამოუკიდებელი სამუშაო: I ვარიანტი: №10 ა) სავარჯიშო;

II ვრიანტი: №10 ბ) სავარჯიშო.

მოსწავლეები უნდა მიხვდნენ, რომ ბლაგვ კუთხესთან აქვთ საქმე და გამოიყენონ ბლაგვი კუთხის ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლის წესი. კიდევ ერთხელ ჩამოაყალიბებენ, თუ როგორ დაიყვანენ ბლაგვი კუთხის ფუნქციას მახვილი კუთხის ფუნქციაზე.

რეფლექსია:

მასწავლებელი:

– რა იყო დღეს ჩვენი მიზანი?

– რა საკითხების შესახებ გავიხსენეთ ცოდნა?

– რომელ კუთხეებზე აქვს ტოლი მნიშვნელობები სინუსსა და კოსინუსს?

– ვიცით თუ არა სინუსისა და კოსინუსის მნიშვნელობა $120°$ -იან კუთხის შემთხვევაში?

– ვიცით თუ არა სინუსის და კოსინუსის ზუსტი მნიშვნელობა $135°$ -ზე? $180°$ -ზე?

საშინაო დავალება: №2, №4, №6,№8 სავარჯიშოები.

სავარჯიშოების ამოხსნები

სავ.№ 8. $1500 \cdot \sin 60° + 3700 \approx 5000$ მ.

სავ.№ 9. ვწერთ განტოლებას: $h\sqrt{3} - h = 20 \Rightarrow h = 10\left(\sqrt{3} + 1\right) \approx 10 \cdot 2{,}73 = 27{,}3$ (მ).

მეორე საათი

I. **გაკვეთილის მსვლელობა**

II. **ორგანიზაციული ეტაპი**

III. **საშინაო დავალების შემოწმება**

IV. **წინარე ცოდნის გააქტიურება**

დავალების შემოწმებისა და შეცდომების განხილვის შემდეგ მასწავლებელი სვამს კითხვებს:

– რა სიდიდის კუთხეებისთვის იცით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები?

– დადებითია თუ უარყოფითი ბლაგვი კუთხის სინუსი? კოსინუსი?

– ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობებიდან რომელი სრულდება მართი კუთხისთვის? გაშლილი კუთხისთვის?

– რა სიდიდის კუთხეებისათვის იცით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ზუსტი მნიშვნელობები?

– რის ტოლია $\sin 30°$? $\cos 30°$? $\operatorname{tg} 60°$?

–რა სიდიდის მახვილი კუთხისათვისაა კოსინუსი 0,5-ის ტოლი? ტანგენსი 1-ის ტოლი?

– რომელი ფუნქციები იცვლიან ნიშანს ბლაგვი კუთხის შემთხვევაში?

– რატომ არაა განმარტებული ტანგენსი მართი კუთხის შემთხვევაში?

შემდეგ გამოჰყავთ პარაგრაფში არსებული (ამოცანა №5) სამკუთხედის ფართობის ფორმულა (იხილავენ სიმაღლის მდებარეობის ყველა შემთხვევას).

მასწავლებელი: – დააკვირდით ძირითად ტექსტში 1-ელ ფორმულას და მიპასუხეთ კითხვაზე: როგორ გამოითვლით პარალელოგრამის ფართობს, თუ მისი გვერდების სიგრძეებია a და b, ხოლო ერთ-ერთი კუთხე – α?

V. **განმტკიცება.** მუშაობენ დაფაზე და რვეულებში. ხსნიან №12, №14, №16 და №18 ამოცანებს.

VI. **დამოუკიდებელი სამუშაო**: I ვარიანტი №20,
II ვარიანტი №21.

VII. რეფლექსია, გაკვეთილის შეჯამება:

მასწავლებელი: –რა ვისწავლეთ დღეს?

– როგორ გამოვთვალოთ სამკუთხედის ფართობი ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით?

– როგორ გამოვთვალოთ პარალელოგრამის ფართობი ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით?

საშინაო დავალება: №11, №13, №17, №19 ამოცანები.

სავარჯიშოების ამოხსნები და პასუხები:

სავ.№14. $10\sin 30° = 5$ სმ;

სავ.№18. $\frac{1}{2}\cdot 14^2 \cdot \sin 120° = 49\sqrt{3}$ (სმ^2);

სავ.№19. $\left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sin 150° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ (სმ^2);

სავ.№22. $h = 12\tan 30° = 4\sqrt{3} \Rightarrow S = 12 \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ (სმ^2).

შესაძლებელია თუ არა?

ა) დიახ, შესაძლებელია. მაგალითად, კათეტები იყოს 3 და 4;

ბ) შეუძლებელია, რადგან $0,4^2+0,9^2=0,97\neq 1$.

აბა, სცადე!

$$\frac{h}{\tan\alpha}+\frac{h}{\tan\beta}=a\Rightarrow h=\frac{a\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}\Rightarrow S_{\Delta}=\frac{a^2\tan\alpha\cdot\tan\beta}{2(\tan\alpha+\tan\beta)}.$$

1.3 კოსინუსებისა და სინუსების თეორემები (3 სთ)

მიზანი:

- სინუსებისა და კოსინუსების თეორემების გაცნობა და ამოცანების ამოხსნაში გამოყენება;
- სამკუთხედების ამოხსნა მისი სამი ელემენტის გამოყენებით;
- პარალელოგრამის დიაგონალებსა და გვერდებს შორის დამოკიდებულების გაცნობა და ამოცანების ამოხსნაში გამოყენება.

მოსწავლემ უნდა შეძლოს:

- კოსინუსებისა და სინუსების თეორემების ჩამოყალიბება;
- სამი გვერდის მიხედვით სამკუთხედის კუთხეების გამოთვლა;
- პარალელოგრამის თვისების ჩამოყალიბება და დასაბუთება;
- სამი გვერდის მიხედვით სამკუთხედის მედიანის პოვნა;
- სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსის გვერდსა და მოპირდაპირე კუთხესთან დაკავშირება;
- სამკუთხედის გვერდითა და ორი კუთხით დანარჩენი გვერდების პოვნა;
- სინუსებისა და კოსინუსების თეორემების გამოყენებით პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა.

პირველი საათი

თემა: კოსინუსების თეორემა

მიზანი:

- კოსინუსების თეორემის გაცნობა და ამოცანების ამოხსნაში გამოყენება;
- კოსინუსების თეორემის შედეგის გაცნობა, დამტკიცება და გამოყენება;
- სამკუთხედების ამოხსნა მისი ორი გვრდისა და მათ შორის მდებარე კუთხის გამოყენებით;
- სამკუთხედის კუთხის პოვნა მისი სამი გვერდის მიხედვით;
- სამკუთხედის მედიანის გამოთვლა მისი სამი გვერდის მიხედვით.

გაკვეთილის მსვლელობა

I. **ორგანიზაციული ეტაპი** (2 წთ)

II. **წინარე ცოდნის გააქტიურება** (5 წთ)

მასწავლებელი: – (დავალების შემოწმებისა და განხილვის შემდეგ)
– რა სახის სამკუთხედებს ვიცნობთ გვერდების მიხედვით? დახაზეთ დაფაზე.
– რა სახის სამკუთხედებს ვიცნობთ კუთხეების მიხედვით? დახაზეთ დაფაზე.

– რაში მდგომარეობს სამკუთხედების ტოლობის სამი ძირითადი ნიშანი? ჩამოაყალიბეთ ნიშნები და შეასრულეთ ტოლი სამკუთხედების ნახაზი ტოლი ელემენტების მონიშვნით

III. **გაკვეთილის მიზნისა და ამოცანების გაცნობა** (2 წთ)

მასწავლებელი: სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები გვეუბნება, რომ მათში ნახსენები სამი ელემენტი, რომელთაგან ერთი მაინცაა გვერდი, ცალსახად განსაზღვრავს დანარჩენი ელემენტების ზომებს, ანუ ჩვენ უნდა შეგვეძლოს ამ სამი ელემენტით დანარჩენი ელემენტების პოვნა. ამ სახის ამოცანებს სამკუთხედების ამოხსნის ამოცანები ეწოდება. ეს ამოცანები იხსნება სინუსებისა და კოსინუსების თეორემების გამოყენებით. დღეს გავეცნობით კოსინუსების თეორამას და გამოვიყენებთ მას ამოცანების ამოსახსნელად.

IV. **ახალი მასალის ახსნა** (11 წთ)

მასწავლებელი: –წაიკითხეთ ძირითადი ტექსტის 1-ელი ამოცანა თავისი ამოხსნით.
– რა იყო მოცემული? (სამკუთხედის ელემენტები).
– სამკუთხედის რომელი ელემენტი იყო საძიებელი?
– რა თეორემა გამოვიყენეთ სამკუთხედის მესამე გვერდის მოსაძებნად?
– რა ფორმულით გამოვთვალეთ მესამე გვერდის სიგრძე?
– ზეპირსიტყვიერად ჩამოაყალიბეთ კოსინუსების თეორემა.
– რა სახის ცხოვრებისეული ამოცანა ამოვხსენით მათემატიკის გამოყენებით?
– ახლა ამოვხსნათ №3 და №5 სავარჯიშოები (ხსნიან დაფაზე და რვეულებში).
–1-ელი ტოლობიდან გამოვითვალოთ კუთხის კოსინუსი. რა შეიძლება გამოვითვალოთ მიღებული შედეგით?
– წაიკითხეთ ტექსტის მე-2 ამოცანა.
მუშაობენ შემოთავაზებული ამოცანის ამოხსნაზე. ერთი რიგიდან ერთი მოსწავლე განმარტავს, თუ როგორაა ამოხსნილი ამოცანა და მეორე რიგიდან – მეორე.

V. განმტკიცება. პრაქტიკული მუშაობა მასწავლებელთან ერთად. (12 წთ)

განმტკიცების მიზნით ხსნიან № 7, №8 და№9 ამოცანებს.

მუშაობენ ძირითადი ტექსტის მე-3 ამოცანაზე. გამოჰყავთ სამკუთხედის მედიანის გამოსათვლელი ფორმულა.

VI. დამოუკიდებელი სამუშაო. (6 წთ)

I ვარიანტი – №1 ამოცანა. II ვარიანტი – №12 ამოცანა.

VII. რეფლექსია. შედეგების შეჯამება (5 წთ)

მასწავლებელი:

- რა ვისწავლეთ დღეს?
- რაში მდგომარეობს კოსინუსების თეორემა?
- რაში ვიყენებთ კოსინუსების თეორემას?
- როგორ ამოვხსნათ სამკუთხედი მისი სამი გვერდის მიხედვით?
- როგორ გამოვთვალოთ სამკუთხედის მედიანა მისი სამი გვერდის მიხედვით?
- პარალელოგრამის რა თვისებას გავეცანით?
- რა იყო საინტერესო? რამ მიიქცია თქვენი ყურადღება?

VIII. საშინაო დავალება. (2 წთ)

№1,№4 და №6 ამოცანები.

მეორე საათი

თემა: სინუსების თეორემა

მიზანი:

- სინუსების თეორემის გაცნობა და ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება;
- კოსინუსების თეორემის შესახებ შეძენილ ცოდნის გაღრმავება/განმტკიცება;
- პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკურ ენაზე წარმოდგენა და ამოხსნა;
- მოსწავლის დამოუკიდებლად მუშაობისა და თვითკონტროლის უნარის განვითარება.

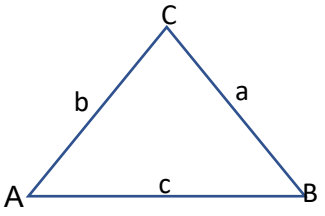
გაკვეთილის მსვლელობა

I. ორგანიზაციული ეტაპი, საშინაო დავალების შემოწმება

II. ცოდნის გააქტიურება. განვლილი მასალის გამეორება.

მასწავლებელი: – წინა გაკვეთილზე გავეცანით კოსინუსების თეორემას. სამკუთხედის რა ელემენტების პოვნა შეგვიძლია კოსინუსების თეორემით?

– სამი დავალება გვაქვს გამზადებული, რომელიც ზეპირად უნდა ამოვხსნათ (აჩვენებს ნახაზსა და ჩანაწერს):



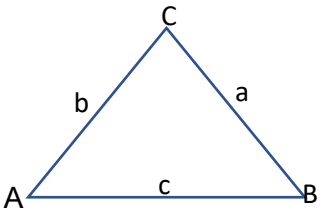
დავალება №1	**დავალება №2**
სწორია თუ არა ტოლობა? $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\angle A,$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B,$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin\angle C,$ $\cos\angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$	მახვილია, მართია თუ ბლაგვია α კუთხე, თუ: • $\cos\alpha > 0$? • $\cos\alpha = 0$? • $\cos\alpha < 0$?

დავალება №3 დაადგინე შესაბამისობა	
1) $S = ab\sin\alpha$	ა) კოსინუსების თეორემა
2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$	ბ) სამკუთხედის ფართობი
3) $S = \frac{ab}{2}$	გ) პარალელოგრამის ფართობი
4) $S = \frac{ab\sin\alpha}{2}$	დ) მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი

პასუხი: დავალება №1: არა, დიახ, არა, დიახ. **დავალება №2:** α მახვილია, α მართია, α ბლაგვია.

დავალება №3 დაადგინე შესაბამისობა	
1) $S = ab\sin\alpha$	ა) კოსინუსების თეორემა
2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$	ბ) სამკუთხედის ფართობი
3) $S = \frac{ab}{2}$	გ) პარალელოგრამის ფართობი
4) $S = \frac{ab\sin\alpha}{2}$	დ) მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი

გამოვიყენოთ ნახაზი და გავარკვიოთ სამკუთხედის დასახელებული კუთხე მართია, მახვილია თუ ბლაგვი.



კოსინუსების თეორემაზე დაყრდნობით ასკვნიან, რომ:

- თუ $\cos\angle A > 0$, მაშინ $\angle A$ მახვილია,
- თუ $\cos\angle A = 0$, მაშინ $\angle A$ მართია
- თუ $\cos\angle A < 0$, მაშინ $\angle A$ ბლაგვია.

III. მიზნის გაცნობა.

მასწავლებელი: – დღეს გავეცნობით სამკუთხედის კიდევ ერთ თვისებას, სინუსების თეორემას და გავაგრძელებთ კოსინუსების თეორემაზე მუშაობას.

IV. ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი ხსნის ახალ მასალას და აჩვენებს მის გამოყენებას პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნაში (სახელმძღვანელოს ტექსტის მიხედვით).

დაფასთან გამოსულ მოსწავლეს სინუსების თეორემის გამოყენებით დამოუკიდებლად გამოჰყავს სამკუთხედის გვერდის გამოსათვლელი ფორმულა. შედეგად მიღებულ ფორმულას წაიკითხავს ზეპირსიტყვიერად.

მასწავლებელი: – სამკუთხედის რა ელემენტები უნდა ვიცოდეთ, რომ მისი რომელიმე გვერდის საპოვნელად გამოვიყენოთ სინუსების თეორემა?

V. განმტკიცება, ცოდნის პრაქტიკული გამოყენება

მასწავლებელი: – დააკვირდით მე-4 ნახატს. ნახატის მიხედვით გამოვთვალოთ მანძილი ხემდე.

– რა მანძილს ვეძებთ ნახატის მიხედვით? (AB -ს).

– ამოვხსნათ მე-4 ნახაზის მიხედვით მე-20 სავარჯიშო, სადაც $\alpha = 15°,\ \beta = 45°,\ AC = 6.$

– როგორ გამოვთვალოთ AB მანძილი? (სინუსების თეორემის გამოყენებით).

ითვლიან საძიებელი მონაკვეთის სიგრძეს. ამის შემდეგ ხსნიან სახელმძღვანელოდან №21 და №23 (ა) ამოცანებს.

VI. დამოუკიდებელი სამუშაო

№19 სამ ვარიანტად, რიგების მიხედვით.

VII. რეფლექსია

მასწავლებელი: – რა ვისწავლეთ დღეს?

– ჩამოაყალიბეთ სინუსების თეორემა.

– სამკუთხედის რა ელემენტები უნდა ვიცოდეთ, რომ შევძლოთ სინუსების თეორემის გამოყენება?

– რისი გამოთვლა შეგვიძლია სინუსებისა და კოსინუსების თეორემის გამოყენებით?

– რა უნდა ვიცოდეთ იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრის დიამეტრი?

– რა სირთულე შეგხვდათ მუშაობისას?

VIII. საშინაო დავალება: №2, №22, №23 (ბ, გ) და №24 ამოცანები.

მესამე საათი

თემა: სინუსებისა და კოსინუსების თეორემები

მიზანი:

სინუსებისა და კოსინუსების თეორემებისა და მათგან გამომდინარე შედეგების შესახებ შეძენილი ცოდნის განმტკიცება.

გაკვეთილის სტრუქტურა

I. ორგანიზაციული ეტაპი, საშინაო დავალების შემოწმება

II. ცოდნის გააქტიურება. განვლილი მასალის გამეორება.

წინარე ცოდნის გააქტიურების მიზნით, მასწავლებელი საშინაო დავალების შემოწმებისა და აღმოჩენილი შეცდომის გასწორების ან გაუგებარ საკითხებზე მუშაობის შემდეგ ამბობს წესის ნაწილს, რომლის დასრულებაც მოსწავლეებს ევალებათ.

მასწავლებელი: – მე ვიტყვი იმ წესის ნაწილს, რომლის მიხედვითაც ხდება სამკუთხედის სახის განსაზღვრა მისი კუთხეების მიხედვით. თქვენ ამ წესის ბოლო სიტყვის, ანუ სამკუთხედის სახის დასახელება გევალებათ.

- სამკუთხედის დიდი გვერდის კვადრატი თუ დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედი .... (მართკუთხაა).
- სამკუთხედის დიდი გვერდის კვადრატი თუ დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე ნაკლებია, მაშინ ეს სამკუთხედი .... (მახვილკუთხაა).
- სამკუთხედის დიდი გვერდის კვადრატი თუ დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე მეტია, მაშინ ეს სამკუთხედი .... (ბლაგვკუთხაა).

მასწავლებელი: – ახლა გავიხსენოთ:

– რაში მდგომარებს კოსინუსების თეორემა?

– რაში მდგომარებს სინუსების თეორემა?

– როგორ გავიგოთ მანძილი მიუვალ ობიექტამდე?

– როგორ დავადგინოთ სამკუთხედის სახეობა სამი მოცემული გვერდით?

განმტკიცება

ხსნიან №10, №13, N16 და №25 ამოცანებს.

დამოუკიდებელი სამუშაო

I ვარიანტი:

ამოცანა. ფეხბურთელი კარის ძელებიდან 23 მ და 24 მ-ითაა დაშორებული. კარის სიგანეა 7 მ. იპოვე კუთხე რომლითაც ხედავს ფეხბურთელი კარს.

II ვარიანტი:

ამოცანა. ანდრომ სახლიდან აღმოსავლეთის მიმართულებით 8 კმ გაიარა, შემდეგ $120°$-ით შებრუნდა და კიდევ 6 კმ გაიარა. სახლიდან რა მანძილზე აღმოჩნდა ანდრო?

პასუხი: I ვარიანტი: $17°$; II ვარიანტი: 7,2კმ.

მასწავლებელი: –შეამოწმეთ თქვენი ამოხსნები. მოსწავლეები წყვილებში უმოწმებენ ერთმანეთს ნამუშევრებს.

– რა შეცდომები იყო დაშვებული დამოუკიდებელი სამუშაოს შესრულებაში? (პასუხობენ. მოსალოდნელია, რომ მოსწავლეთა ნაწილმა II ვარიანტში 60-ის მაგივრად $120°$-იანი კუთხე გამოიყენოს).

განიხილავენ ყველაზე ხშირად დაშვებულ შეცდომებს. მასწავლებელი მოსწავლეებს სთხოვს, დაადგინონ, ამოხსნის რომელ ეტაპზე იქნა შეცდომა დაშვებული და როგორ შეიძლება მისი გასწორება.

დაფასთან გაჰყავს ის მოსწავლე, ვისაც სწორად ჰქონდა ამოხსნილი, რომელიც ამოცანის ამოხსნას ასრულებს ყოველი სვლის ახსნა-განმარტებით.

საშინაო დავალება: №9, №14, №15, №17, №18 ამოცანები.

სავარჯიშოების ამოხსნები და პასუხები

სავ.№6. ა) $90°, 45°, 45°$; ბ) $120°, 30°, 30°$.

სავ.№ 7. ა) $\cos\alpha = \frac{25+36-61}{2\cdot 5\cdot 6} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$; ბ) $\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120°$.

სავ.№10. პარალელოგრამის თვისების გამოყენებით ვწერთ განტოლებას:

$$36 + 100 = 32 + 2x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{13}\ (\text{სმ}).$$

სავ.№16. გვაქვს ორი შემთხვევა, იმის მიხედვით, $60°$ -იანი კუთხე მედიანების დიდ და მცირე ნაწილებს შორისაა თუ დიდ ნაწილებს შორის.

პასუხი: $2\sqrt{37}$ სმ, $4\sqrt{7}$ სმ, 14 სმ an $2\sqrt{13}$ სმ, $4\sqrt{19}$ სმ, $2\sqrt{97}$ სმ.

სავ.№ 21. სინუსების თეორემის გამოყენებით მივიღებთ: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60°,\ \alpha = 120°.$

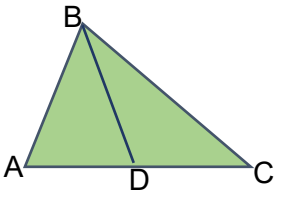
სავ.№25. AC გვერდის მიმართ ვწერთ კოსინუსების თეორემას: $12 = 4 + x^2 - 2x \Rightarrow x = 4.$

შესაძლებელია თუ არა?

შეუძლებელია, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, სინუსების თეორემით, დიდი კუთხის მოპირდაპირე გვერდი იქნება მცირე კუთხის პირდაპირ მდებარე გვერდის ტოლი, რაც დაუშვებელია.

აბა, სცადე!

ა) სინუსების თეორემით: $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle ABD} = \frac{\sin\angle BDC}{\sin\angle DBC} = \frac{BC}{DC};$



ბ) შემოვიღოთ აღნიშვნები: AB=c, BC=a, BD=x, AD=kc, DC=ka.

ABD სამკუთხედში x–თვის დავწეროთ კოსინუსების თეორემა, სადაც A კუთხის კოსინუსი გამოვსახოთ მთლიანი ABC სამკუთხედიდან:

$$x^2 = c^2 + (kc)^2 - 2kc^2 \cdot \frac{c^2 + k(a+c)\,a - {}^2}{2ck(a+c)} = ac - k^2 ac.$$

1.4 ერთეულოვანი წრეწირი. (3 სთ)

მიზანი. მოსწავლემ უნდა შეძლოს:

- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება ერთეულოვანი წრეწირის საშუალებით ნებისმიერი გრადუსული ზომის არგუმენტისათვის;
- ფუნქციათა თვისებების (მნიშვნელობები, ნიშნები, ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა) ჩამოყალიბება და დასაბუთება ერთეულოვან წრეწირზე დემონსტრირებით.

პირველი საათი

I. ორგანიზაციული ეტაპი, საშინაო დავალების შემოწმება

II. ცოდნის გააქტიურება. განვლილი მასალის გამეორება

დავალების შემოწმებისა და გაუგებარი ან შეცდომით ამოხსნილი ამოცანების განხილვის შემდეგ მასწავლებელი სვამს კითხვებს:

– როგორი კუთხეებისათვის ვიცით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება?

– როგორ განიმარტება მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?

III. მიზნის გაცნობა

მასწავლებელი: – დღეს ჩვენ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს განვმარტავთ ნებისმიერი გრადუსული ზომის არგუმენტისათვის.

IV. ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი ხსნის ახალ მასალას. დაფაზე ხაზავენ ერთეულოვან წრეწირს. მოსწავლეები ასახელებენ წრეწირის მიერ ღერძებთან გადაკვეთის წერტილების კოორდინატებს.

მასწავლებელი განმარტავს P_α წერტილის შინაარსს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი გრადუსებისათვის. მოსწავლეები ასახელებენ P_α კოორდინატებს სხვადასხვა α-სთვის. ადგენენ, რომელ მეოთხედებში რა ნიშნები აქვს: ა) სინუსს; ბ) კოსინუსს; გ) ტანგენსს.

ერთეულოვან წრეწირზე აჩვენებენ P_α წერტილს, როცა $\alpha = 30°, 90°, 150°, -30°$ და ითვლიან შესაბამის კოორდინატებს.

მუშაობენ 1-ელ მაგალითზე. დამოუკიდებლად კითხულობენ ამოცანას და მის ამოხსნას. ერთი მსურველი ახსნის, როგორაა სახელმძღვანელოში, მაგალითად, $\alpha = 30°$-თვის გამოთვლილი $OP_{30°}$, დანარჩენს – სხვები.

ითვლიან $P_{-\alpha}$, $P_{\alpha+360°\cdot k}$ წერტილების კოორდინატებს, როცა იციან P_α წერტილის კოორდინატები და ის, რომ α მახვილია.

მასწავლებელი: – რა კანონზომიერებას ხედავთ? (P_α -ს პირველი კოორდინატი არის α კუთხის კოსინუსი, ხოლო მეორე – α-კუთხის სინუსი).

განმარტავენ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს ნებისმიერი α-სთვის.

$$\sin\alpha = x,\ \cos\alpha = y,\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით მოსწავლეებს გამოჰყავთ ტოლობები:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\quad \tan(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha,\quad \sin(\alpha+360^{\circ}\cdot k)= \sin\alpha,\quad \cos(\alpha+360^{\circ}\cdot k)=\cos\alpha,$$

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

ერთეულოვან წრეწირზე მეოთხედების მიხედვით ერთმანეთს ადარებენ როგორც აბსცისებს, ისე ორდინატებს.

V. განმტკიცება, ცოდნის პრაქტიკული გამოყენება

კლასში მუშაობენ №1, №3, №5, №7, №10 სავარჯიშოებზე.

VI. დამოუკიდებელი სამუშაო

I ვარიანტი: №8 სავარჯიშოს ა, ბ, გ დავალებები.

II ვარიანტი: №8 სავარჯიშოს დ, ე, ვ დავალებები.

VII. რეფლექსია

მასწავლებელი: – რა ვისწავლეთ დღეს?

– რას ეწოდება ერთეულოვანი წრეწირი?

– რა კოორდინატების მქონე წერტილებში კვეთს ერთეულოვანი წრეწირი აბსცისთა ღერძს? ორდინატთა ღერძს?

_ P_α წერტილის რომელი კოორდინატია $\sin\alpha$? $\cos\alpha$?

– რომელი ფუნქციის მნიშვნელობა არ იცვლება არგუმენტის ნიშნის შეცვლით?

– თუ P_α წერტილის კოორდინატებია (x;y), მაშინ რა კოორდინატები ექნება $P_{-\alpha}$ წერტილს? რა ნიშანი ექნება: ა) sinα-ს; ბ) cosα-ს; გ) tanα-ს მესამე მეოთხედში ? მეორე მეოთხედში?

VIII. საშინაო დავალება: №2, №4, №6, №9, №11 სავარჯიშოები.

მეორე საათი

I. ორგანიზაციული ეტაპი, საშინაო დავალების შემოწმება

II. ცოდნის გააქტიურება. განვლილი მასალის გამეორება

დავალების შემოწმებისა და გაუგებარი ან შეცდომით ამოხსნილი ამოცანების განხილვის შემდეგ მასწავლებელი სვამს კითხვებს:

– რა კოორდინატებში კვეთს ერთეულოვან წრეწირს აბსცისათა ღერძი? ორდინატთა ღერძი?

– რა კოორდინატები აქვს P_{30° წერტილს ერთეულოვან წრეწირზე?

– რა კოორდინატები აქვს P_{60° წერტილს ერთეულოვან წრეწირზე?

– რა კოორდინატები აქვს P_{90° წერტილს ერთეულოვან წრეწირზე?

III. მიზნის გაცნობა.

მასწავლებელი: – ჩვენ დღეს გავიღრმავებთ ცოდნას წინა გაკვეთილზე ნასწავლ მასალაზე. აბა, ჩამოაყალიბეთ ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის თემა და მიზანი.

IV. განმტკიცება, ცოდნის პრაქტიკული გამოყენება

კლასში მუშაობენ №12, №14, №18 , №19, №20 სავარჯიშოები სავარჯიშოებზე.

V. დამოუკიდებელი სამუშაო

№16 სავარჯიშო სამ ვარიანტად.

VI. რეფლექსია

1) მასწავლებელი: რა კოორდინატები აქვს: ა) P_{0° ; ბ) P_{180° ; გ) P_{270° ; დ) P_{-90° წერტილს?
2) P_α წერტილის რომელი კოორდინატია $\sin\alpha$? $\cos\alpha$?
3) რომელი ფუნქციის მნიშვნელობა არ იცვლება არგუმენტის ნიშნის შეცვლით?
4) რა ნიშანი ექნება: ა) $\sin\alpha$-ს; ბ) $\cos\alpha$-ს, როცა $270^\circ < \alpha < 360^\circ$?

VII. საშინაო დავალება: №13, №15, №17, №21 სავარჯიშოები.

მესამე საათი

კლასში მუშაობენ: №20, №22, №24, №26 სავარჯიშოებზე.

საშინაო დავალება.

დავალებას შეარჩევენ ამოუხსნელად დარჩენილი სავარჯიშოებიდან.

სავარჯიშოების ამოხსნები და პასუხები.

სავ.№2. $285^\circ \in$ IV; $-376^\circ \in$ IV; $204^\circ \in$ III; $-172^\circ \in$ III; $-12^\circ \in$ IV; $730^\circ \in$ I; $-92^\circ \in$ III; $800^\circ \in$ I.

სავ.№3. ა) (x;y); ბ) (x;y); გ) (-x;-y).

სავ.№4. ა) $\sin 65^\circ > 0$; $\sin 105^\circ > 0$; $\sin 161^\circ > 0$; $\sin 179^\circ > 0$; $\sin 200^\circ < 0$; $\sin 250^\circ < 0$; $\sin 365^\circ > 0$; $\sin 380^\circ > 0$;

ბ) $\cos 40^\circ > 0$; $\cos 87^\circ > 0$; $\cos 100^\circ < 0$; $\cos 192^\circ < 0$; $\cos 200^\circ < 0$; $\cos 250^\circ < 0$; $\cos 339^\circ > 0$; $\cos 380^\circ > 0$;

გ) $\tan 40^\circ > 0$; $\tan 80^\circ > 0$; $\tan 100^\circ < 0$; $\tan 102^\circ < 0$; $\tan 185^\circ > 0$; $\tan 250^\circ > 0$; $\tan 286^\circ < 0$; $\tan 320^\circ < 0$; $\tan 368^\circ > 0$.

სავ.№5. ა) სინუსი დადებითია პირველ და მეორე მეოთხედებში ;

ბ) კოსინუსი დადებითია პირველ და მეოთხე მეოთხედებში;

გ) ტანგენსი დადებითია პირველ და მესამე მეოთხედებში.

სავ.№6. ა) $\sin 145^\circ$ – დადებითია; ბ) $\sin(-90^\circ)$ –უარყოფითია; გ) $\cos 145^\circ$ – უარყოფითია;

დ) $\cos(-45^\circ)$ – დადებითია; ე) $\tan 96^\circ$ – უარყოფითია; ვ) $\tan 182^\circ$ დადებითია.

სავ.№7. ა) $\sin 85^\circ \cdot \sin 102^\circ$ – დადებითია; ბ) $\cos 184^\circ \cdot \cos 172^\circ$ – დადებითია;

გ) $\sin 142^\circ \cdot \cos 142^\circ \cdot \tan 142^\circ$ – დადებითია; დ) $\tan 111^\circ \cdot \tan 172^\circ$ – დადებითია;

ე) $\cos 192^\circ \cdot tg 255^\circ$ – უარყოფითია; ვ) $\sin 80^\circ \cdot \tan 290^\circ \cdot \cos 170^\circ$ – დადებითია.

სავ.№8. ა) რადგან ერთეულოვან წრეწირზე, პირველ მეოთხედში, რაც მეტია კუთხე, მით მეტია შესაბამისი ორდინატა, ანუ სინუსი, ამიტომ $\sin 20^\circ < \sin 40^\circ$;

ბ) რადგან ერთეულოვან წრეწირზე, პირველ მეოთხედში, რაც მეტია კუთხე, მით ნაკლებია შესაბამისი აბსცისა, ანუ კოსინუსი, ამიტომ $\cos 20^\circ > \cos 40^\circ$; გ) $\tan 20^\circ < \tan 40^\circ$.

სავ.№9. ა) $\sin 25^\circ - \sin 26^\circ < 0$; ბ) $\sin 130^\circ - \sin 240^\circ > 0$; გ) $\cos 25^\circ - \cos 26^\circ > 0$;

დ) $\sin 45^\circ - \sin 40^\circ > 0$; ე) $\sin 62^\circ - \sin 70^\circ < 0$; ვ) $\cos 40^\circ - \cos 42^\circ > 0$.

სავ.№10. ა) $\sin 20^\circ,\ \sin 30^\circ,\ \sin 45^\circ,\ \sin 60^\circ,\ \sin 70^\circ,\ \sin 80^\circ$;

ბ) $\cos 90^\circ,\ \cos 60^\circ,\ \cos 50^\circ,\ \cos 45^\circ,\ \cos 40^\circ,\ \cos 30^\circ$.

სავ.№11. ა) $\sin 180^O=0,\ \cos 180^O=-1,\ \tan 180^O=0$;

ბ) $\sin 270^O=-1,\ \cos 270^O=0,\ \tan 270^O$ არ არსებობს;

გ) $\sin 360^O=0,\ \cos 360^O=1,\ \tan 360^O=0$.

სავ.№13. ა) $\sin 585^\circ = \sin(585^\circ - 360^\circ) = \sin 225^\circ$;

ბ) $\cos(-860^\circ) = \cos 860^\circ = \cos(860^\circ - 720^\circ) = \cos 140^\circ$.

სავ.№16. 60° ; 120° .

სავ.№17. 45° ; 225° .

სავ.№18. 90° ; 270° .

სავ.№20. ა) $5\sin 90^\circ + 2\cos 0^\circ - 2\sin 270^\circ + 10\cos 180^\circ = 5 + 2 + 2 - 10 = -1$;

ბ) $13\sin 0^\circ + 12\cos 90^\circ - 3\tan 30^\circ = 0 + 0 - \sqrt{3} = -\sqrt{3}$;

გ) $3\tan 0^\circ + 2\cos 90^\circ + 3\sin 270^\circ - 3\cos 180^\circ = 0 + 0 - 3 + 3 = 0$;

დ) $\sqrt{2}\cos 45^\circ - \sqrt{3}\tan 60^\circ + 2\tan 45^\circ = 1 - 3 + 2 = 0$.

სავ.№21. ა) $4a\sin^2 45^\circ - 3(a\tan 45^\circ)^2 - (2a\cos 45^\circ)^2 = 2a - 3a^2 - 2a^2 = 2a - 5a^2$;

ბ) $$\frac{(\sin 90^\circ)^2 - (\tan 45^\circ)^2}{2a^2\sin 30^\circ - 2ab\cos 0^\circ + (b\tan 45^\circ)^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

სავ.№22. ა) $\frac{\pi}{2}$; ბ) π; გ) $\frac{\pi}{12}$.

სავ.№23. ბ) $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 300^\circ = -\sqrt{3}$.

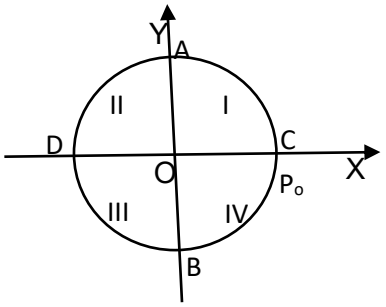
სავ.№24. ა) $\alpha = 160^\circ$. მართლაც, $\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ = a$.

ბ) $\alpha = 200^\circ$. მართლაც, $\sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ = -a$.

სავ.№25. ა) $\alpha = 160^\circ$. მართლაც, $\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ = -a$;

ბ) $\alpha = 340^\circ$. მართლაც, $\cos 340^\circ = \cos(360^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ = a$.

სავ.№26. ა) ასეთი α იქნება ნებისმიერი კუთხე, რომელიც ერთეულოვან წრეწირზე მობრუნებისას P_0 წერტილს გადაიყვანს C ან D წერტილში, ანუ $\alpha = 180^\circ k$, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია;



ა) ასეთი α იქნება ნებისმიერი კუთხე, რომელიც ერთეულოვან წრეწირზე მობრუნებისას P_0 წერტილს გადაიყვანს A ან B წერტილში, ანუ $\alpha = 90^\circ + 180^\circ k$, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

სავ.№27. π-ჯერ, 2π-ჯერ.

სავ.№28. ა) π სმ; ბ) $\frac{\pi}{2}$ სმ; გ) $\frac{\pi}{3}$ სმ; დ) $\frac{\pi}{4}$ სმ; ე) $\frac{\pi}{6}$ სმ; ვ) $\frac{\pi}{12}$ სმ.

სავ.№29. ა) 5; ბ) 1სმ; გ) 1.

სავ.№30. ორდინატა გამოითვლება პითაგორას თეორემით: **პასუხი:** $\sqrt{0,91}$.

სავ.№31. სამხრეთსა და ჩრდილო-აღმოსავლეთის მიმართულებებს შორის კუთხეა 135°. ამიტომ, კოსინუსების თეორემის გამოყენებით მიიღება: $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \sqrt{2}v_1v_2}$.

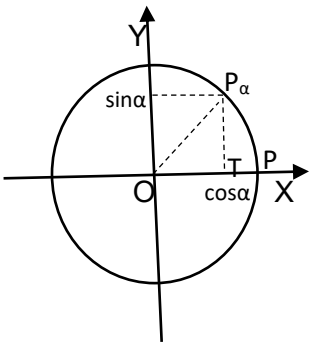
სავ. №32. ა) შემოხაზული წრეწირის ცენტრი გვერდების შუა მართობების გადაკვეთაზეა; ბ) ≈ 3 მ.

შესაძლებელია?

შეუძლებელია, რომ რაიმე α არგუმენტისთვის შესრულდეს ტოლობა: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1$, გარდა $\alpha = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, რადგან

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\le 1.$$

აბა, სცადე!



დავამტკიცოთ, რომ P_α წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ ეკუთვნის I მეოთხედს, როცა $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

დამტკიცება: მართლაც, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha>1$ მაშინ ცხადია, P_α წერტილი არ ეკუთვნის II ან III მეოთხედს, რადგან ასეთ შემთხვევაში $\cos\alpha\le 0$, საიდანაც გვექნება: $\sin\alpha+\cos\alpha\le\sin\alpha\le 1$, რაც ეწინააღმდეგება მოცემულობას.

ანალოგიურად, IV მეოთხედში გვექნება: $\sin\alpha+\cos\alpha\le\cos\alpha\le 1$, რაც ისევ წინააღმდეგობაშია მოცემულობასთან, ე.ი. P_α წერტილი ეკუთვნის I მეოთხედს.

ვთქვათ, P_α წერტილი ეკუთვნის I მეოთხედს. ჩავწეროთ სამკუთხედის უტოლობა OTP_α მართკუთხა სამკუთხედის შემთხვევაში.

მივიღებთ: $OT+TP_\alpha>OP_\alpha$, ანუ $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

1.5 რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები (3 სთ)

მიზანი: კუთხის რადიანული ზომის შემოღება და რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება.

პირველი საათი

გაკვეთილის სტრუქტურა

გაკვეთილის მსვლელობის ეტაპები		დავალებები მოსწავლისათვის, რომელიც დაგეგმილი შედეგის მიღწევამდე მიიყვანს
1	**ორგანიზაციული ეტაპი**	მოსწავლეთა დასწრების შემოწმება; მოსწავლეთა განწყობის შექმნა გაკვეთილის მოსასმენად.
2	**საშინაო დავალების შემოწმება**	მასწავლებელი დავალებას შერჩევით ამოწმებს სათანადო კომენტარებით. საჭიროებისას, ინტერესის გამოხატვის შემთხვევაში, მოსწავლეები დაფაზე ხსიან დავალებას შეცვლილი რიცხვითი მონაცემებით.
3	**მიზნისა და შედეგის დაგეგმვა**	მასწავლებელი მოსწავლეებს აცნობს გაკვეთილის მიზანსა და გეგმას.
40	**წინარე ცოდნის გააქტიურება**	მასწავლებელი: – როგორი კუთხეებისათვის ვიცით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება? – როგორ განიმარტება მახვილი კუთხის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?

		– როგორ გარდაქმნას ეწოდება O ცენტრის მიმართ α გრადუსით მობრუნება? – რა მიმართულებით ხდება მობრუნება, როცა კუთხე დადებითია? უარყოფითია? – როგორ მნიშვნელობებს იღებს α მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქცია, როცა $0° < \alpha < 90°$? ახსენით, რატომ ხდება ასე.
5	**შეძენილი ცოდნის განმტკიცება**	კლასში მუშაობენ ამოცანებზე: **1-ელი გაკვეთილი**: №1, №3, №5 (, ბ, გ-ს 4-4 მაგალითი),№8. **მე-2 გაკვეთილი** –№7, №10, №11. **მე-3 გაკვეთილი** – №6, №14, №17, №19.
6	**დამოუკიდ. სამუშაო**	I ვარიანტი: №13 – ა და გ დავალებები. II ვარიანტი: № 13 – ბ და დ დავალებები.
7	**რეფლექსია**	მასწავლებელი: – რა ვისწავლეთ დღეს? – როგორ კუთხეს კუთხეს ეწოდება 1 რადიანის ტოლი? – წრეწირის რა ნაწილია π რადიანის ტოლი რკალი? **მე-3 გაკვეთილი** მასწავლებელი: – რა სიდიდის ცენტრალურ კუთხეს ეწოდება 1 რადიანის ტოლი? – წრეწირის რა ნაწილია $\frac{\pi}{2}$ რადიანის ტოლი რკალი? – რას ეწოდება რიცხვითი არგუმენტის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი? – დაახლოებით რამდენ გრადუსს უდრის 2 რადიანი? 0,5 რადიანი? – რისთვისაა საჭირო ერთეულოვანი წრეწირი? ერთეულოვანი წრეწირი აუცილებელია ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შესასწავლად და მათი გრაფიკების ასაგებად, ტრიგონომეტრიული განტოლებებისა და უტოლობების ამოსახსნელად, ტრიგონომეტრიული განტოლების ფესვების გადასარჩევად.
8	**ინფორმაცია საშინაო დავალების შესახებ**	**1-ელი გაკვეთილი** – №2, №4, №5 (დარჩენილი ნაწილი), №9 სავარჯ. **მე-2 გაკვეთილი** – №9, №11, №12 სავარჯიშოები. **მე-3 გაკვეთილი** – №15, №16, №18.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. $\frac{2}{15}\pi$.

სავ.№2. $\frac{1}{16}\pi$.

სავ.№3. ა) π; ბ) 4π.

სავ.№4. ა) I; ბ) I I; გ) I I; დ) I I I; ე) IV.

სავ.№5. $\sin 4 < 0,\ \cos 1,5 > 0,\ \tan 0,3 > 0$.

სავ.№6. $\frac{2\pi}{9}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{9}.$

სავ.№7. ა) ყველა დადებითია; ბ) პირველი სამი უარყოფითია, დანარჩენი – დადებითი;
გ) პირველი სამი უარყოფითია, დანარჩენი – დადებითი.

სავ.№8. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)>0; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)>0; \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)>0; \quad \cos(\pi-\alpha)<0;$

$\tan(\pi+\alpha)>0; \quad \tan(2\pi-\alpha)<0.$

სავ.№9. $12^\circ, 36^\circ, 132^\circ.$

სავ.№10. $\frac{2\pi}{15}, \quad \frac{2\pi}{5}, \quad \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}.$

სავ.№11. ა) თითოეული $\frac{\pi}{3}$; ბ) თითოეული $\frac{\pi}{2}$; გ) თითოეული $\frac{2\pi}{3}$.

სავ.№12. ა) 0; ბ) 13; გ) $\sqrt{2}+3$; დ) -2.

სავ.№13. ა) $2a-a^2$; ბ) $b\sqrt{2}-a$; გ) $b\sqrt{2}-3\sqrt{3}a+a$; დ) $\frac{a+b}{a-b}$.

სავ.№14. ა) $\sin1^\circ < \sin1$; ბ) $\sin0,5 < \sin0,6$; გ) $\sin6^\circ > \sin6$;

დ) $\cos0,8 > \cos0,9$; ე) $\cos60^\circ < \cos\frac{\pi}{6}$; ვ) $\cos30^\circ > \cos3$.

სავ.№15. ა) $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$, ბ) $\alpha=2\pi k, \quad k\in Z$, გ) $\alpha=\pi k, k\in Z$.

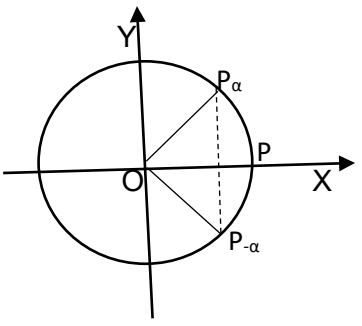
სავ.№16. ანიმ.

სავ.№17. ა) $\sin0,5<\sin\frac{\pi}{6}\Rightarrow \sin0,5<0,5$; ბ) $\cos0,5>\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow \cos0,5>0,5$;

გ) $\tan1>\tan\frac{\pi}{4}\Rightarrow \tan1>1$. სექტორის რადიუსია 12 სმ.

სავ.№18. პროპორციით: 2π რადიანს შეესაბამება πr^2 ფართობი, ამიტომ α რადიანს –

$$\frac{1}{2}\alpha r^2 \Rightarrow \frac{r^2}{4}=36 \Rightarrow r=12 \text{ სმ}.$$



სავ.№19. ერთეულოვან წრეწირზე ავიღოთ რაიმე წერტილი. ამ წერტილიდან აბცისთა ღერძზე დავუშვათ მართობი და ეს მართობი გავაგრძელოთ წრეწირთან გადაკვეთამდე.

მივიღებთ ქორდას. ცენტრიდან ქორდისადმი გავლებული მართობი ქორდასაც და მის მიერ მოჭიმულ რკალსაც შუაზე ჰყოფს, ამიტომ ქორდის ერთი ბოლო წერტილი თუ არის P_α, მეორე ბოლო წერტილი იქნება აბცისათა ღერძის მიმართ მისი სიმეტრიული $P_{-\alpha}$ წერტილი. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

სავ.№24. ა) a; ბ) -a; გ) -a; დ) a.

1.6 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები (3 სთ)

მიზანი:

- რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების გაცნობა და ერთეულოვანი წრეწირის საშუალებით დასაბუთება;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების ტრიგონომეტრიულ გამოსახულებათა გამარტივებასა და გამოთვლაში გამოყენება.

გაკვეთილის სტრუქტურა

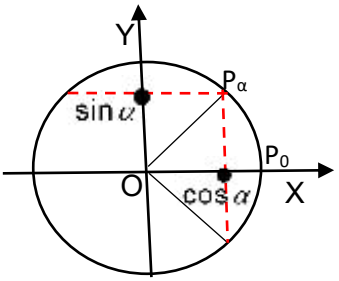
გაკვეთილის მსვლელობის ეტაპები		დავალებები, რომლებიც დაგეგმილი მიზნის მიღწევამდე მიგვიყვანს
1	**ორგანიზაციული ეტაპი**	მოსწავლეთა დასწრების შემოწმება; მოსწავლეთა განწყობის შექმნა გაკვეთილის მოსასმენად.
2	**საშინაო დავალების შემოწმება**	მასწავლებელი დავალებას შერჩევით ამოწმებს სათანადო კომენტარებით. საჭიროებისას, ინტერესის გამოხატვის შემთხვევაში, მოსწავლეები დაფაზე ხსნიან დავალებას შეცვლილი რიცხვითი მონაცემებით.
3	**მიზნისა და შედეგის დაგეგმვა**	მასწავლებელი მოსწავლეებს აცნობს გაკვეთილის მიზანსა და გეგმას.
4	**წინარე ცოდნის გააქტიურება** **გაკვეთილის თემის გაცნობა.**	**1-ელი გაკვეთილი** მასწავლებელი: – გამოიყენეთ ტერმინი „ფუნქცია“ და მითხარით, რა დავწერე. $y = 3x + 4;\quad y = 3x^2 + 4x + 7.$ (პირველი არის წრფივი ფუნქცია, ხოლო მეორე – კვადრატული.) – ჩამოაყალიბეთ წრფივი ფუნქციის თვისებები. – ვინ გაიხსენებს კვადრატული ფუნქციის თვისებებს?

		– ახლა რომელ ფუნქციებს ვსწავლობთ? – ვინ მიხვდა, რა არის ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის თემა? (ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებები) **მე-2 გაკვეთილი** . მასწავლებელი: – უპასუხეთ კითხვებს: 1) როგორ ფუნქციას ჰქვია ლუწი? კენტი? 2) ლუწია თუ კენტი: სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი? 3) ლუწია თუ კენტი ფუნქცია: $y = \frac{1}{\sin x}$? $y = 2\cos x$? $y = \tan 3x$? 4) რომელ მეოთხედებში აქვს ერთნაირი ნიშნები: ა) სინუსსა და კოსინუსს? ბ) სინუსსა და ტანგენსს? გ) კოსინუსსა და ტანგენსს? 5) რა მნიშვნელობებს იღებს გამოსახულება: ა) $1+\sin^2\beta$? ბ) $1-\cos^2\beta$? **მე-3 გაკვეთილი** მასწავლებელი: – უპასუხეთ კითხვებს: 1) როგორ ფუნქციას ჰქვია პერიოდული? 2) რა არის სინუსის უმცირესი პერიოდი? კოსინუსის? ტანგენსის? 3) ლუწი იქნება თუ კენტი: ა) ორი ლუწი ფუნქციის ჯამი? მოიყვანეთ მაგალითი. 4) ლუწი იქნება თუ კენტი: ა) ორი კენტი ფუნქციის ჯამი? მოიყვანეთ მაგალითი. 5) ლუწი იქნება თუ კენტი: ა) ერთი კენტი და ერთი ლუწი ფუნქციის ჯამი? მოიყვანეთ მაგალითი.
5	**შეძენილი ცოდნის განმტკიცება**	**1-ელი გაკვეთილი**: №1, №11, №14 სავარჯიშოები. **მე-2 გაკვეთილი** –№3, №5, №13 სავარჯიშოები. **მე-3 გაკვეთილი** – №6, №8, №10 სავარჯიშოები.
6		

	დამოუკიდებელი სამუშაო	**მე-2 გაკვეთილი** **I ვარიანტი**: მოცემულია ფუნქცია $f(x)=0,5\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. დაადგინე ფუნქციის: ა) მნიშვნელობათა სიმრავლე; ბ) ლუწობა და კენტობა. **II ვარიანტი**: მოცემულის ფუნქცია $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. დაადგინე ფუნქციის: ა) მნიშვნელობათა სიმრავლე; ბ) ლუწობა და კენტობა. **მე-3 გაკვეთილი** **I ვარიანტი**: მოცემულია ფუნქცია: $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$. ჩამოაყალიბე მისი თვისებები. **II ვარიანტი**: მოცემულია ფუნქცია: $f(x)=2\cos x$. ჩამოაყალიბე მისი თვისებები.
7	**რეფლექსია**	1) რა მნიშვნელობების მიღება შეუძლია სინუსს? კოსინუსს? ტანგენსს? 2) რა იქნება $\sin\alpha+\cos\alpha$ გამოსახულების უდიდესი მნიშვნელობა? უმცირესი? 3) რა ნიშნები ექნება $\sin\alpha$-ს, $\cos\alpha$-სა და $\tan\alpha$-ს, თუ P_α ეკუთვნის: ა) პირველ საკოორდინატო მეოთხედს? ბ) მეორე საკოორდინატო მეოთხედს? გ) მესამე საკოორდინატო მეოთხედს? დ) მეოთხე საკოორდინატო მეოთხედს? 4) ჭეშმარიტია თუ არა უტოლობა: ა) $\sin\alpha>1$? ბ) $\sin\alpha<-1$? გ) $\lvert\sin\alpha\rvert\le 1$? 5) ჭეშმარიტია თუ არა უტოლობა: ა) $\cos\alpha>1$? ბ) $\cos\alpha<-1$? გ) $\lvert\cos\alpha\rvert\le 1$? 6) დაასახელე α კუთხის რომელიმე მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ფორმულას არა აქვს აზრი. პასუხი ახსენი.

		7)რას ეწოდება ნიშანმუდმივობის შუალედები?
8	**ინფორმაცია საშინაო დავალების შესახებ**	**1-ელი გაკვეთილი** – №2, №12 სავარჯიშოები. **მე-2 გაკვეთილი** – №4, №14, №15 სავარჯიშოები. **მე-3 გაკვეთილი** – №7, №9, №15 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:



სავ.№1. ა); $\sin 2{,}5\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; ბ) $\sin 5\pi = 0$; გ) $\sin(-2{,}5\pi) = -1$; დ) $\sin 20\pi = 0$;

ე) $\sin\frac{7\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ვ) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ზ) $\cos 4{,}5\pi = 0$; თ) $\cos(-4{,}5\pi) = 0$;

ი) $\cos\frac{13\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; კ) $\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ლ) $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$; მ) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; ნ) $\tan 3\pi = 0$;

ო) $\tan\frac{5\pi}{4} = 1$; პ) $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -1$; ჟ) $\tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$; რ) $\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$; ს) $\tan\frac{19\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

სავ.№2. ა) მოცემული ფუნქციისათვის განსაზღვრის არედან აღებული ყოველი x არგუმენტისათვის $-x$ ეკუთვნის განსაზღვრის არეს და

$f(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) = -x^3 - \sin x = -(x^3 + \sin x) = -f(x)$, ამიტომ ფუნქცია კენტია;

ბ) $y = 2\cos x + \sin^2 x$ ფუნქცია ლუწია; გ) $y = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$ ფუნქცია კენტია;

დ) $y = \frac{1 + 2\sin x}{1 - 2\cos x}$ ფუნქცია არც ლუწია, არც კენტი.

სავ.№3. ა) $y = x - \sin x$ ფუნქცია არაა პერიოდული;

ბ) $y = 2\cos x + \sin x$ ფუნქცია პერიოდულია, პერიოდით 2π;

გ) $y = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ ფუნქცია პერიოდულია , პერიოდით π;

დ) $y = \frac{2 - \sin x}{1 + 2\cos x}$ ფუნქცია პერიოდულია, პერიოდით 2π.

სავ.№4. ა) $\frac{2\pi}{5}$; ბ) $\frac{\pi}{2}$; გ) $\frac{\pi}{3}$; დ) 4π; ე) $\frac{\pi}{2}$; ვ) 2π.

სავ.№5. ა) $\frac{2\pi}{7}$; ბ) $\frac{3\pi}{2}$; გ) 6π.

სავ.№6. როცა $\pi<\alpha<1{,}5\pi$ მაშინ $\cos\alpha$ უარყოფითია, ამასთან,

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,\quad \sin^2\alpha=\frac{25}{169}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{144}{169}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{12}{13},\ \tan\alpha=\frac{-5}{13}:\frac{-12}{13}=\frac{5}{12}.$$

სავ.№8. რადგან $0{,}5\pi<\alpha<\pi$ და $\tan\alpha=-1$, ამიტომ $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, მაშინ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ და $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

სავ.№9. $\cos\alpha=\sin\alpha:\tan\alpha<0$, ამიტომ $\cos\alpha=-\sqrt{1-0{,}16}=-\sqrt{\frac{21}{25}}=-\frac{\sqrt{21}}{5}$.

სავ.№10. $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{16}$.

სავ.№11. ა) $-1\le\sin x\le1\Rightarrow-2\le2\sin x\le2\Rightarrow-2-1\le2\sin x-1\le2-1$ ე.ი. ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-3;1]$; ბ) $[-1;0]$; გ) $[-1;2]$; დ) $[0;+\infty)$.

სავ.№12. ა) $1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha$;

ბ) $\sin\alpha-\cos\alpha\tan\alpha=\sin\alpha-\cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sin\alpha-\sin\alpha=0$; გ) $\sin^2\alpha$; დ) 1;

ე) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha$; ვ) $\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1-\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{1+\sin\alpha}=1-\sin\alpha$;

ზ) $1+\cos\alpha$; თ) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha$.

სავ.№13. ა) 2π; ბ) π; გ) π; დ) π; ე) $\frac{2\pi}{3}$; ვ) 12π; ზ) π; თ) 12π.

სავ.№14. $y=(\sin x-1)^2$, $-2\le\sin x-1\le0\Rightarrow0\le(\sin x-1)^2\le4\Rightarrow0\le y\le4$.

სავ.№15. ა) სინუსი; ბ) ტანგენსი; გ) კოსინუსი.

სავ.№16. ა) a; ბ) b; გ) $\frac{1}{c}$.

1.7 დაყვანის ფორმულები (2 სთ)

მიზანი:

- დაყვანის ფორმულების გამოყვანა და ერთეულოვან წრეწირზე დემონსტრირება;
- დაყვანის ფორმულების ტრიგონომეტრიული გამოსახულების გამარტივებასა და მნიშვნელობათა გამოსათვლელად გამოყენება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$; ბ) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$; გ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$;

დ) $\cos(3\pi+\alpha)=-\cos\alpha$; ე) $\tan(3{,}5\pi+\alpha)=-\frac{1}{\tan\alpha}$; ვ) $\tan(3\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.

სავ.№2. ა) $\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$; ბ) $\sin(270^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$; გ) $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$;

დ) $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$; ე) $\tan(360^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$.

სავ.№3. ა) $\sin(\alpha+90^\circ)=\cos\alpha$; ბ) $\cos(\alpha-\pi)=-\cos\alpha$; გ) $\tan(\alpha-360^\circ)=\tan\alpha$;

დ) $\sin^2(\alpha-\pi)=\sin^2\alpha$; ე) $\tan^2(\alpha-270^\circ)=\frac{1}{\tan^2\alpha}$.

სავ.№4. $-\tan\alpha$.

სავ.№5. ა) $\sin 0{,}2\pi$; ბ) $-\cos 0{,}1\pi$; გ) $\tan 4{,}7\pi=\frac{1}{-\tan 0{,}2\pi}$; დ) $-\tan 0{,}2\pi$.

სავ.№6. ა) $\cos 35^\circ;\ \sin 25^\circ;\ -\cos 22^\circ$; ბ) $\sin 35^\circ;\ -\sin 16^\circ;\ -\sin 5^\circ$; გ)

$-\tan 31^\circ;\ \tan 41^\circ;\ -\tan 17^\circ$.

სავ.№7. ა) $60^\circ, 120^\circ$; ბ) $225^\circ, 315^\circ$; გ) 270°.

სავ.№8. ა) $\frac{\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}$; ბ) $\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}$; გ) π.

სავ.№9. ა) $\frac{\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}$; ბ) $0;\ \pi$; გ) $\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}$.

სავ.№10. ა) $\cos\alpha$; ბ) $-\frac{1}{\cos\alpha}$; გ) $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$; დ) $\cos\alpha$; ე) 0; ვ) $-\cos\alpha$; ზ) $\sin\alpha+\cos\alpha$; თ)

$-\sin^2\alpha$.

სავ.№11. ა) $-\sin\alpha\cos\alpha$; ბ) $\cos^2\alpha$; გ) $2\cos\alpha$; დ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

სავ.№12. ა) -6; ბ) $2\sqrt{3}$; გ) $1+\sqrt{3}$; დ) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$; ე) $-\frac{6+\sqrt{6}}{6}$.

სავ.№13. ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) 1; გ) 0.

სავ.№14. ა) $\frac{\cos(180°-\alpha)\cdot\tan(90°-\alpha)\cdot\tan(180°-\alpha)}{\tan\alpha\cdot\sin(90°+\alpha)\cdot\tan(90°+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha\cdot\frac{1}{\tan\alpha}\cdot(-\tan\alpha)}{\tan\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{-\tan\alpha}}=-1$; ბ) $\frac{\sin50°}{2}$.

სავ.№15.

ა) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(3\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\sin(3\pi+\alpha)=-\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)+\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)=0$;

დ) $\sin(\alpha-\pi)+\tan(\alpha-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha+\tan\alpha+\sin\alpha=\tan\alpha$.

სავ.№16. ა) $\cos^2\frac{77\pi}{4}=\cos^2\left(19\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$; ბ) $\sin^2\left(7\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$;

გ) $\frac{1}{3}$.

სავ.№17. ა) 0,75; ბ) 0,25

სავ.№18. ა).

ბ) $1+\cos(7\pi+\alpha)+\cos(\alpha-4\pi)=1-\cos\alpha+\cos\alpha=1$.

გ) $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cdot\sin\alpha+\sin^2\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$;

დ) $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\cos\alpha\cdot\sin\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$.

სავ.№19. ა) $\sin207°=\sin(180°+27°)=-\sin27°=-a$; ბ) $\cos304°=\cos(270°+34°)=\sin34°=a$;

გ) $\tan106°=\frac{\sin(90°+16°)}{\cos(90°+16°)}=\frac{\cos16°}{-\sin16°}=-\frac{\sqrt{1-\sin^2 16°}}{\sin16°}=-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$;

დ) $\cos\alpha=-\cos(180°-\alpha)=-a$.

სავ.№20. ა) $\sin(45^\circ+\alpha)=\sin(90^\circ-(45^\circ-\alpha))=\cos(45^\circ-\alpha)$

ბ) $\cos(45^\circ+\alpha)=\cos(90^\circ-(45^\circ-\alpha))=\sin(45^\circ-\alpha)$;

გ) $\sin(60^\circ+\alpha)=\sin(90^\circ-(30^\circ-\alpha))=\cos(30^\circ-\alpha)$.

აბა, სცადე!

ა) $\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\ldots+\tan 160^\circ+\tan 180^\circ=$

$\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\tan 60^\circ+\tan 80^\circ+\tan 100^\circ+\tan 120^\circ+\tan 140^\circ+\tan 160^\circ+\tan 180^\circ=$

$=\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\tan 60^\circ+\tan 80^\circ-\tan 80^\circ-\tan 60^\circ-\tan 40^\circ-\tan 20^\circ=0;$

გ) $\tan 10^\circ\cdot\tan 20^\circ\cdot\tan 30^\circ\cdot\tan 40^\circ\cdot\tan 50^\circ\cdot\tan 60^\circ\cdot\tan 70^\circ\cdot\tan 80^\circ=.$

$$=\tan 10^\circ\cdot\tan 20^\circ\cdot\tan 30^\circ\cdot\tan 40^\circ\cdot\frac{1}{\tan 40^\circ\cdot\tan 30^\circ\cdot\tan 20^\circ\cdot\tan 0^\circ}=1.$$

პირველი თავის დამატებითი სავარჯიშოები (3 სთ)

მიზანი.

- პირველ თავში განვლილი მასალის გამეორება/განმტკიცება;
- ჯგუფური სამუშაოს ჩატარება და პრეზენტაცია;
- შემაჯამებელი სამუშაო.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ზ) 1; თ) 1.

სავ.№2. ა) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) -1.

სავ.№8. ა) 0; დ) -0,75.

სავ.№9. ა) მართკუთხა; ბ) მახვილკუთხა; გ) მახვილკუთხა; დ) ბლაგვკუთხა.

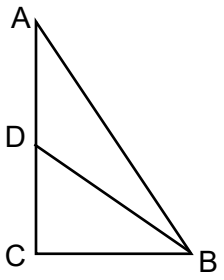
სავ.№10. ვწერთ პროპორციას: x:4=200:160. აქედან x=5მ.

სავ.№11. ვწერთ განტოლებას: $4m^2+36=2(9+16)$. აქედან, $m=\sqrt{3,5}$ სმ.

სავ.№12. $S_{AMN}=\frac{1}{2}AM\cdot AN\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB}{2}\cdot\frac{2AC}{3}\cdot\sin A=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=6$ სმ^2.

სავ.№13. $2R_1=\frac{AB}{\sin\angle AKB}=\frac{BC}{\sin(180^\circ-\angle BKC)}=\frac{BC}{\sin\angle BKC}=2R_2$.

სავ.№14. მოც: C=90°, AC=8სმ, BC =6, AD=4სმ.



უ.გ. ADB-ზე შემოხაზული წრის რადიუსი.

ამოხსნა: სინუსების თეორემით: 2R=DB:sinA=

$=\sqrt{52}:(CB:AB)=\ =\sqrt{52}:0{,}6=\frac{5\sqrt{52}}{3}$. პასუხი: $\frac{5\sqrt{13}}{3}$.

სავ.№15. ABC სამკუთხედში სინუსების თეორემით

$$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin\beta}=\frac{d}{\sin\left(180°-(\alpha+\beta)\right)}\Rightarrow AB=\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\ BC=\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\ .$$

სავ.№16. მსგავსი ამოცანა ამოხსნილი გვაქვს1.2 პარაგრაფში ტანგენსის გამოყენებით. შეგვიძლია იგივე ამოცანა ამოვხსნათ სინუსების თეორემით (იხ. წყვილებში სამუშაო, მთის სიმაღლის გამოთვლა).

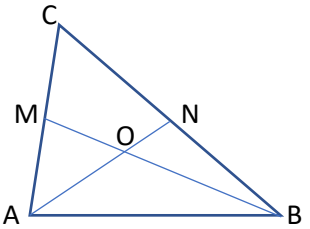
სავ.№17. სამკუთხედის გვერდის კვადრატი თუ დანარჩენი გვერდების კვადრატების ჯამის ტოლია, მაშინ ეს სამკუთხედი მართკუთხაა.

მართლაც, კოსინუსების თეორემით ამ გვერდის მოპირდაპირე კუთხის კოსინუსი იქნება 0-ის ტოლი, ე.ი. კუთხე იქნება მართი.

სავ.№18. ჯერ ABC სამკუთხედიდან ვიპოვით A კუთხის კოსინუსს, ხოლო შემდეგ ABD სამკუთხედიდან – BD გვერდს. პასუხი: $\sqrt{17\frac{5}{7}}$.

სავ.№20. მე-18 ამოცანის ანალოგიურია: ABC სამკუთხედიდან ვიპოვით B კუთხის კოსინუსს (0,5), ხოლო შემდეგ MBN სამკუთხედიდან – MN გვერდს. პასუხი: $2\sqrt{3}$ სმ.

სავ. №21. გვაქვს ორი შემთხვევა: თუ სიმაღლე სამკუთხედის შიგნითაა, მაშინ სამკუთხედის მესამე გვერდია 21 სმ, ხოლო თუ გარეთაა, მაშინ – 11 სმ. პასუხი: $\frac{16}{65}$ ან $\frac{56}{65}$.



სავ.№22. მიმართულებებს შორის 45-გრადუსიანი კუთხეა. ამიტომ, მანძილი გამოითვლება კოსინუსების თეორემით. პასუხი: $10\sqrt{41-20\sqrt{2}}$ კმ.

სავ.№23. $S_{ABC}=3S_{AOB}=$

$$=3\cdot\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\alpha=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2m_1}{3}\cdot\frac{2m_2}{3}\sin\alpha=\frac{2}{3}m_1m_2\sin\alpha.$$

შესაძლებელია?

დიხ, შესაძლებელია. მაგალითად, ასეთია მუდმივი ფუნქცია.

აბა, სცადე!

ერთი მხრივ, სამკუთხედის უტოლობით და მეორე მხრივ, კოსინუსების თეორემით მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} x + x + 1 > x + 2 \\ x^2 + (x+1)^2 < (x+2)^2 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3.$$

წყვილებში სამუშაო (პროექტი)

„პრაქტიკული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით“

მიზანი:

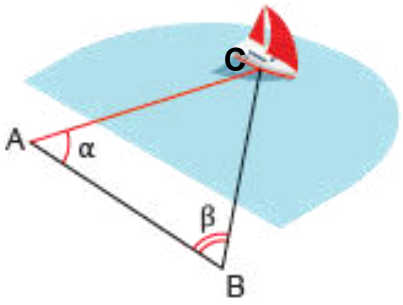
პროექტის განმავლობაში მოსწავლემ უნდა შეძლოს:

- ამოცანის პირობის დამოუკიდებლად გააზრება;
- მოცემული და საძიებელი სიდიდეების გამოყოფა;
- შესაბამისი ფორმულის/მეთოდის შერჩევა;
- ნახაზის ან სქემის გამოყენება;
- გამოთვლების სწორად შესრულება;
- მიღებული პასუხის საზომი ერთეულით ჩაწერა;
- მიღებული შედეგის რეალურ სიტუაციასთან დაკავშირება;
- საკუთარი ნაშრომ/ნააზრევის ახსნა და დასაბუთება.

დავალების პირველ ნაწილს ჯგუფი ასრულებს კლასში, მეორეს – სახლში.

მოვიყვანოთ 1-ელი დავალების შესრულების **ნიმუში**:

ა) გემამდე მანძილის გამოთვლა



მოცემულია: AB გვერდი და α და β კუთხეები. უნდა ვიპოვოთ AC.

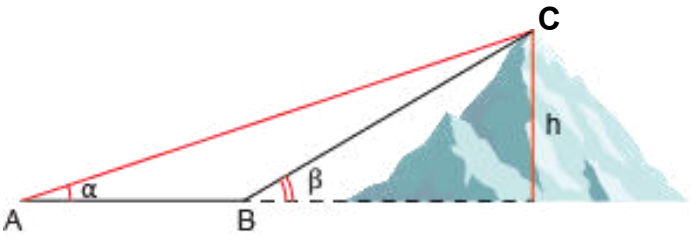
სინუსების თეორემისა და დაყვანის ფორმულების გამოყენებით გვაქვს: $AC = \frac{AB\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$

ბ) მთის სიმაღლის დადგენა

მოცემულია: AB გვერდი და α და β კუთხეები. უნდა ვიპოვოთ AC.

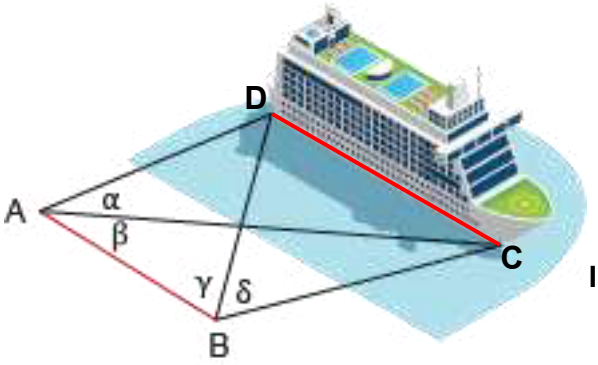
ABC სამკუთხედში სინუსების თეორემისა და დაყვანის ფორმულის გამოყენებით $AC = \frac{AB\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$, ხოლო მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$h = AC\sin\alpha = \frac{AB\sin\alpha\sin B}{\sin(\beta - \alpha)}$$



გ) გემის სიგრძის გამოთვლა

ამოცანის ამოხსნა დავყოთ სამ საფეხურად.



I. *ABD* სამკუთხედში სინუსების თეორემისა და დაყვანის ფორმულის გამოყენებით

$$AD = \frac{AB \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

II. *ABC* სამკუთხედში სინუსების თეორემისა და დაყვან ის ფორმულის გამოყენებით $AC = \frac{AB \cdot \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}$.

III. *ACD* სამკუთხედში კოსინუსების თეორემის გამოყენებით ვწერთ:

$$CD = \sqrt{AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC\cos\alpha}.$$

პროექტის შეფასება – 10 ქულა

1. სქემატური ნახაზის გააზრება – 2 ქულა.

2 ქულა – მოსწავლე სწორად კითხულობს სამივე სქემას, ამოიცნობს მოცემულ და საძიებელ სიდიდეებს და სწორად განსაზღვრავს, რა უნდა გაზომოს.

1 ქულა – ამოცანის ძირითად შინაარსს იგებს, თუმცა აქვს მცირე უზუსტობები.

0 ქულა – ვერ განსაზღვრავს სქემაზე მოცემულ და საძიებელ სიდიდეებს.

2. გაზომვის მეთოდის შერჩევა – 2 ქულა.

2 ქულა – თითოეული შემთხვევისათვის სწორად ირჩევს მანძილის ან სიმაღლის განსაზღვრის მეთოდს და ხსნის, რატომ არის ეს მეთოდი შესაფერისი.

1 ქულა – მეთოდს ძირითადად სწორად ირჩევს, მაგრამ ახსნა არასრულია.

0 ქულა – ვერ ირჩევს შესაბამის მეთოდს.

3. მათემატიკური ცოდნის გამოყენება – 2 ქულა

2 ქულა – სწორად იყენებს შესაბამის გეომეტრიულ დამოკიდებულებებს, პროპორციებს,

მსგავს სამკუთხედებს ან ტრიგონომეტრიულ ფორმულებს და სწორად ასრულებს გამოთვლებს.

1 ქულა – მეთოდი სწორია, მაგრამ გამოთვლებში ან ფორმულების გამოყენებაში აქვს შეცდომა.

0 ქულა – ვერ იყენებს შესაბამის მათემატიკურ ცოდნას.

4. სამივე პრაქტიკული ამოცანის შესრულება – 2 ქულა

2 ქულა – სწორად ასრულებს სამივე გაზომვას.

1 ქულა – სწორად ასრულებს ორ ამოცანას.

0 ქულა – ვერ ასრულებს ან მხოლოდ ფრაგმენტულად ასრულებს ამოცანებს.

5. დასკვნა და შედეგების წარმოდგენა – 2 ქულა

2 ქულა – შედეგებს წარმოადგენს ნათლად და თანმიმდევრულად, მიუთითებს მიღებულ სიდიდეებს და აკეთებს დასაბუთებულ დასკვნას იმის შესახებ, როგორ შეიძლება მიუწვდომელი მანძილისა და სიმაღლის პრაქტიკული განსაზღვრა.

1 ქულა – შედეგები წარმოდგენილია, მაგრამ დასკვნა არასრულია ან ნაკლებად დასაბუთებულია.

0 ქულა – არ არის წარმოდგენილი შედეგები და დასკვნა.

გამოყენებული შეფასების მაჩვენებელი:

2 ქულა – მაღალი დონე;

1 ქულა – საშუალო დონე;

0 ქულა – საჭიროებს გაუმჯობესებას.

საბოლოო შეფასება:

9 – 10 ქულა – ძალიან კარგი

7 – 8 ქულა – კარგი

5 – 6 ქულა – დამაკმაყოფილებელი

0 – 4 ქულა – საჭიროებს გაუმჯობესებას.

აბა, სცადე!

ორივე შემთხვევაში საფეხურები ტექსტში მოცემულის ანალოგიურია.

სასურველია, მოსწავლეებმა ტექსტში მოცემული ამოცანები ამოხსნან კონკრეტული რიცხვითი მონაცემების შემთხვევაში.

შემაჯამებელი სამუშაო № 1

ტრიგონომეტრია

I ვარიანტი

1. გამოთვალე:

ა) $\sin 30^\circ - \tan 60^\circ + 2\cos 30^\circ$; ბ) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha)\cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)\cdot \tan\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$.

2. იპოვე $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ და $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

3. გამოთვალე ABC სამკუთხედის AB გვერდი, თუ BC =5სმ, AC =8სმ, ხოლო $\angle C = 60^\circ$.

4. გამოთვალე ABC სამკუთხედის უმცირესი გვერდი, თუ $\angle A = 105^\circ, \angle B = 45^\circ$, ხოლო შემოხაზული წრის დიამეტრი 10 სმ.

5. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 25სმ-ია, ხოლო ერთ-ერთი მახვილი კუთხის სინუსი 0,28. გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი.

II ვარიანტი

1. გამოთვალე:

ა) $4\sin 30^\circ\cos 60^\circ + \tan 45^\circ$; ბ) $\dfrac{\sin(180^\circ - \alpha)\cdot \tan(90^\circ - \alpha)}{\cos(270^\circ - \alpha)\cdot \tan(270^\circ + \alpha)}$.

2. იპოვე $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ და $0{,}5\pi < \alpha < \pi$.

3. გამოთვალე ABC სამკუთხედის BC გვერდი, თუ AB =8 სმ, AC =5სმ, ხოლო $\angle A = 60^\circ$.

4. გამოთვალე ABC სამკუთხედის უდიდესი გვერდი, თუ $\angle A = 25^\circ, \angle B = 35^\circ$, ხოლო შემოხაზული წრის რადიუსი $10\sqrt{3}$ სმ.

5. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 15სმ-ია, ხოლო ერთ-ერთი მახვილი კუთხის სინუსი 0,8. გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი.

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების ნიმუში:

1. თითოეულ პასუხში (0,5 და -1) თითო ქულა;
სულ 2 ქულა.

2. გამოთვალა ერთ-ერთის მნიშვნელობა------ – 1ქულა;
გამოთვალა ორივეს მნიშვნელობა $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ - 2 ქულა.
სულ 2 ქულა.

3. დაწერა კოსინუსების თეორემა –1 ქულა;
გამოთვალა გვერდი (7სმ) –------ 2 ქულა;
სულ 2 ქულა.

4. გამოთვალა მესამე კუთხე ან დაწერა ფორმულა — 1ქულა;
გამოთვალა გვერდი (5სმ) ---------- - 2 ქულა;
სულ 2 ქულა.

5. გამოთვალა ერთ-ერთი კათეტი – 1 ქულა;
გამოთვალა ფართობი (84 სმ^2) ----2 ქულა;
სულ 2 ქულა.

II ვარიანტის განმავითარებლი შეფასების ნიმუში

დავალება 1. საჭიროა მეტი ყურადღება მიექცეს განსაკუთრებული კუთხეების (30°, 45°) ტრიგონომეტრიული მნიშვნელობებისა და დაყვანის ფორმულების სწორად გამოყენებას. სასურველია, მოსწავლემ კიდევ ერთხელ გაიმეოროს ძირითადი ფორმულები და მათი გამოყენების პირობები.

დავალება 2. ამოცანის ამოხსნისას მნიშვნელოვანია ტანგენსის მოცემული მნიშვნელობიდან სინუსისა და კოსინუსის პოვნის თანმიმდევრული შესრულება.

განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს პირობას: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, რადგან იგი განსაზღვრავს კუთხის მდებარეობას და, შესაბამისად, სინუსისა და კოსინუსის ნიშნებს.

დავალება 3. მოსწავლემ უნდა შეძლოს კოსინუსების თეორემის სწორად შერჩევა და გამოყენება, რადგან მოცემულია ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე. საჭიროა ფორმულის სწორად ჩაწერა, მონაცემების ჩანაცვლება და გამოთვლების გადამოწმება.
დავალება 4. ამოცანის სწორად შესრულებისათვის მნიშვნელოვანია მიღებული გვერდების შედარება და იმის დასაბუთება, რომელი მათგანია უდიდესი. ყურადღება უნდა მიექცეს არა მხოლოდ გამოთვლას, არამედ საბოლოო დასკვნის მკაფიოდ ჩამოყალიბებას.
დავალება 5. მოსწავლემ უნდა შეძლოს მართკუთხა სამკუთხედში სინუსის გამოყენებით შესაბამისი კათეტის პოვნა და შემდეგ სამკუთხედის ფართობის გამოთვლა. სასურველია, ამოხსნა წარმოადგინოს ეტაპობრივად და დაასახელოს თითოეული გამოყენებული სიდიდე.

რა გამოუვიდა მოსწავლეს?

- იცნობს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს და მათ ძირითად მნიშვნელობებს;
- შეუძლია შესაბამისი ფორმულის შერჩევა;
- ცდილობს ტრიგონომეტრიული ცოდნის გამოყენებას გეომეტრიულ ამოცანებში;
- შეუძლია მიღებული შედეგის გამოყენება შემდგომი გამოთვლისთვის.

რა არის გასაუმჯობესებელი?

- დაყვანის ფორმულების გამოყენების სიზუსტე;
- კუთხის მეოთხედის გათვალისწინება და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნების განსაზღვრა;
- კოსინუსების თეორემის სწორად გამოყენება;
- ამოხსნის ეტაპების თანმიმდევრული და მკაფიო ჩაწერა;
- საბოლოო პასუხის გადამოწმება.

რეკომენდაცია მოსწავლეს

შემდეგი სამუშაოსთვის გირჩევ, კიდევ ერთხელ გაიმეორო განსაკუთრებული კუთხეების ტრიგონომეტრიული მნიშველობები, დაყვანის ფორმულები, კოსინუსების თეორემა და მართკუთხა სამკუთხედში სინუსის გამოყენება. ამოცანის ამოხსნის წინ ყოველთვის გამოყავი მოცემული, საძიებელი და შესაბამისი ფორმულა. ეს დაგეხმარება როგორც გამოთვლების სიზუსტის, ისე ამოხსნის ლოგიკური თანმიმდევრობის გაუმჯობესებაში.

ცხადია, მასწავლებელი წარმოდგენილ შეფასების ნიმუშს მოარგებს თითოეული მოსწავლის ნამუშევარს.

თავი 2. სტერეომეტრიის საწყისები

თავის მიზანია მოსწავლემ შეძლოს:

- სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებების დახასიათება;
- სივრცეში მდებარე ორი წრფის ურთიერთგანლაგების შემთხვევათა განხილვა, დახასიათება და დემონსტრირება;
- ორ წრფეს შორის კუთხის განსაზღვრა და დემონსტრირება;
- წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის შემთხვევათა განხილვა, დახასიათება და დემონსტრირება;
- წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის განსაზღვრა და დემონსტრირება;
- წრფისა და სიბრტყის პარალელურობისა და მართობულობის ნიშნების ჩამოყალიბება, დასაბუთება და დემონსტრირება;
- სამი მართობის თეორემის ჩამოყალიბება, დასაბუთება და გამოყენება;
- ორი სიბრტყის ურთიერთმდებარეობის შემთხვევათა განხილვა, დახასიათება და დემონსტრირება;
- ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის განმარტება და აგება;
- ორ სიბრტყეს შორის კუთხის გაზომვა;
- სტერეომეტრიული ცნებებისა და დებულებების პრაქტიკული ამოცანების გადასაჭრელად გამოყენება.

2.1 წრფეები და სიბრტყეები სივრცეში (2 სთ)

მიზანი:

- წერტილების, წრფეებისა და სიბრტყეების ურთიერთგანლაგება სივრცეში;
- აცდენილი წრფეებისა და მათ შორის კუთხის ცნების, მისი გაზომვის წესის გაცნობა და გამოყენება;
- წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშნის გაცნობა;
- სიბრტყეთა პარალელურობის ნიშნის გაცნობა;
- სივრცული აზროვნების, ანალიზის, დაკვირვებისა და დასკვნის ჩამოყალიბების უნარის განვითარება;
- ამოცანების ამოხსნა.

რესურსი:

- მოდელები: წრფის, სიბრტყის, გადამკვეთი სიბრტყეების, გეომეტრიული

- სხეულების;
- გარემომცველ სამყაროში არსებული გეომეტრიული სხეულების ფოტოები.

პირველი გაკვეთილი

გაკვეთილის ჩატარების გეგმის ნიმუში:

გაკვეთილის დასაწყისში უნდა შევახსენოთ და ვესაუბროთ იმის შესახებ, რომ:

- გეომეტრიის სასკოლო კურსი ორი ნაწილისაგან შედგება. ესენია: პლანიმეტრია და სტერეომეტრია.
- პლანიმეტრია შეისწავლის გეომეტრიულ ფიგურებს სიბრტყეზე, ხოლო სტერეომეტრია – სივრცეში.
- სივრცის ძირითადი ცნებებია: წერტილი, წრფე და სიბრტყე. მსჯელობენ მათი ნახაზის შესრულებასა და წაკითხვაზე.

სივრცის ფიგურების თვისებებს აყალიბებენ აქსიომების სახით;

აჩვენებს გეომეტრიული სხეულების მოდელებს (კუბი, პარალელეპიპედი, პირამიდა, ბირთვი, ცილინდრი და სხვ.) მოსწავლეები დაასახელებენ სხეულებს გარემომცველ სამყაროში. მასწავლებელი აჩვენებს შესაბამის ფოტოებს.

გაკვეთილის მსვლელობისას, აქსიომებზე მუშაობისას ასრულებენ დასახელებული ფიგურების ნახაზებს დაფაზე და რვეულებში.

გაკვეთილის მიმდინარეობა ეყრდნობა სახელმძღვანელოს ტექსტს. მუშაობენ აქსიომებზე, მათ შედეგებსა და ამოცანებზე.

სასურველია, მასწავლებელმა ნახაზებში გამოიყენოს ფერები და ცალკეული ელემენტები გამოყოს დანარჩენებისაგან.

კლასში მუშაობენ: ძირითადი ტექსტის ამოცანისა და №2, №4, №5, №8,№11 სავარჯიშოების ამოხსნაზე.

დამოუკიდებელი სამუშაო:

I ვარიანტი – №6 სავარჯიშო;

II ვარიანტი – №7 სავარჯიშო.

რეფლექსია, შედეგების შეჯამება

საშინაო დავალება

№1, №3, №9 და №10 სავარჯიშოები.

მეორე გაკვეთილი

მიზანი: ცოდნის გაღრმავება თემაზე: წრფისა და სიბრტყის განლაგება სივრცეში.

რესურსი:

- კარნახის მასალა;
- კითხვები წინარე ცოდნის გასააქტიურებლად;
- დასარიგებელი ბარათები.

I. ორგანიზაციული ეტაპი, საშინაო დავალების შემოწმება.

საჭირო შემთხვევაში, სავარჯიშოს, რომელიც ვერ ამოხსნა მოსწავლემ, ხსნიან დაფაზე. მასწავლებელი ყურადღებას აქცევს, თუ როგორ გაიგო ეს საკითხი დაინტერესებულმა მოსწავლემ. უმჯობესია, მოცემული დავალების მსგავსით შეცვლა და დაფაზე ამოხსნა, რათა დანარჩენი მოსწავლეებიც ჩაერთონ.

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება.

ა) კითხვებზე პასუხის გაცემა

- რას შეისწავლის სტერეომეტრია?
- რით განსხვავდება ქაღალდის ფურცელი ქაღალდის ყუთისაგან?
- რომელია სივრცის ძირითადი ფიგურები?
- წერტილის რა მაგალითს შემოგვთავაზებთ? (ნემსის ჩხვლეტის კვალი, ფურცელზე ფანქრის წვერის ჩხვლეტით დატოვებული კვალი და სხვ.)
- წრფის მაგალითად რას დაასახელებთ? (გაჭიმული უსასრულო სიგრძის ძაფი)
- სიბრტყის მაგალითად რას დაასახელებთ? (სწორი უსასრულო ზედაპირი)
- რა არის აქსიომა?
- რომელ სტერეომეტრიულ აქსიომებს იცნობთ? ჩამოაყალიბეთ.
- იცით რა არის ჯორკო? ჯორკოზე დაჯდომის გეშინიათ, რომ არ წაიქცეს? (არ გვეშინია) რატომ არ წაიქცევა ჯორკო, რატომაა საიმედო? (სამ ფეხზე დგა და არასოდეს ყანყალებს)
- გეომეტრიის რომელ აქსიომას გახსენებთ ჯორკო? (სამ წერტილზე შეიძლება მხოლოდ ერთი სიბრტყის გავლება)
- თუ ფანქარს მაგიდაზე ისე დავდებთ, რომ მისი ორივე ბოლო მაგიდაზე იდოს, შეეხება თუ არა ფანქრის შუანაწილი მაგიდას? რატომ? (თუ წრფის ორი წერტილი ძევს სიბრტყეში, მაშინ მთელი წრფე ძევს ამ სიბრტყეში)

- თუ ორ ფურცელს ერთმანეთთთან ისე დავდებთ, რომ მათ კუთხე შექმნან, მაშინ რომელი გეომეტრიული ფიგურა იქნება მათთვის საერთო? (წრფე, რადგან ორი სიბრტყის გადაკვეთით ყოველთვის წრფე მიიღება)
- შეგიძლიათ მაჩვენოთ ორი სიბრტყის კვეთა საკლასო ოთახში? (კედლების კვეთის ხაზი, გადაკეცილი ფურცელი და სხვ.)
- რომელ სტერეომეტრიულ ფიგურას იცნობთ? (აჩვენებენ მოდელებს)

ბ) პრაქტიკული მუშაობა

(ერთი მოსწავლე დაფაზე მუშაობს, დანარჩენები – დამოუკიდებლად)

- მონიშნეთ M წერტილი, რომელიც არ ეკუთვნის a წრფეს და N წერტილი, რომელიც ეკუთვნის a წრფეს. შეასრულეთ შესაბამისი მათემატიკური ჩანაწერი.
- დახაზეთ AB მონაკვეთი, რომელიც ეკუთვნის β სიბრტყეს და N წერტილი, რომელიც ეკუთვნის β სიბრტყეს და არ ეკუთვნის AB მონაკვეთს. შეასრულეთ შესაბამისი მათემატიკური ჩანაწერი.
- დახაზეთ γ სიბრტყის გადამკვეთი b წრფე.

გ) კარნახი (მე-2 გაკვეთილზე წინარე ცოდნის გააქტიურების ეტაპზე)

1) დაასახელე გეომეტრიის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის ფიგურებს სივრცეში.
2) რამდენი სიბრტყის გავლებაა შესაძლებელი ერთ წრფეზე?
3) რამდენი სიბრტყის გავლებაა შესაძლებელი ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილზე?
4) რამდენი სიბრტყის გავლებაა შესაძლებელი წრფესა და მის გარეთ აღებულ წერტილზე?
5) შესაძლებელია, რომ წრფესა და სიბრტყეს ჰქონდეს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი?
6) ჩაწერე მათემატიკურ ენაზე: „M წერტილი ეკუთვნის α სიბრტყეს.“
7) ჩაწერე მათემატიკურ ენაზე: „a წრფე კვეთს α სიბრტყეს.“
8) რომელი სიბრტყის პარალელურია კუბის ერთ-ერთი წახნაგის დიაგონალი?
9) რამდენი საერთო წერტილი შეიძლება ჰქონდეს სიბრტყესა და წრფეს? (ერთი, არცერთი ან უამრავი)
10) საგნის მიწაზე მყარად დგომა მიიღწევა, როცა ის სამ საყრდენზე დგა. რა პირობა მოეთხოვება საყრდენებს? (ერთ წრფეზე არ უნდა იყოს განლაგებული.)

III. განმტკიცება. ამოცანების ამოხსნა

მუშაობენ №11, №12, №13, №17 ამოცანების ამოხსნაზე.

დამატებითი ამოცანა. ერთ წერტილზე გადის სამი წრფე, რომელიც ერთ სიბრტყეში არ თავსდება. რამდენი განსხვავებული სიბრტყის გავლებაა შესაძლებელი წყვილ-წყვილად აღებულ ამ წრფეებზე? პასუხი დაასაბუთეთ.

(მოსწავლის მიერ პასუხის დასაბუთების შემდეგ) – რომელი პირობის შეცვლისას აღარ იმუშავებს ეს დასკვნა?

IV. დამოუკიდებელი სამუშაო (დასარიგებელი ბარათებით)

I ვარიანტი

მოცემულია $MABC$ ტეტრაედრი, რომლის ყოველი წიბო 6 სმ-ის სიგრძისაა.

$$D \in MB,\ E \in MC,\ F \in AB,\ AF = FB,\ P \in MA.$$

ა) დაასახელე წრფე, რომელზეც MAB და MFC სიბრტყეები კვეთენ ერთმანეთს;

ბ) გამოთვალე CF მონაკვეთის სიგრძე და ABC სამკუთხედის ფართობი.

გ) დაასახელე ფიგურა, რომელიც მიიღება DE წრფისა და ABC სიბრტყის გადაკვეთით.

II ვარიანტი

მოცემულია $SABC$ ტეტრაედრი, რომლის ყოველი წიბო 8 სმ-ის სიგრძისაა.

$$AF = FB,\ P \in SA,\ D \in SB,\ E \in SC,\ F \in AB.$$

ა) დაასახელე წრფე, რომელზეც ABS და FCS სიბრტყეები კვეთენ ერთმანეთს;

ბ) გამოთვალე CF მონაკვეთის სიგრძე და ABC სამკუთხედის ფართობი.

გ) დაასახელე ფიგურა, რომელიც მიიღება DE წრფისა და ABC სიბრტყის გადაკვეთით.

ბარათების აკრეფის შემდეგ დაფათან გაიმართება პასუხების მოსმენა და შეფასება.

V. რეფლექსია, შედეგების შეჯამება

მასწავლებელი: – რა იყო ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის თემა? მიზანი?

მასწავლებელს დაფასთან რიგრიგობით გამოჰყავს მოსწავლეები და აძლევს დავალებებს: – ააგეთ და ჩაწერეთ:

- α სიბრტყე და A წერტილი, რომელიც მას ეკუთვნის;
- β სიბრტყე და B წერტილი, რომელიც მას არ ეკუთვნის;
- γ სიბრტყე, რომელიც c წრფეზე გადის;
- ორი α და β სიბრტყე, რომელიც d წრფეზე გადის;
- a და b აცდენილი წრფეები.

VI. საშინაო დავალება: №14, №15, №18 (კომენტარებით) სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები

სავ.№3. ა) 45°; ბ) 90°; გ) 90°.

სავ.№4. AK და BC, AK და DC, BK და AD, BK და DC, BK და AC, DK და AB, DK და BC, DK და AC, CK და AB, CK და AD.

სავ.№5. ა) A, B, S, M; ბ) A, B, C, N; გ) ABC; დ) ASB ; ე) SC; ვ) AC.

სავ.№6. ა) ASC და DEF; ბ) BSC და DEF; გ) EF; დ) DE; ე) ASC და ABC; ვ) ASB და BSC.

სავ.№8. ა) $a \subset \alpha$; ბ) $A \in a, B \in a$; გ) $a \cap b = \{C\}$; დ) $\alpha \cap \beta = a$.

სავ.№10. წრფესა და მის გარეთ მდებარე წერტილზე ერთადერთი სიბრტყე გაივლება.

სავ.№11. წინააღმდეგ შემთხვევაში A, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეში აღმოჩნდებიან.

სავ.№12. პასუხია გ).

სავ.№13. პასუხია ა).

სავ.№14. ABO და B_1A_1O მსგავსი სამკუთხედებია.

$$\frac{OB}{4} = \frac{3}{5} \Rightarrow OB = 2,4; \quad \frac{A_1B_1}{4} = \frac{5}{3} \Rightarrow A_1B_1 = 6\frac{2}{3}.$$

სავ.№15. არა, რადგან M, K და P არაა ერთ წრფეზე.

სავ.№16. ორ გადამკვეთ წრფეზე ერთადერთი სიბრტყე გაივლება.

აბა, სცადე! უნდა ავაგოთ სამკუთხა პირამიდა.

2.2 სიბრტყისადმი მართობი და დახრილი (3 სთ)

მიზანი:

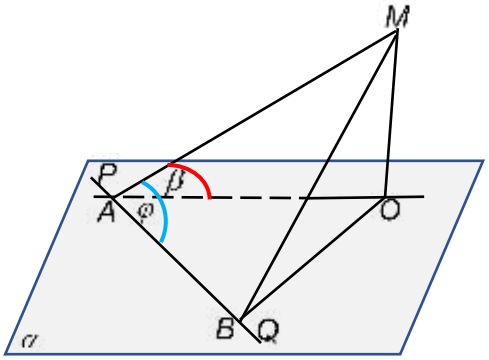
- სიბრტყისა და წრფის მართობულობის ცნებისა და ნიშნის გაცნობა;
- სიბრტყისადმი დახრილისა და მისი გეგმილის გაცნობა;
- მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე;
- კუთხე დახრილსა და სიბრტყეს შორის.

გაკვეთილის ჩატარების სავარაუდო გეგმა:

1) **ორგანიზაციული მომენტი.**
2) **საშინაო დავალების შემოწმება (ამოცანების შერჩევით).**
3) **წინარე ცოდნის გააქტიურება.**

- შეიძლება თუ არა, რომ ორ სიბრტყეს ჰქონდეს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი?

- ნებისმიერი სამკუთხედი ბრტყელი ფიგურაა?
- შესაძლებელია 4 წერტილზე სიბრტყის გავლება?



- საკლასო ოთახში გვაჩვენეთ:

ა) ორი სიბრტყის კვეთის მაგალითი; შეასრულეთ შესაბამისი ნახაზი.

ბ) წრფისა და სიბრტყის კვეთის მაგალითი (მაგიდის ფეხი და იატაკი). შეასრულეთ შესაბამისი ნახაზი.

გ) აცდენილი წრფეების მაგალითი. შეასრულეთ შესაბამისი ნახაზი.

4) ცნებების შემოტანა: სიბრტყის მართობული წრფე, მართობი, გეგმილი, დახრილი (ცხოვრებისეული ამოცანისა და გამზადებული ნახაზების გამოყენებით).

   მასწავლებელი:

   – წარმოიდგინეთ, რომ კიბე უნდა მიადგათ შენობას. რა უნდა გაითვალისწინოთ იმისათვის, რომ კიბე არ იყოს ციცაბო? (უნდა გავითვალისწინოთ მიწისადმი კიბის დახრილობა).

   – ვის შეუძლია ეს სიტუაცია ნახაზით გვაჩვენოს? (ნახაზზე დახრილი სხვადასხვა კუთხით უნდა წარმოადგინონ.

   – ახლა გავეცნოთ სახელმძღვანელოს ძირითად ტექსტში მოცემულ 1-ელ ამოცანას. (მუშაობენ სახელმძღვანელოს მიხედვით).

5) დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხის გაცნობა (მზა ნახაზების გამოყენებით).

6) ძირითად ტექსტში ამოხსნილი მე-2 ამოცანის გარჩევა.

7) **ამოცანა.** 10 სმ სიგრძის დახრილი სიბრტყესთან $30°$-იან კუთხეს ადგენს. იპოვე დახრილის გეგმილის სიგრძე.

8) საკლასო და საშინაო სამუშაებად გამოიყენონ 1-ელ გაკვეთილზე №1 – №7, მე-2 გაკვეთილზე – №8 – №15 და მე-3 გაკვეთილზე №17– №23 ამოცანები.

საჭიროების შემთხვევაში, შეუძლიათ ისარგებლონ ქვემოთ მოცემული დამატებითი ამოცანებით.

ამოცანა 1. დავამტკიცოთ, რომ კუთხე წრფესა და მის გეგმილს შორის უმცირესია ყველა იმ კუთხეს შორის, რომელიც შექმნილია ამ წრფის მიერ სიბრტყეზე მდებარე წრფეებთან.

მოცემულია: $MO \perp \alpha,\ PQ \subset \alpha,\ \angle MAO = \beta,\ \angle MAQ = \varphi.$

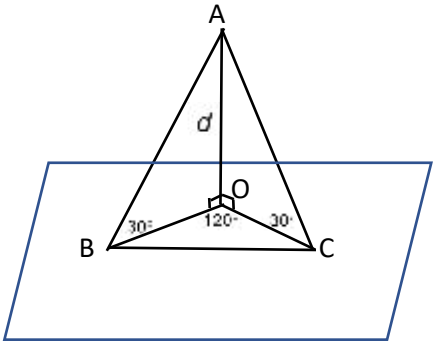
MA – დახრილი.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\beta < \varphi$.

დამტკიცება: $MB \perp PQ,\ MO < MB.$

$$\frac{MO}{MA} < \frac{MB}{MA} \Rightarrow \sin\beta < \sin\varphi,\ \ \beta < \varphi.$$

ამოცანა 2. სიბრტყიდან d მანძილით დაშორებული A წერტილიდან სიბრტყისადმი $30°$-იანი კუთხით გავლებულია AB და AC დახრილები. მათი გეგმილები β სიბრტყეზე $120°$-იან კუთხეს ადგენენ. იპოვე BC.



ამოხსნა. AOB სამკუთხედიდან ვწერთ:

$$\frac{AO}{OB} = \tan 30°,\ \ OB = d\sqrt{3}.$$

AOC სამკუთხედიდან კოსინუსების თეორემის გამოყენებით ვწერთ:

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2\cdot OB\cdot OC\cdot\cos 120° = 3d^2 + 3d^2 - 2\cdot d\sqrt{3}\cdot d\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 9d^2 \Rightarrow BC = 3d.$$

პასუხი: $BC = 3d$.

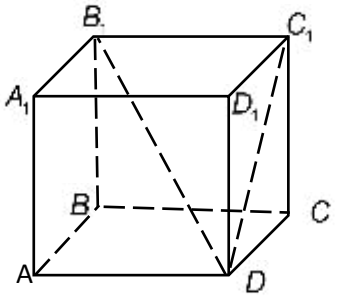
რეფლექსია

– რა ვისწავლეთ დღეს?

– როგორ ავაგოთ სიბრტყისადმი მართობი და დახრილი?– შეიძლება, რომ კუთხე დახრილსა და გეგმილს შორის იყოს ბლაგვი?

– როგორ ვიპოვოთ კუთხე დახრილსა და სიბრტყეს შორის, ანუ წრფესა და სიბრტყეს შორის?

მასწავლებელი აჩვენებს ნახაზს – კუბში გავლებულია კუბის დიაგონალი და ერთ-ერთი წახნაგის დიაგონალი.



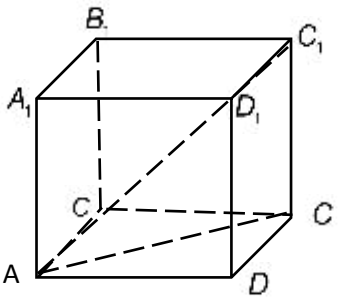
– იპოვეთ:

ა) კუთხე B_1D დიაგონალსა და ფუძის სიბრტყეს შორის;

ბ) DC_1 დიაგონალსა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

შენიშვნა:

გამოიყენეთ ვიზუალიზაცია. ჩვეულებრივი ფანქრით და ფურცლით შეგვიძლია თვალსაჩინოდ წარმოვადგინოთ წრფისა და სიბრტყის ურთიერთმდებარეობა.



კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები

სავ.№7. ACC_1 მართკუთხა სამკუთხედიდან

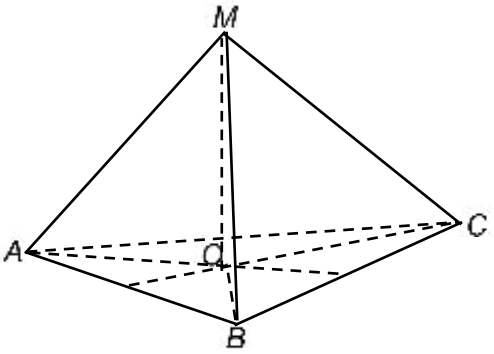
$$\tan\angle A = \frac{CC_1}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

სავ.№8. როგორც წინა პარაგრაფის დამატებით1-ელ ამოცანაში დავამტკიცეთ, დახრილსა და გეგმილს შორის კუთხე უმცირესია, ამიტომ : ა) არ არსებობს, ბ) არსებობს.

სავ.№12. თუ A და B წერტილები სიბრტყის ერთ მხარესაა, მაშინ შუა წერტილიდან მანძილი იქნება (15+23):2=19(სმ), ხოლო თუ სხვადასხვა მხარეს – (23-15):2=4(სმ).

სავ.№13. ვთქვათ, D წვერომდე მანძილია x. დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან მანძილი სიბრტყემდე, ერთი მხრივ, არის (a+b):2, ხოლო მეორე მხრივ – (c+x):2. ე.ი. a+b= c+x, x=a+b-c

სავ.№ 20. მოცემულია: AM=MB=MC=13; MO=5. პითაგორას თეორემის მიხედვით ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი AO=12სმ. ე.ი. გვერდი $AB=12\sqrt{3}$ სმ.



სავ.№21. ბაგირის სიგრძე იქნება $10\sqrt{2}$ სმ, ამიტომ კოსინუსების თეორემის მიხედვით ფუძეებს შორის მანძილია

$$\sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2+20^2-2\cdot 10\sqrt{2}\cdot 20\cos 135^\circ}=10\sqrt{10}\ (\text{სმ}).$$

სავ.№22. მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრის ცენტრი ჰიპოტენუზის შუა წერილია, ამიტომ ჰიპოტენუზის სიგრძე იქნება $2\sqrt{10^2-8^2}=12$ (სმ).

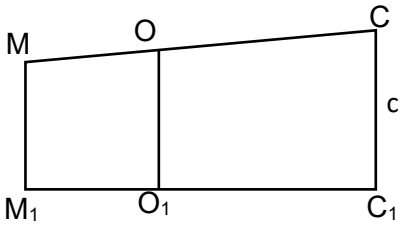
სავ.№23. პითაგორას თეორემით საძიებელი გვერდის მქონე სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსია 12სმ, ამიტომ გვერდი იქნება $12\sqrt{3}$ სმ.

შესაძლებელია?

1. შესაძლებელია, თუ მოპირდაპირე წვეროებზე გავატარებთ სიბრტყეს;
2. წვეროებიდან თანაბრად დაშორებული წერტილის გეგმილი შემოხაზული წრის ცენტრია. ასეთი ცენტრის არსებობის შემთხვევაში რომბი კვადრატს წარმოადგენს. შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა რომბი კვადრატია.

აბა, სცადე!

ვთქვათ, მოცემული სამკუთხედია ABC. მანძილი AB გვერდის M შუა წერტილიდან სიბრტყემდე იქნება $\frac{a+b}{2}$. მედიანის გადაკვეთის O წერტილით CM



მედიანა იყოფა 2:1 პროპორციით, ანუ CO:OM =2:1 (იხ. ნახაზი). ნახაზზე

$$CC_1 = c,\ MM_1 = \frac{a+b}{2}.\ \ OO_1 = \frac{2MM_1 + CC_1}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

აბა, სცადე! – შეფასების რუბრიკა

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილის თვისების გამოყენება და სივრცეში წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილის გამოთვლა.

შეფასების კრიტერიუმი	მაღალი დონე – 3 ქულა	საშუალო დონე – 2 ქულა	საწყისი დონე – 1 ქულა
1. ამოცანის გააზრება	სწორად განსაზღვრავს მოცემულ სიდიდეებს და ამჩნევს, რომ სამივე წვერო სიბრტყის ერთ მხარესაა	პირობას ძირითადად სწორად იგებს, თუმცა სიდიდეების ურთიერთ-კავშირი სრულად არ აქვს გააზრებული	უჭირს პირობის გააზრება
2. გეომეტრიული იდეის გამოყენება	სწორად იყენებს ფაქტს, რომ მედიანების გადაკვეთის წერტილი სამკუთხედის წვეროებიდან შესაბამისი შეფარდებით მდებარეობს და ამ თვისებას აკავშირებს სიბრტყემდე მანძილებთან	იყენებს შესაბამის თვისებას, მაგრამ დასაბუთება არასრულია	ცდილობს შესაბამისი თვისების გამოყენებას, მაგრამ შეცდომით
3. მანძილების მიმართ დამოკიდებულების დადგენა	სწორად ასკვნის, როგორ გამოითვლება სიბრტყემდე მანძილი	სწორ ფორმულამდე მიდის, მაგრამ არგუმენტაცია ან გარდაქმნა ნაწილობრივაა შესრულებული	ვერ ადგენს ან არასწორად ადგენს დამოკიდებულებას
4. ამოხსნის დასაბუთება	ამოხსნას თანმიმდევრულად, მკაფიოდ და მათემატიკური ტერმინოლოგიის სწორად გამოყენებით ასაბუთებს	დასაბუთება ნაწილობრივ სწორია, მაგრამ რომელიმე ეტაპი გამოტოვებულია	ამოხსნა ძირითადად დაუსაბუთებელია
5. საბოლოო პასუხი	სწორად წერს საბოლოო პასუხს	საბოლოო გამოსახულება სწორია, მაგრამ ჩაწერაში მცირე ხარვეზია	საბოლოო პასუხი მცდარია ან საერთოდ არაა წარმოდგენილი

მაქსიმალური ქულა – 15

13 – 15 ქულა – მაღალი დონე

მოსწავლე სრულად ფლობს სივრცული გეომეტრიის შესაბამის იდეას, სწორად იყენებს მას და დამოუკიდებლად ასაბუთებს პასუხს.

10 – 12 ქულა – კარგი დონე

ამოცანას სწორად ხსნის, თუმცა დასაბუთებაში ან ჩაწერაში აქვს მცირე ხარვეზები.

7 – 9 ქულა – დამაკმაყოფილებელი დონე

ესმის ამოცანის ძირითადი იდეა, მაგრამ საჭიროებს დამატებით მითითებას ან დახმარებას.

0 – 6 ქულა – გასაუმჯობესებელი დონე

უჭირს ამოცანის გეომეტრიული არსის დანახვა და შესაბამისი თვისებების გამოყენება.

2.3 სამი მართობის თეორემა (3 სთ)

მიზანი:

- სამი მართობის თეორემის გაცნობა და დამტკიცება;
- სამი მართობის თეორემის გამოყენება ამოცანების ამოსახსნელად;
- სივრცული წარმოდგენებისა და ლოგიკური აზროვნების განვითარება.

რესურსი: ფანქრები ან ჩხირები.

გეგმა:

I. **საჭირო საკითხების გახსენება** (შესაბამისი ნახაზების შესრულებით):

- სიბრტყისადმი დახრილი წრფე (სიბრტყის გადამკვეთი წრფე, რომელიც არ არის სიბრტყის მართობი).
- დახრილის გეგმილი სიბრტყისადმი (სიბრტყისადმი მართობის ფუძესა და დახრილის ფუძეზე გამავალი წრფე).
- სიბრტყისადმი დახრილი მონაკვეთი (დახრილი წრფის ნაწილი);
- მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე;
- მანძილი პარალელურ სიბრტყეებს შორის;
- სამი მართობის თეორემის გაცნობა (სახელმძღვანელოს ტექსტში შეთავაზებული ცხოვრებისეული ამოცანის განხილვის შემდეგ).

მოსწავლეები სამი მართობის თეორემის არსში კარგად რომ გაერკვნენ, სასურველია,

მასწავლებელმა გაკვეთილზე თვალსაჩინოებად გამოიყენოს ფანქრები ან ჩხირები და მათი საშუალებით აჩვენოს ის, რაც ნახაზებითაა მოცემული.

II. **საკლასო სამუშაო**:

1-ელი გაკვეთილი: №1 – №4 ამოცანები,

მე-2 გაკვეთილი: №5 – №10 ამოცანები

მე-3 გაკვეთილი: №11 – №15 ამოცანები.

III. დამოუკიდებელი სამუშაო

მე-2 გაკვეთილი: №9 ამოცანა (2 ვარიანტად. ერთი ვარიანტი სარგებლობს ა) ამოცანის მოცემულობით, ხოლო მეორე – იმავე ამოცანის შეცვლილი რიცხვითი მონაცემებით ($a = 2{,}6$ სმ, b =3სმ და c =3,2 სმ).

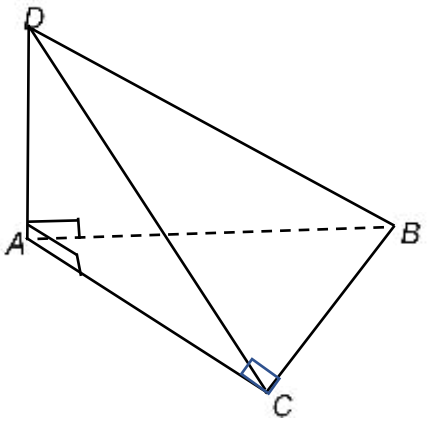
კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები

სავ.№2. AOB სამკუთხედში პითაგორას თეორემით $OA = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (სმ).

სავ.№4. MAD სამკუთხედში პითაგორას თეორემით $AD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (სმ).

სავ.№6. MKB მართკუთხა სამკუთხედში პითაგორას თეორემით $MK = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (სმ).

სავ.№12. მოცემული სამკუთხედის ფართობი ჰერონის ფორმულით იქნება 84 სმ^2. ამიტომ, BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლე იქნება 12 სმ. პითაგორას თეორემით $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ (სმ).



სავ.№14. AC მონაკვეთი DC დახრილის გეგმილია ABC სიბრტყეზე. ამოცანის პირობის მიხედვით $BC \perp AC$. სამი მართობის თეორემის მიხედვით $BC \perp DC$, ამიტომ BCD სამკუთხედი მართკუთხაა. მოცემულობით $BC = a,\ DC = b$. სამკუთხედ CBD-ში

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 \Rightarrow BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

პასუხი: $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

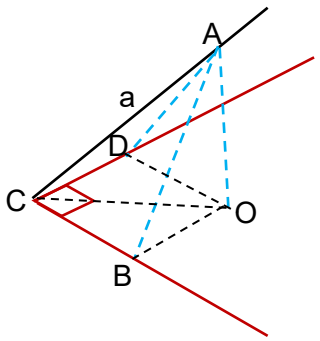
შესაძლებელია?

შესაძლებელია, რადგან ყველა გვერდიდან თანაბრად დაშორების შემთხვევაში წერტილი გეგმილდება მართკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრში. ასეთი მართკუთხედი კი კვადრატია.

პასუხი: შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა მართკუთხედი კვადრატია.

აბა, სცადე!

წრფეზე ავიღოთ A წერტილი და ამ წერტილიდან დავუშვათ მართობები კუთხის გვერდებსა (ნახაზზე AB და AD) და კუთხის სიბრტყეზე (ნახაზზე AO).



ვთქვათ, AC=a. მაშინ,

$$AB = AD = a\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; CB = CD = \frac{a}{2} \Rightarrow OB = OD.$$

სამი მართობის თეორემის მიხედვით OBCD მართკუთხედია. მიღებული ტოლობებით კი იგი კვადრატიცაა, ამიტომ

$$OC = CB\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\angle ACO = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle ACO = 45^\circ.$$

2.4 ორწახნაგა კუთხე (3 სთ)

თემა: ორწახნაგა კუთხე

გაკვეთილის ტიპი: ახალი მასალის ახსნა

მიზანი:

- ორწახნაგა კუთხის, მისი ელემენტებისა და ზომის ცნებების შემოტანა;
- ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის აგება;
- ორწახნაგა კუთხის გაზომვა;
- ამოცანების ამოხსნა ორწახნაგა კუთხის შესახებ შეძენილი ცოდნის გამოყენებით;
- სიბრტყეებს შორის კუთხის პოვნა.

რესურსი: ნახევარსიბრტყეების მოდელები, მასალა ჯგუფური მუშაობისათვის, 2-2 ფურცელი ან 2 მუყაოს ფირფიტა, დამოუკიდებელი სამუშაოს ამოცანები.

1-ელი გაკვეთილი

გაკვეთილის მსვლელობა

I. ორგანიზაციული მომენტი

II. საშინაო დავალების შემოწმება

მასწავლებელი: – გაქვთ რაიმე შეკითხვა საშინაო დავალების ირგვლივ?

მასწავლებელი შესამოწმებლად იღებს 2-3 რვეულს. შეკითხვების შემთხვევაში, ანალოგიურ დავალებას, შეცვლილი რიცხვითი მონაცემებით ხსნიან დაფაზე.

III. წინარე ცოდნის გააქტიურება

ფრონტალური გამოკითხვა:

– რას ეწოდება კუთხე სიბრტყეზე?

– რას ეწოდება კუთხე წრფეებს შორის სივრცეში?

– რას ეწოდება კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის?

IV. გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა

მასწავლებელი: –დღეს უნდა შევისწავლოთ „ორწახნაგა კუთხე“.

ორწახნაგა კუთხის ცნების შემოტანა

მასწავლებელი აჩვენებს საკლასო ოთახის იატაკისა და კედლის შეერთების ადგილს და სვამს კითხვებს:

–რას ვხედავთ იატაკისა და კედლის ურთიერთმდებარეობაში?

– შეიძლება თუ არა ვთქვათ, რომ ისინი ერთმანეთთან გარკვეულ კუთხეს ქმნიან?

– რა ფიგურებით იქმნება ჩვეულებრივი, თქვენთვის დღემდე ცნობილი კუთხე? (საერთო სათავის მქონე ორი სხივით.)

– ახლა რა ფიგურებითაა კუთხე შედგენილი? (ორი სიბრტყით.)

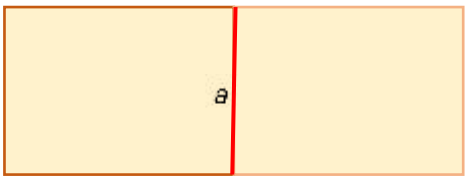
– რა არის იატაკისა და კედლის საერთო ნაწილი?

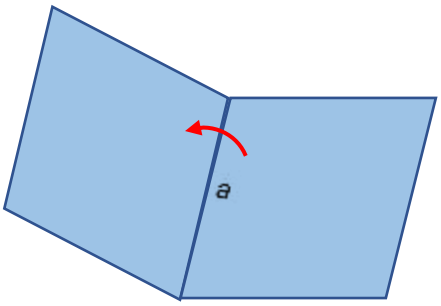
– როგორ შეიძლება აღვწეროთ ის კუთხე, რომელსაც ორი სიბრტყე ქმნის?

დღეს ჩვენ სწორედ ორი ნახევარსიბრტყით შექმნილ კუთხეებსა და მათ თვისებებს შევის-წავლით.

V. ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი: – შეხედეთ ნახაზებს.





– როგორც ხედავთ, ***a*** წრფე მარცხენა ნახაზზე სიბრტყეს ორ ნახევარსიბრტყედ ყოფს, ხოლო მარჯვენა ნახაზზე ორი ნახევარსიბრტყე ქმნის კუთხეს.

– რას წარმოდგენს ორივე ნახევარსიბრტყისთვის ***a*** წრფე?

– დავარქვათ ნახევარსიბრტყეებს წახნაგები. რა სახელს შეურჩევთ ორი ნახევარი სიბრტყისაგან შედგენილ კუთხეს?

საერთო საზღვრის მქონე ორი ნახევარსიბრტყით შემოსაზღვრულ სივრცის ნაწილს **ორწახნაგა კუთხე** ეწოდება.

მასწავლებელი მოსწავლეებს დაუდებს 2 ფურცელს ან 2 მუყაოს ფირფიტას, რომლებიც ერთ საერთო წრფეზეა შეერთებული. თავდაპირველად ფურცლები ერთმანეთს ემთხვევა, შემდეგ კი ნელ-ნელა გაშლიან.

მასწავლებელი:

– რა შეიცვალა ფურცლების მდგომარეობაში?

– რის მიხედვით შეგვიძლია აღვწეროთ, რამდენად არიან ისინი ერთმანეთისაგან გახსნილი?

– თუ ამ ორ ფურცელს სიბრტყედ მივიღებთ, რა კუთხე წარმოიქმნება მათ შორის?

– ხედავთ თუ არა მარცხენა ნახაზზე ორწახნაგა კუთხეს?

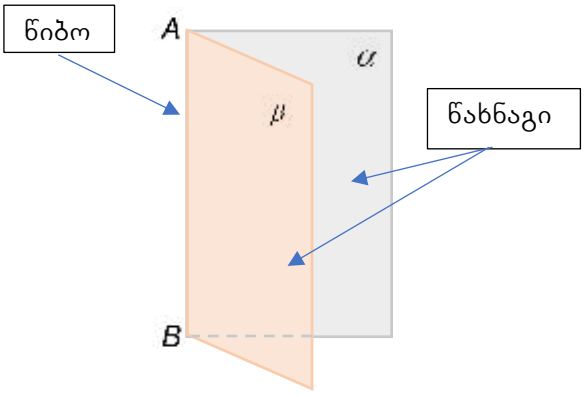
აჩვენებს ორწახნაგა კუთხის რამდენიმე მოდელს (მართი, მახვილი, გაშლილი, ბლაგვი).

– ნახევარსიბრტყეს ორწახნაგა კუთხის წახნაგი ეწოდება, ხოლო საერთო წრფეს – ორწახნაგა კუთხის წიბო (აჩვენებს მოდელზე).

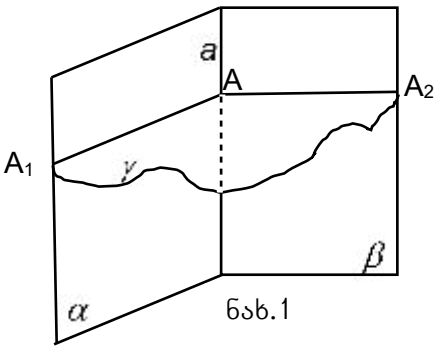
– შეგიძლიათ დამისახელოთ თქვენ გარშემო არსებული ორწახნაგა კუთხის მაგალითები? (ოთახის კედლითა და იატაკით შედგენილი კუთხე, ოთახის ორი მეზობელი კედლით შედგენილი კუთხე, გადაშლილი წიგნის გვერდებით შედგენილი კუთხე, სახლის ორფრთიანი სახურავით შედგენილი კუთხე და სხვ.)

– როგორ გამოვსახოთ ორწხნაგა კუთხე (აჩვენებს ნახაზებს)?

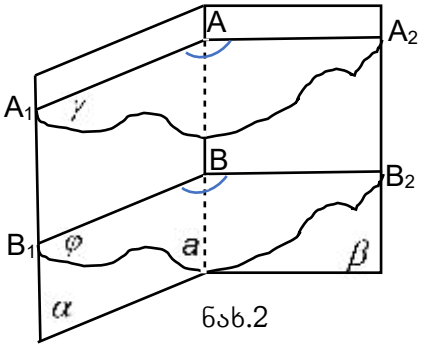
– ვთქვათ, გვაქვს α და β სიბრტყეებისაგან შედგენილი ორწახნაგა კუთხე (ნახ.1), რომლის წიბოა a.



– ავიღოთ a წრფეზე A წერტილი და გავავლოთ მასზე a წრფის მიმართ მართობული γ სიბრტყე (ნახ.1). ეს სიბრტყე ორწახნაგა კუთხის წახნაგებიდან მოკვეთს AA_1 სხივს α სიბრტყეში და AA_2 სხივს β სიბრტყეში. რა მივიღეთ კვეთის შედეგად? (A_1AA_2 ბრტყელი კუთხე.)



ნახ.1



ნახ.2

– A_1AA_2 ბრტყელ კუთხეს ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე ეწოდება.

ანალოგიური გზით შეგვიძლია მივიღოთ სხვა ხაზოვანი კუთხე. (მოსწავლე აგებს მსჯელობით.) თუ a წრფეზე ავიღებთ B წერტილს და გავავლებთ მასზე a წრფის მიმართ მართობული φ სიბრტყეს (ნახ.2), ეს სიბრტყე ორწახნაგა კუთხის წახნაგებიდან მოკვეთს BB_1 სხივს α სიბრტყეში და BB_2 სხივს β სიბრტყეში. კვეთის შედეგად მივიღებთ B_1BB_2 ხაზოვან კუთხეს.

– როგორ ფიქრობთ, ერთი ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხეები ყველა ტოლია თუ ერთმანეთისაგან ზომით განსხვავდებიან?

მასწავლებელი: – დავამტკიცოთ, რომ ორწახნაგა კუთხის ყველა ხაზოვანი კუთხე ტოლია.

მასწავლებელი მოსწავლეებს დასამტკიცებლად აძლევს დროს. გამოდის მსურველი და საჭიროების შემთხვევაში, დანარჩენი მოსწავლეები და მასწავლებელი ერთვებიან კომენტარებით.

დამტკიცება. ვინაიდან AA_1 და BB_1 სხივები (ნახ.2) α სიბრტყეს ეკუთვნის და ორივე a წრფის მართობულია, ვასკვნით, რომ ეს სხივები თანამიმართულია. ანალოგიური მსჯელობით ვასკვნით, რომ AA_2 და BB_2 სხივებიც თანამიმართულია. მივიღეთ, რომ A_1AA_2 და B_1BB_2 კუთხეებს თანამიმართული გვერდები აქვთ, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს კუთხეები ტოლია.

– როგორ ფიქრობთ, არის თუ არა ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის სიდიდე დამოკიდებული წიბოს წერტილის არჩევაზე? (ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის სიდიდე არ არის დამოკიდებული წიბოს წერტილის არჩევაზე.)

– ახლა გავარკვიოთ, თუ როგორი გრადუსული ზომა აქვს ორწახნაგა კუთხეს.

ორწახნაგა კუთხის გრადუსული ზომა ეწოდება მისი ხაზოვანი კუთხის გრადუსულ ზომას. ისევე, როგორც პლანიმეტრიაში, გვექნება ორწახნაგა კუთხის ის სახეები, რაც მის ხაზოვან კუთხეზეა დამოკიდებული.

დაფაზე ხაზავენ გაშლილ, მართ, მახვილ და ბლაგვ ორწახნაგა კუთხეებს. შესაბამისად აჩვენებენ მოდელებს.

– როგორ აღვნიშნოთ ორწახნაგა კუთხე? ვის შეუძლია ჩაწეროს მათემატიკურად „კუთხე α და β სიბრტყეებს შორის“? $\left(\angle(\alpha;\beta)\right)$.

ორწახნაგა კუთხე AB წიბოთი, რომლის სხვადასხვა წახნაგზე მონიშნულია C და D წერტილები, ასე ჩაიწერება „კუთხე $CABD$“.

VI. განმტკიცება

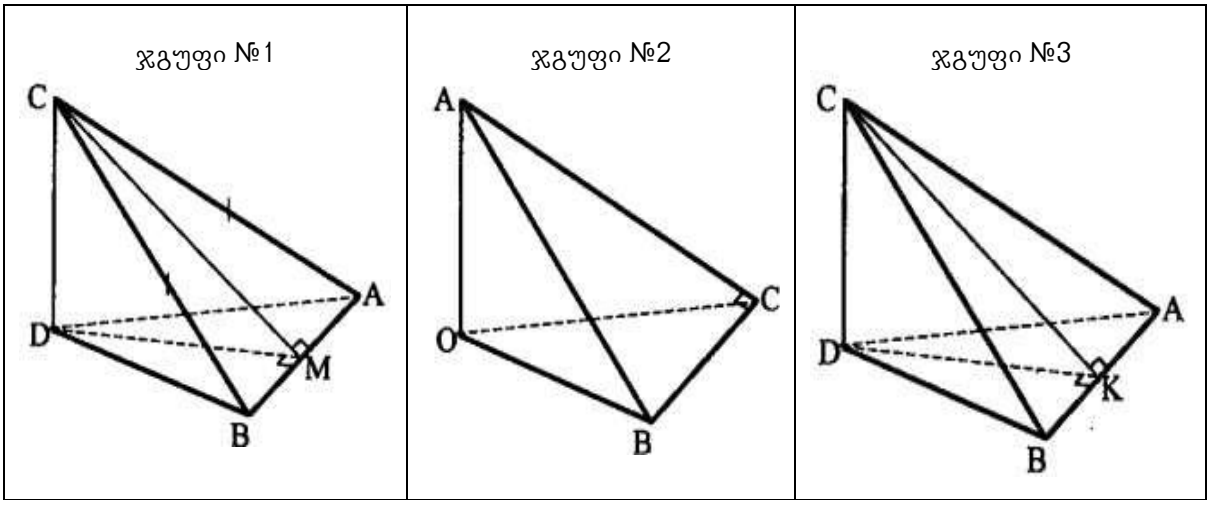
1) ამოცანის პირობის მიხედვით ნახაზების აგება

ჯგუფური მუშაობა

მასწავლებელი: – დაიყავით სამ ჯგუფად. თითოეულ ჯგუფს ევალება ამოცანასთან დაკავშირებული ნახაზის შედგენა.

ჯგუფი №1	ჯგუფი №2	ჯგუფი №3
მოც.: $\triangle ABC,\ AC = BC,$ $C \notin \alpha,\ D \in \alpha.$ $AB \subset \alpha,\ CD \perp \alpha.$ ააგეთ ხაზოვანი კუთხე $CABD.$	მოც.: $\angle ABC,\ \angle C = 90°,$ $BC \subset \alpha,\ AO \perp \alpha,\ A \notin \alpha.$ $O \in \alpha.$ ააგეთ ხაოვანი კუთხე $ABCO.$	მოც.: $\triangle ABC,\ \angle C = 90°,$ $AB \subset \alpha,\ CD \perp \alpha, C \notin \alpha, D \in \alpha.$ ააგეთ ხაზოვანი კუთხე $DABC$.

მოსწავლეებმა უნდა მიიღონ ქვემოთ მოცემული ნახაზები:



მასწავლებელი აჩვენებს ორი გადამკვეთი სიბრტყის ნახაზს და მოსწავლეებს სთხოვს, ამ ნახაზზე იპოვონ მოსაზღვრე და ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეები.

მასწავლებელი: – გაიხსენეთ, რას წარმოადგენს სიბრტყზე მოსაზღვრე კუთხეები და ვერტიკალური კუთხეები. გაიხსენეთ მათი თვისებები.

მსჯელობენ სივრცეში მოსაზღვრე და ვერტიკალურ კუთხეებზე და მათ თვისებებზე.

მასწავლებელი: – დახაზეთ მოსაზღვრე ორწახნაგა კუთხეები. ვთქვათ, ერთი მათგანის ზომაა 55°, რა ზომის იქნება მისი მოსაზღვრე კუთხე? ვერტიკალური კუთხე?

VII. ამოცანების ამოხსნა

ხსნიან ძირითადი ტექსტის №1 ამოცანას და №1, №3, №5 სავარჯიშოებს.

VIII. რეფლექსია

მასწავლებელი:

– რა იყო ჩვენი გაკვეთილის თემა?

– რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხე?

– რა ერთეულებში იზომება ორწახნაგა კუთხე?

– რას უდრის ორწახნაგა კუთხის გრადუსული ზომა?

– რა ვიცით ერთი ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხეების შესახებ?

IX. საშინაო დავალება – №2, №4, №6 ამოცანები.

მეორე გაკვეთილი

მიზანი:

- ორწახნაგა კუთხის შესახებ შეძენილი ცოდნის გაფართოება და გაღრმავება;
- ამოცანების ამოხსნა ორწახნაგა კუთხის შესახებ შეძენილი ცოდნის გამოყენებით.

გაკვეთილის მსვლელობის გეგმა (ნიმუში)

1) მოსწავლეების მიერ ორწახნაგა კუთხისა და ხაზოვანი კუთხის განმარტების გახსენება, შესაბამისი ნახაზის შესრულება.
2) ორწახნაგა კუთხის წაკითხვა/ჩაწერა.
3) ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის შესახებ ცოდნის გახსენება.
4) მახვილი, ბლაგვი, მართი ორწახნაგა კუთხეების მაგალითების განხილვა. ნახაზებზე და რეალურ სიტუაციაში არსებული მაგალითების ჩვენება.
5) კლასში სამუშაო: №7, №9 და №11 ამოცანები.
6) დამოუკიდებელი სამუშაო:

I ვარიანტი

იპოვე ისეთი წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომელიც თანაბრად იქნება დაშორებული მოცემული ორწახნაგა კუთხის წახნაგებისაგან.

II ვარიანტი

იპოვე ისეთი წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომელიც თანაბრად იქნება დაშორებული ურთიერთგადამკვეთი ორი სიბრტყისგან.

7) რეფლექსია
8) საშინაო დავალება №8, №10 და №12 ამოცანები.

მესამე გაკვეთილი

მიზანი:

- ცოდნის გაღრმავება ორწახნაგა კუთხისა და მისი ხაზოვანი კუთხის შესახებ;
- ხაზოვანი კუთხის აგება და მისი სიდიდის გამოთვლა;
- დიალოგში მონაწილეობის, ანალიზისა და სინთეზის, დასკვნების გამოტანისა და საკუთარი ნააზრევის დაცვის უნარის განვითარება;
- სწორი მათემატიკური ენის ფლობის უნარის განვითარება.

გაკვეთილის მსვლელობა

I. ორგანიზაციული მომენტი

მოსწავლეთა დასწრებისა და გაკვეთილისთვის მზადყოფნის შემოწმება. სამუშაო განწყობის შექმნა.

II. საშინაო დავალების შემოწმება

მასწავლებელი შერჩევით ამოწმებს დავალებას და კითხულობს თუ არის საკითხი, რომლის შესრულებაც გაუჭირდათ. რომელი დავალების შესრულება გაუჭირდათ? მასწავლებელი საჭიროების შემთხვევაში აძლევს რჩევებს ან დაფაზე ხსნიან მსგავს სავარჯიშოს.

III. წინარე ცოდნის გააქტიურება

1) მასწავლებელი სვამს კიდთხვებს:

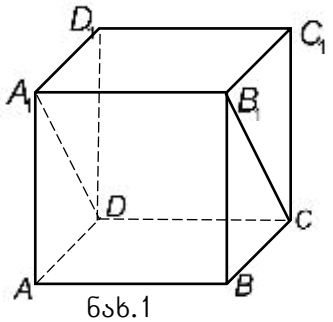
- რამდენი ნახევარსიბრტყე მიიღება სიბრტყეში წრფის გავლებით?
- რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხე?
- რა ფიგურაა ორწახნაგა კუთხის წიბო? წახნაგი?
- რა კუთხით იზომება ორწახნაგა კუთხე?

- რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე?
- როგორ უნდა ავაგოთ ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე?
- რამდენ გრადუსიანია მართი ორწახნაგა კუთხე?
- ჩამოაყალიბეთ სამი მართობის თეორემა.

2) რას უდრის ორწახნაგა კუთხე 1-ელი ნახაზის მიხედვით:

ა) $ABCD$-სა და DCC_1D_1-ს შორის?

ბ) $ABCD$-სა და A_1DCB_1-ს შორის?



ნახ.1

IV. მიზნის გაცნობა

მასწავლებელი აცნობს გაკვეთილის მიზანსა და ამოცანებს.

V. განმტკიცება

ხსნიან სახელმძღვანელოდან №13, №15, №17 ამოცანებს.

VI. დამოუკიდებელი სამუშაო

I ვარიანტი

ამოცანა. წესიერ $SABCD$ (მე-2 ნახაზი) პირამიდაში თითოეული წიბო 1 დმ-ის ტოლია. იპოვე კუთხე SBC და ABC სიბრტყეებს შორის.

II ვარიანტი

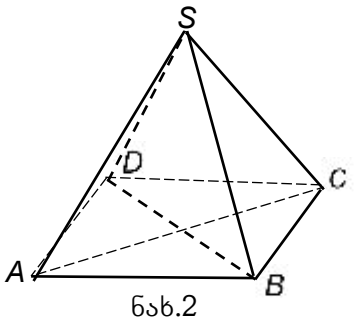
ამოცანა. წესიერ $SABCD$ (მე-2 ნახაზი) პირამიდაში თითოეული წიბო 2 სმ-ის ტოლია. იპოვე კუთხე ASD და ADC სიბრტყეებს შორის.

VII. რეფლექსია

მასწავლებელი:
– რა ისწავლეთ დღეს?
– რაში გამოიყენებ დღეს შეძენილ ცოდნას?
– დახაზეთ ორწახნაგა კუთხე და დაასახელეთ მისი ელემენტები.
– გაიხსენეთ რეალური ცხოვრებიდან ორწახნაგა კუთხის მოდელები.

VIII. საშინაო დავალება: №14, №16, №18 ამოცანები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები



ნახ.2

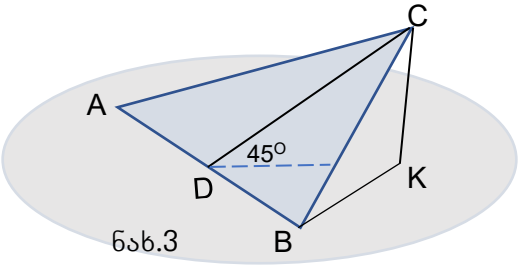
სავ.№1. ყოველ წიბოს შეესაბამება თითო ორწახნაგა კუთხე, ე.ი. სულ არის 6 ორწახნაგა კუთხე.

სავ.№2. ა) $90°$; ბ) $45°$; გ) $90°$; დ) საძიებელი კუთხის ტანგენსია $\sqrt{2}$.

სავ.№3-7 ამოცანები არ საჭიროებს სივრცულ ნახაზს, საკმარისია დაიხაზოს შესაბამისი მართკუთხა სამკუთხედი.

სავ.№10. ვთქვათ $CK=a$ (იხ. ნახ. 3). მაშინ,

$CD = a\sqrt{2}$, $BC = 2a \Rightarrow \angle CBK = 30°$.



ნახ.3

სავ. № 12. ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ დახრის კუთხის კოსინუსი 0,5-ის ტოლია, ამიტომ ვასკვნით, რომ დახრის კუთხეა $60°$.

სავ.№14. საერთო ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლეებიდან თითოეულის სიგრძეა $1,5\sqrt{2}$ სმ. ამიტომ წვეროებს შორის მანძილი იქნება $1,5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3$ (სმ).

სავ.№15. საერთო ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლეებიდან ერთის სიგრძეა 6 სმ, მეორის – 15 სმ. CD გამოითვლება კოსინუსების თეორემით. პასუხი: $\sqrt{171}$ სმ.

სავ.№16. პასუხი: ა) $45°$; ბ) $30°$.

სავ.№17-18. წესიერ პირამიდაში $S_{გვ}=S_{ფ}:\cos\alpha$, სადაც α გვერდითი წახნაგების ფუძის სიბრტყესთან დახრის კუთხეა (ეს ფორმულა მარტივად გამომდინარეობს დახრილი ფიგურისა და გეგმილი ფიგურის ფართობების დამაკავშირებელი ფორმულიდან).

aba, scade! f ur cel i unda gai Sal os da A da B wer t il ebze gaivl os wr f e. umokl esi gza nakeci xazis da amwr f is gadakveTis wer t il ze gadis, r ac gamomdinar eobs sam-kuTxedis ut ol obidan.

მეორე თავის დამატებითი სავარჯიშოები (4 სთ)

მიზანი:

- მეორე თავში განვლილი მასალის გამეორება-განმტკიცება (2სთ);
- წყვილებში სამუშაოს ჩატარება და პრეზენტაცია (1 სთ);
- შემაჯამებელი სამუშაო (1 სთ).

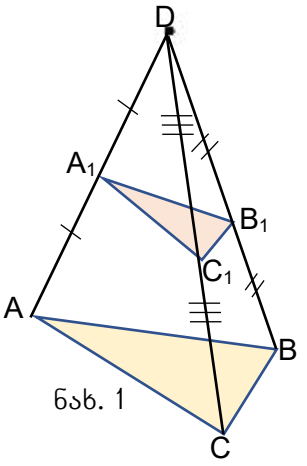
სავ.№1. სულ გაივლება 4 სიბრტყე. ყოველ ორ სიბრტყეს მოცემული ოთხი წერტილიდან ორი წერტილი ექნება საერთო, ამიტომ თანაუკვეთი სიბრტყეები არ იქნება (თვალსაჩინოებისათვის დავხაზოთ სამკუთხა პირამიდა).

სავ. №2. სულ გვექნება აცდენილ წრფეთა 3 წყვილი. (თვალსაჩინოებისათვის დავხაზოთ სამკუთხა პირამიდა).

სავ. №3. BK დახრილის გეგმილი BD მართობულია AC ფუძის (რადგან მედიანა სიმაღლეცაა). სამი მართობის თეორემით $BK \perp AC$.

სავ.№4. სამკუთხედის შუახაზის თვისებით (ნახ.1) $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$. წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშნით $A_1B_1 \parallel ABC$, $B_1C_1 \parallel ABC$. გამოდის, რომ ორი გადამკვეთი წრფიდან თითოეული ABC სიბრტყის პარალელურია. სიბრტყეთა პარალელობის ნიშნით ვასკვნით, რომ

$A_1B_1C_1 \parallel ABC$.



ნახ. 1

სავ.№5. ABC სამკუთხედის კათეტებია 12 სმ და 16 სმ. ამიტომ, $P_{ABC}=48$ სმ, ხოლო $S_{ABC}=96$ სმ^2. კვეთაში მიღებული სამკუთხედი ABC სამკუთხედის მსგავსია 0,4 კოეფიციენტით. მისი პერიმეტრი იქნება $P = 48 \cdot 0,4 = 19,2$ სმ, ხოლო ფართობი $S = 96 \cdot 0,4^2 = 15,36$ (სმ^2).

სავ.№6. პასუხი: $30°$.

სავ.№7. $\tan\angle CKC_1 = \frac{CC_1}{CK} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, სადაც CK ფუძის სიმაღლეა.

სავ.№8. წერტილი დაგეგმილდება ჰიპოტენუზის შუა წერტილში. $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (სმ).

სავ.№9. საძიებელი სიდიდეა $\sqrt{4 + r^2}$ სმ, სადაც r ჩახაზული წრის რადიუსია. r -ის გამოსათვლელად შევნიშნოთ, რომ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლეა 8 სმ და ბისექტრისის თვისებიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ $r=3$ სმ. **პასუხი.** წერტილიდან გვერდებამდე მანძილია 5 სმ.

სავ.№10. ა) ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ფუძეზე შემოხაზული წრის რადიუსია 6 სმ. ამიტომ, ფუძის გვერდი იქნება $6\sqrt{2}$ სმ, ხოლო ფართობი – 72 სმ^2.

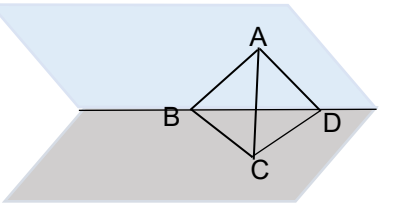
ბ) პირამიდის აპოთემა გამოითვლება პითაგორას თეორემით: $\sqrt{12^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{126}$ (სმ).

აქედან გამომდინარე, $S_{\text{გვ}}=\ =72\sqrt{7}$.

სავ.№11. $6\sqrt{2}$ სმ სიგრძის გვერდების მქონე ტოლი ტოლგვერდა სამკუთხედებია, ამიტომ თითოეულის ფართობი იქნება $18\sqrt{3}$ სმ.

სავ.№12. 4დმ^2

სავ.№13. თითოეული კათეტის სიგრძე იქნება $10\sqrt{2}$ სმ, ხოლო მანძილი C წვეროდან სიბრტყემდე – $5\sqrt{2}$ სმ.



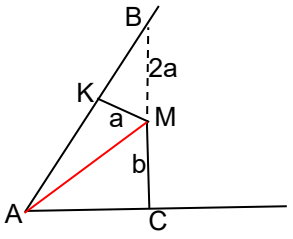
სავ.№14. მოცემულია $\angle ABD=45°$, $\angle ABC=30°$.

უნდა გავიგოთ $\angle ADC$.

ამოხსნა: ვთქვათ, AB=a. მაშინ, AC=0,5a, ხოლო

$AD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. მართკუთხა ACD სამკუთხედიდან, $\sin\angle ADC=\frac{AC}{AD}=\frac{0,5a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\angle ADC=45°$.

სავ.№15. საკმარისია დავხაზოთ ხაზოვანი კუთხე და M წერტილი ამ კუთხის შიგნით მოვნიშნოთ. CM მართობის გაგრძელება მეორე წახნაგს გადაკვეთს B წერტილში. BKM მართკუთხა სამკუთხედში BM =2a, ხოლო ACB მართკუთხა სამკუთხედში



$AC=(2a+b)\cdot\tan 30°=(2a+b):\sqrt{3}$.

პითაგორას თეორემის მიხედვით,

$AM=\sqrt{b^2+\frac{4a^2+4ab+b^2}{3}}=\frac{2\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\sqrt{3}}$.

სავ.№16. ა) და ბ) იმ ფაქტის შედეგია, რომ ჩახაზული წრის ცენტრი თანაბრადაა დაშორებული მრავალკითხედის გვერდებიდან, ხოლო გ) გამომდინარეობს დახრილი ფიგურისა და გეგმილი ფიგურის ფართობების დამაკავშირებელი ფორმულიდან.

აბა, სცადე!

ვთქვათ, AD=a, DC=b, CC_1=c, B_1D=d; (B_1D). დიაგონალსა და AA_1B_1 სიბრტყეს შორის კუთხე იყოს α, (B_1D-სა და (BB_1C_1)-ს შორის – β, (B_1D)-სა და (ABC)-ს შორის – γ.

$$\sin\alpha=\frac{a}{d};\quad \sin\beta=\frac{b}{d};\quad \sin\gamma=\frac{c}{d};\quad \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{a^2+b^2+c^2}{d^2}=\frac{d^2}{d^2}=1.$$

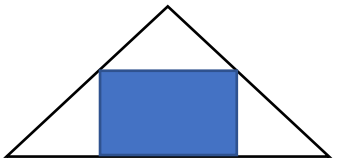
ანალოგიურად შეგვიძლია გამოვთვალოთ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ან უკვე დამტკიცებულ ტოლობაში სინუსები კოსინუსებით ჩავანაცვლოთ. მივიღებთ: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

წყვილებში სამუშაო (პროექტი)

მიზანი:

პროექტის განმავლობაში მოსწავლემ უნდა შეძლოს:

- ამოცანის პირობის დამოუკიდებლად გააზრება;
- მოცემული და საძიებელი სიდიდეების გამოყოფა;
- შესაბამისი ფორმულის/მეთოდის შერჩევა;
- ნახაზის ან სქემის გამოყენება;
- გამოთვლების სწორად შესრულება;
- მიღებული პასუხის საზომი ერთეულით ჩაწერა;
- მიღებული შედეგის რეალურ სიტუაციასთან დაკავშირება;
- საკუთარი ნაშრომ/ნააზრევის ახსნა და დასაბუთება.



იმის გამო, რომ ჩასაშენებელი ოთახის ერთი განზომილება 10 მეტრია, დანარჩენი ორი განზომილების პოვნა დაიყვანება შემდეგ ამოცანაზე:

ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის ფუძე 10 მ-ია, უნდა ჩავხაზოთ უდიდესი ფართობის მართკუთხედი. ვიპოვოთ ამ მართკუთხედის ზომები.

ა) ვთქვათ, მართკუთხედის სიმაღლეა x. მაშინ სიგანე იქნება $10-2x$, ხოლო ფართობი $S(x)=x(10-2x)$. მივიღეთ კვადრატული ფუნქცია, რომელიც უდიდეს მნიშვნელობას მიიღებს, როცა $x=2,5$;

ბ) ფართობი იქნება $5\cdot 10=50(მ^2)$, ხოლო მოცულობა: $50\cdot 2,5=125(მ^3)$.

პროექტის შეფასების ნიმუში

შეფასების კრიტერიუმი	მაღალი დონე 3 ქულა	საშუალო დონე 2 ქულა	დაბალი დონე 1 ქულა
1. პირობის გააზრება	სწორად აღიქვამს სივრცულ სიტუაციას და ყველა მოცემულობას იყენებს	პირობა ძირითადად სწორად აქვს გააზრებული, მცირე უზუსტობით	პირობის გააზრებაში აქვს მნიშვნელოვანი ხარვეზები
2. ნახაზი და გეომეტრიული მოდელი	სწორად აგებს სქემას და განსაზღვრავს საჭირო ზომებს	ნახაზი ძირითადად სწორია, მაგრამ აკლია ზოგიერთი აღნიშვნა	ნახაზი არასწორი ან არასრულია
3. მათემატიკური მოდელის შედგენა	სწორად ადგენს ოთახის ზომებსა და მოცულობის გამოსახულებას	მოდელი შედგენილია, მაგრამ აქვს მცირე შეცდომა	ვერ ადგენს შესაბამის მათემატიკურ მოდელს
4. მაქსიმუმის პოვნა	სწორად იყენებს კვადრატულ ფუნქციას/მაქსიმუმის პოვნის მეთოდს და სრულად ასაბუთებს	მეთოდი სწორია, მაგრამ დასაბუთება არასრულია	მეთოდი არასწორადაა გამოყენებული
5. გამოთვლების სიზუსტე	ყველა გამოთვლა სწორია	აქვს მცირე გამოთვლითი შეცდომა	აქვს რამდენიმე მნიშვნელოვანი შეცდომა
6. საბოლოო პასუხები	სწორად განსაზღვრავს ოთახის სიმაღლეს, ფართობსა და მოცულობას. პასუხს ერთეულებით წერს.	პასუხი ძირითადად სწორია, მაგრამ აკლია რომელიმე ერთეული ან დასაბუთება	პასუხი არასრული ან არასწორია
7. დასკვნა და შედეგის ინტერპრეტაცია	ნათლად ხსნის, რატომ არის მიღებული ზომები ოპტიმალური	აკეთებს დასკვნას, მაგრამ არასრულად ასაბუთებს	დასკვნა არა აქვს ან ვერ ასაბუთებს
8. ნაშრომის გაფორმება	ნაშრომი თანმიმდევრული, მკაფიო და მოწესრიგებულია	მცირე ხარვეზებია	ნაშრომი რთულად იკითხება ან არათანმიმდევრულია

მაქსიმალური ქულა – 24

ქულის გადაყვანა შეფასებაში

22 – 24 ქულა – შესანიშნავი შესრულება

19 – 21 ქულა – ძალიან კარგი

16 – 18 ქულა – კარგი

13 – 15 ქულა – დამაკმაყოფილებელი

9 – 12 ქულა – საჭიროებს გაუმჯობესებას

8 და ნაკლები ქულა – არასაკმარისი

მოსწავლის მუშაობის გზის შეფასება

1) კითხვები, რომელსაც მოსწავლემ გზად უნდა უპასუხოს:

ა) **სიტუაციის გააზრება**

- რა არის ცნობილი ამოცანის პირობაში?
- რას უნდა მივაგნოთ?
- როგორია შენობისა და სახურავის ფორმა?
- რატომ არის მნიშვნელოვანი სახურაფის სიბრტყეებს შორის 90° -იანი კუთხე?
- რა ზომები შეიძლება მივანიჭოთ ოთახის სიგანესა და სიმაღლეს?

ბ) **გეომეტრიული მოდელის შექმნა**

- დახაზეთ შენობისა და სახურავის სქემა.
- მონიშნეთ ნახაზზე ყველა ცნობილი და საძიებელი სიდიდე.
- როგორ უკავშირდება ოთახის სიმაღლე მის სიგანეს?
- რომელ სამკუთხედს ვიყენებთ ამ კავშირის დასადგენად?

გ) **მათემატიკური მოდელი**

- როგორ გამოისახება ოთახის მოცულობა მისი ზომების მიხედვით?
- რა სიდიდეზეა დამოკიდებული ოთახის მოცულობა?
- მიიღეთ მოცულობის გამოსახულება ერთი ცვლადის ფუნქციის სახით.
- რა ტიპის ფუნქცია მიიღეთ?
- რატომ უნდა ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მაქსიმუმი?

დ) **ოპტიმალური გადაწყვეტა**

- რა შემთხვევაში მიიღებს მოცულობა მაქსიმალურ მნიშვნელობას?
- რა სიმაღლე უნდა ჰქონდეს ოთახს?

- რა სიგრძე და სიგანე უნდა ჰქონდეს ოთახს?
- რა იქნება ოთახის ფართობი?
- რა იქნება ოთახის მოცულობა?

ე) **შედეგის შემოწმება**

- მიღებული ზომების ოთახი ნამდვილად თავსდება სახურავის ქვეშ?
- აქვს თუ არა მიღებულ პასუხებს შესაბამისი საზომი ერთეულები?
- როგორ შეიძლება მიღებული შედეგის სხვა გზით შემოწმება?
- რატომ შეიძლება ვთქვათ, რომ მიღებული მოცულობა უდიდესია?

2. შეამოწმეთ სხვა შემთხვევაში:

ა) როგორ შეიცვლებოდა პასუხი, შენობის სიგრძე 10 მ-ის ნაცვლად 12 მ რომ ყოფილიყო?

ბ) როგორ შეიცვლებოდა ოთახის მაქსიმალური მოცულობა, შენობის სიგანე 10 მ-ის ნაცვლად 8 მ რომ ყოფილიყო?

3. საბოლოო თვითშეფასება

ნაშრომის ბოლოს მოსწავლემ უპასუხოს კითხვებს:

- რა ვისწავლეთ ამ პროექტის შესრულებისას?
- რომელ ეტაპზე გაგვიჭირდა ყველაზე მეტად?
- როგორ გადავლახეთ სირთულე?
- რა მათემატიკური ცოდნა გამოვიყენეთ რეალური პრობლემის გადასალახად?

შემაჯამებელი სამუშაო N 2

I ვარიანტი

1.12 სმ სიგრძის დახრილი სიბრტყესთან $30°$-იან კუთხეს ადგენს. გამოთვალე ამ დახრილის გეგმილის სიგრძე.

2. $ABCD$ კვადრატის A წვეროდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართულია 8 სმ სიგრძის AM მართობი. მანძილი M წერტილიდან კვადრატის B წვერომდე 10 სმ-ია. გამოთვალე მანძილი M წერტილიდან კვადრატის C წვერომდე.

3. სიბრტყიდან 10 სმ-ით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი, რომელნიც სიბრტყესთან $45°$-იან კუთხეებს ადგენენ. დახრილებს შორის კუთხე $90°$-ის ტოლია. იპოვე მანძილი დახრილთა ფუძეებს შორის.

4.წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია $8\sqrt{3}$ სმ, ხოლო პირამიდის სიმაღლეა – 4 სმ. იპოვე პირამიდის გვერდით წახნაგსა და ფუძეს შორის შედგენილი ორწახნაგა კუთხის სიდიდე.

5. $ABCD$ მართკუთხედის AB გვერდზე გავლებულია სიბრტყე ისე, რომ მართკუთხედის ერთ-ერთი გვერდის გეგმილის სიგრძეა 4 სმ. იპოვე AC დიაგონალის გეგმილის სიგრძე ამ სიბრტყეზე, თუ $AB = 12$ სმ და $BC = 5$ სმ.

II ვარიანტი

1. 20 სმ სიგრძის დახრილი სიბრტყესთან 60°-იან კუთხეს ადგენს. გამოთვალე ამ დახრილის გეგმილის სიგრძე.

2. $ABCD$ კვადრატის B წვეროდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართულია 8 სმ სიგრძის BS მართობი. მანძილი S წერტილიდან კვადრატის A წვერომდე 10 სმ-ია. გამოთვალე მანძილი S წერტილიდან კვადრატის D წვერომდე.

3. სიბრტყიდან 5 სმ-ით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი, რომლებიც სიბრტყესთან 45°-იან კუთხეებს ადგენენ. დახრილებს შორის კუთხე 90°-ის ტოლია. იპოვე მანძილი დახრილთა ფუძეებს შორის.

4. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია $4\sqrt{3}$ სმ, ხოლო პირამიდის სიმაღლეა – 2 სმ. იპოვე პირამიდის გვერდით წახნაგსა და ფუძეს შორის შედგენილი ორწახნაგა კუთხის სიდიდე.

5. $ABCD$ მართკუთხედის AB გვერდზე გავლებულია სიბრტყე ისე, რომ მართკუთხედის ერთ-ერთი გვერდის გეგმილის სიგრძეა 4 სმ. იპოვე AC დიაგონალის გეგმილის სიგრძე ამ სიბრტყეზე, თუ $AB = 12$ სმ და $BC = 5$ სმ.

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების ნიმუში

სულ – 10 ქულა

1. ნახაზი ----1 ქულა.

პასუხი $6\sqrt{3}$ (სმ)---- 1 ქულა.

სულ 2 ქულა.

2. იპოვა კვადრატის გვერდი (6სმ) ---- 1 ქულა.

   პასუხი ($\sqrt{136}$ სმ)------ 2ქულა.

სულ 2 ქულა.

3. იპოვა დახრილები ($10\sqrt{2}$ სმ)------- 1 ქულა.

პასუხი (20 სმ) -------2 ქულა.

სულ 2 ქულა.

4. იპოვა ჩახაზული წრის რადიუსი (4 სმ)------ 1 ქულა.

პასუხი $45°$.------- 2ქულა.

სულ 2 ქულა.

5. იპოვა მანძილი C წერტილიდან სიბრტყემდე (3 სმ) ან დიაგონალის სიგრძე (13 სმ) ---
   ----------1 ქულა.

   პასუხი ($\sqrt{160}$ სმ)-------2 ქულა.

სულ 2 ქულა.

II ვარიანტის განმავითარებელი შეფასების ნიმუში – სულ 10 ქულა

შეფასების კრიტერიუმი.	2 ქულა	1 ქულა	0 ქულა
1. დახრილის გეგმილის სიგრძის პოვნა	სწორად ადგენს შესაბამის ტრიგონომეტრიულ დამოკიდებულებას, ასრულებს გამოთვლას და იღებს სწორ პასუხს	სწორად ირჩევს დამოკიდებულებას, მაგრამ უშვებს გამოთვლით შეცდომას ან პასუხს არასწორად წარმოადგენს	ვერ ადგენს საჭირო დამოკიდებულებას და ვერ იღებს სწორ შედეგს
2. სივრცული ფიგურისა და მართკუთხა სამკუთხედის გამოყენება	სწორად ადგენს საჭირო მართკუთხა სამკუთხედს, იყენებს პითაგორას თეორემას და იღებს სწორ პასუხს	სწორად ადგენს ამოხსნის გზას, მაგრამ უშვებს ერთ შეცდომას გამოთვლაში ან მსჯელობაში	ვერ ადგენს საჭირო გეომეტრიულ კავშირს და ვერ იწყებს სწორ ამოხსნას
3. ორი დახრილისა და ფუძეებს შორის მანძილის განსაზღვრა	სწორად იყენებს დახრილებს, მართობულსა და მათ შორის მოცემულ კუთხეს; იღებს სწორ მანძილს	ამოხსნის ძირითადი გზა სწორია, მაგრამ დაშვებულია ერთი მნიშვნელოვანი გამოთვლითი/გეომეტრიული შეცდომა	ვერ ადგენს საჭირო გეომეტრიულ კავშირებს
4. ორწახნაგა კუთხის სიდიდის პოვნა	სწორად პოულობს ორწახნაგა კუთხის სიდიდეს, იყენებს საჭირო დამოკიდებულებას და იღებს სწორ პასუხს	სწორად ადგენს ამოხსნის ძირითად გზას, მაგრამ ვერ ასრულებს გამოთვლას ან უშვებს მცირე შეცდომას	ვერ ადგენს ორწახნაგა კუთხის შესაბამის წრფივ კუთხეს და ვერ იყენებს საჭირო თვისებებს
5. მონაკვეთის/დიაგონალის გეგმილის სიგრძის პოვნა	სწორად იყენებს გეგმილის თვისებებს, ადგენს საჭირო დამოკიდებულებას და იღებს სწორ პასუხს	სწორად იწყებს ამოხსნას, მაგრამ უშვებს გამოთვლით ან მსჯელობის შეცდომას	ვერ იყენებს მონაკვეთის გეგმილის თვისებებს და ვერ ადგენს ამოხსნის გზას

ქულების ინტერპრეტაცია

10 ქულა – მოსწავლე სრულად ფლობს საკითხს; სწორად იყენებს სივრცული გეომეტრიის ცნებებს, თეორემებსა და ფორმულებს; ამოხსნას ასაბუთებს.

8-9 ქულა – მოსწავლეს საკითხი კარგად აქვს ათვისებული; დაშვებულია მცირე ხასიათის შეცდომები.

6-7 ქულა – მოსწავლეს აქვს ძირითადი ცოდნა, თუმცა უჭირს ზოგიერთი გეომეტრიული კავშირის ან მეთოდის დამოუკიდებლად გამოყენება.

4-5 ქულა – ჩანს საკითხის ნაწილობრივ გაგება; საჭიროა დამატებითი მუშაობა გეგმილებზე, დახრილებსა და სივრცულ ფიგურებზე.

0-3 ქულა – მოსწავლეს უჭირს ამოცანის პირობის გააზრება და შესაბამისი გეომეტრიული მეთოდის შერჩევა; საჭიროა საკითხის ხელახლა დამუშავება.

მნიშვნელოვანი განმავითარებელი პრინციპი:

საბოლოო პასუხი თუ არასწორია, მაგრამ მოსწავლემ სწორად შეარჩია ამოხსნის გზა, ფორმულა ან გეომეტრიული კავშირი, მას აუცილებლად უნდა მიეცეს 1 ქულა. ამით შეფასება მხოლოდ საბოლოო პასუხს კი არა, მოსწავლის მსჯელობისა და მათემატიკური მოქმედების უნარსაც ასახავს.

თავი 3. ვექტორები

თავის მიზანია, მოსწავლემ შეძლოს:

- წერტილის კოორდინატების დადგენა და წერტილის პოვნა მისი კოორდინატებით, როგორც ორ, ისე სამგანზომილებიან შემთხვევაში;
- ორ და სამგანზომილებიან ვექტორებზე წრფივი მოქმედებების შესრულება და გრაფიკული გამოსახვა;
- ვექტორის კოორდინატების დადგენა და ვექტორის ამოცნობა მისი კოორდინატებით;
- ვექტორის სიგრძისა და მიმართულების დადგენა;
- ვექტორების სკალარული ნამრავლის გამოთვლა ვექტორების სიგრძისა და მათ შორის კუთხით ან/და ვექტორების კოორდინატებით;
- ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა მათი კოორდინატების მიხედვით;
- კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორების ამოცნობა;
- ვექტორის წარმოდგენა არაკოლინეარული (ორი განზომილების შემთხვევაში) და არაკომპლანარული (სამი განზომილების შემთხვევაში) ვექტორების საშუალებით;
- კოორდინატებით მოცემული ვექტორის ორტებით წარმოდგენა და ორტებით წარმოდგენილი ვექტორის კოორდინატების დადგენა;
- ვექტორული სიდიდეების პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება;
- გეომეტრიული გარდაქმნების (ცენტრული და ღერძული სიმეტრია, მობრუნება, ჰომოთეტია, პარალელური გადატანა) შესრულება და კოორდინატებში ჩაწერა.

3.1 ვექტორები სიბრტყეზე (3 სთ)

მიზანი.

- ვექტორის, როგორც მიმართულების მქონე მონაკვეთის გაცნობა;
- თანამიმართული, საწინააღმდეგოდ მიმართული, კოლინეალური, არაკოლინეალური, ტოლი, მოპირდაპირე ვექტორების გაცნობა და დახაზვა;
- ვექტორების შეკრების სამკუთხედისა და პარალელოგრამის წესების გაცნობა და დემონსტრირება;
- ვექტორის რიცხვზე გამრავლების განმარტება და დემონსტრირება;
- ვექტორის არაკოლინეალური ვექტორების ჯამად წარმოდგენა;
- შეძენილი ცოდნის გამოყენება ამოცანების ამოსახსნელად.

გაკვეთილის მსვლელობა (1-ელი გაკვეთილი)

ორგანიზაციული მომენტი

მოსწავლეთა დასწრებისა და გაკვეთილისთვის მზადყოფნის შემოწმება. გაკვეთილის მოსასმენად სათანადო განწყობის შექმნა.

მოტივაცია.

მასწავლებელი: – ჩვენს გაკვეთილს ეპიგრაფად წავუმძღვაროთ ამერიკელი ფიზიკოსის — იუჯინ პოლ ვიგნერის გამონათქვამი: „მათემატიკა ესაა ისეთი ეშმაკური ოპერაციების მეცნიერება, რომელიც სრულდება სპეციალურად დამუშავებული წესებით, სპეციალურად მოფიქრებული ცნებებზე“. დღეს ჩვენ სწორედ ასეთი ეშმაკური ოპერაციებით ვიმოქმედებთ სპეციალურად შემუშავებულ ცნებებზე.

მიზნისა და ამოცანების გაცნობა

დღევანდელი ჩვენი გაკვეთილს თემაა ვექტორი. გავიხსენოთ, რა ვიცით მის შესახებ და გავიღრმაოთ ცოდნა.

ჩვენი ამოცანაა ვექტორისა და მისი თვისებების შესახებ ცოდნის გაღრმავება, მისი სიგრძის გამოთვლა, მასზე მოქმედებების წესების გაცნობა და გამოყენება ამოცანების ამოსახსნელად.

ახალი მასალის ახსნა

მუშაობენ ტექსტში მოცემულ 1-ელ ამოცანაზე.

მასწავლებელი:

– წაიკითხეთ 1-ელი ამოცანა.

– რა ძალებზეა ლაპარაკი ამოცანაში?

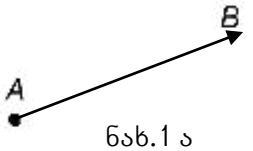
– რით ხასიათდება მდინარის დინება? (სიჩქარით)

– რით ხასიათდება სიჩქარე? (სიდიდით და მიმართულებით)

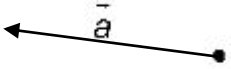
– დავიწყოთ ვექტორის გეომეტრიული ცნების შემოტანით. რა არის ვექტორი? (ვექტორი მიმართულების მქონე მონაკვეთია).

– როგორ დავხაზოთ ან როგორ ჩავწეროთ და წავიკითხოთ ვექტორი? (აჩვენებს ნახაზს)

ე. ი. ვექტორი არის მონაკვეთი, რომელსაც მითითებული აქვს მიმართულება. ვექტორის მაგალითები მოცემულია 1-ელ ნახაზზე. რომელი წერტილია საწყისი? ბოლო?



ნახ.1 ა



ნახ.1 ბ

მოსწავლეები კითხულობენ ვექტორებს.

– ვექტორს აქვს სიგრძე. რას ფიქრობთ, როგორი სიგრძე შეიძლება ჰქონდეს ვექტორს? (დადებითი ან ნულის ტოლი) ანუ არანულოვანი და ნულოვანი ვექტორები. როგორ გესმით ამ ცნებების შინაარსი? (არანულოვანი ის ვექტორია, რომელსაც 0-ისაგან განსხვავებული სიგრძე აქვს, ხოლო ნულოვანი ვექტორის სიგრძე 0-ის ტოლია).

– არანულოვანი AB ვექტორის სიგრძე ეწოდება AB მონაკვეთის სიგრძეს.

– მონიშნეთ ერთ წრფეზე არამდებარე A, B და C წერტილები. დახაზეთ შესაძლო ყველა არანულოვანი ვექტორი, რომელთა საწყისი და ბოლო ემთხვევა რომელიმე ამ წერტილებიდან ორს. ამოიწერეთ ვექტორები, რომელთაც ნახაზზე ხედავთ და მიუთითეთ თითოეული მათგანის საწყისი და ბოლო წერტილები.

– რა ურთიერთმდებარეობა შეიძლება ჰქონდეთ ვექტორებს?

მასწავლებელს შემოაქვს კოლინეარული და არაკოლინეარული ვექტორების ცნება. აჩვენებს კოლინეარული და არაკოლინეარული, თანამიმართული და საპირისპიროდ მიმართული ვექტორების ნახაზებსა და ჩანაწერებს ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$). მსჯელობენ ნულოვანი ვექტორის შესახებ და ასკვნიან, რომ:

ა) ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის კოლინეარულად ითვლება;

ბ) ვექტორებს კოლინეარული ეწოდება, თუ ისინი მდებარეობენ ან ერთ წრფეზე, ან პარალელურ წრფეებზე.

მასწავლებელი: – სახელმძღვანელოში გაკვეთილის ტექსტში მოცემულ მე-2 ნახაზზე იმსჯელეთ ვექტორების ურთიერთმდებარეობის შესახებ და ვექტორების წყვილებს შეურჩიეთ სახელწოდებები.

განმტკიცება

ხსნიან №1, №3, №5 (ა და ბ), №8, №26 სავარჯიშოებს.

დამოუკიდებელი სამუშაო:

I ვარიანტი.

ამოცანა. მოცემულია *ABCD* პარალელოგრამი. ამოწერე: ა) საწინააღმდეგოდ მიმართული; ბ) თანამიმართული; გ) ტოლი ვექტორები.

II ვარიანტი.

ამოცანა. მოცემულია *ABCD* ტრაპეცია. ამოწერე: ა) საწინააღმდეგოდ მიმართული; ბ) თანამიმართული; გ) არაკოლინეალური ვექტორები.

რეფლექსია

მასწავლებელი: – რა იყო ჩვენი მიზანი?
– მივაღწიეთ მიზანს?
– რა ვისწავლეთ?
– ვექტორული სიდიდეების რა ცხოვრებისეული მაგალითების მოყვანა შეგიძ;ლიათ?

საშინაო დავალება: №2, №4, №6 სავარჯიშოები.

მე-2 გაკვეთილი

გაკვეთილის მსვლელობა

I. ორგანიზაციული მომენტი

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება

1) მასწავლებელი სვამს კითხვებს:
– რას ეწოდება ვექტორი?
– რა მახასიათებლები გააჩნია ვექტორს?
– რა ვექტორული სიდიდეები იცით?
– როგორ ვექტორებს ეწოდება კოლინეარული?
– როგორ ვექტორებს ეწოდება თანამიმართული?
– როგორ ვექტორებს ეწოდება ტოლი?
– შეიძლება ორ ტოლ ვექტორს სხვადასხვა სათავე ჰქონდეს?

– შეიძლება საპირისპიროდ მიმართული ვექტორები იყოს ტოლი?

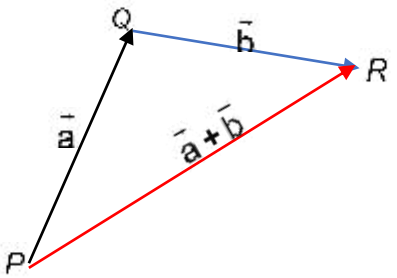
– გაიხსენეთ შეკრების თვისებები (კომუტატიურობის, გადანაცვლებადობის).

2) ააგეთ რვეულებში AB და CD ვექტორები, თუ ისინი: ა) თანამიმართულია;

ბ) არაკოლინეარულია; გ) საპირისპიროდ მიმართულია.

III. თემისა და მიზნის გაცნობა

მასწავლებელი: – დღეს ვაგრძელებთ ცოდნის შეძენასა და განმტკიცებას ვექტორების შესახებ. დღევანელი გაკვეთილის თემაა მოქმედებები ვექტორებზე.



IV. გაკვეთილის თემაზე მუშაობა

მასწავლებელი ხაზავს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები.

– ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის ჯამი არის მესამე $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ვექტორი, რომელიც აკავშირებს ერთ-ერთი შესაკრები ვექტორის სათავეს მეორის ბოლოსთან. ამ დროს პირველი ვექტორის ბოლო ემთხვევა მეორის სათავეს. ვექტორების შეკრების ამ წესს სამკუთხედის წესი ეწოდება. ვინ გვეტყვის
რატომ შეურჩიეს ამ წესს ეს სახელწოდება?

– რა ვექტორი იქნება $\vec{a}$ ვექტორისა და ნულოვანი ვექტორის ჯამი? $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ და $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

– ნებისმიერი $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორებისათვის მართებულია შემდეგი თვისებები:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (გადანაცვლებადობის კანონი).

3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (ჯუფთებადობის კანონი).

– არსებობს არაკოლინეალური ვექტორების ჯამის გამოთვლის კიდევ ერთი წესი, რომელსაც ჰქვია — ვექტორების შეკრება პარალელოგრამის წესით.

მასწავლებელი ნახაზის გამოყენებით ახსნის ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესს.

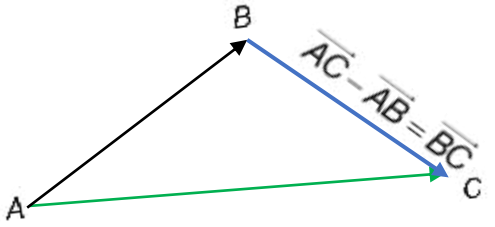
მასწავლებელი: – შესაკრები ვექტორები უნდა მოვდოთ ერთ წერტილში და ამ ვექტორებზე ავაგოთ პარალელოგრამი. აგებული პარალელოგრამის ის დიაგონალი, რომელიც ვექტორ-თა მოდების წერტილიდან გამოდის, იქნება ვექტორთა ჯამი. (აჩვენებს ნახაზზე.)

მასწავლებელი: – ახლა ვნახოთ, რას წარმოადგენს ვექტორთა სხვაობა.

მასწავლებელი აცნობს ვექტორთა გამოკლების წესებს.

მასწავლებელი: – ადვილად შეასრულებთ ვექტორთა სხვაობის გამოთვლას თუ დაიმახსოვრებთ ვექტორთა სხვაობის სამკუთხედის წესით გამოთვლის ქვემოთ მოცემულ ალგორითმს.

1) ვექტორები მოვდოთ საერთო სათავეზე (A);
2) შევაერთოთ ბოლო წერტილები: B და C;
3) მოვნიშნოთ სხვაობის ვექტორის მიმართულება მაკლების ბოლო წერტილიდან საკლების ბოლო წერტილისაკენ.



V. განმტკიცება.

კლასში მუშაობენ: №7, №9, №15, №18 ამოცანებზე.

VI. რეფლექსია

– დაასრულეთ წინადადება: მე ვიცი . . . .;
მე შემიძლია. . . ,
მე მჭირდება . . . .

VII. საშინაო დავალება №5 (დარჩენილი ნაწილი), №13, №20 ამოცანები.

მე-3 საათი

მიზანი:

- ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის ცნების შემოტანა;
- ვექტორის რიცხვზე გამრავლების წესის გაცნობა;
- ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის თვისებების გაცნობა;
- $\dot{b} = k\dot{a}$ ვექტორის აგება.

გაკვეთილის მსვლელობა

I. ორგანიზაციული მომენტი

მისალმება, დასწრების აღრიცხვა, მოსწავლეთა მომზადება სამუშაოდ. – 2 წთ.

II. მოტივაცია, წინარე ცოდნის გააქტიურება – 10 წთ

მასწავლებელი: – მე დავსვამ კითხვებს, თქვენ ზეპირად მიპასუხეთ:

- რა მახასიათებლები აქვს ვექტორს? (სიგრძეება.)
- მოცემული სიგრძის რამდენი ვექტორის გავლება შეიძლება მოცემული წერტილიდან მოცემული მიმართულებით? (ერთი.)

- $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორთა სხვაობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ ჯამის სახით. რას წარმოადგენს $\left(-\vec{b}\right)$?
- ჭეშმარიტია თუ მცდარი ქვემოთ მოცემული ჩანაწერი?

  ა) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$; ბ) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; გ) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}\Leftrightarrow\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

III. დამოუკიდებელი სამუშაო

შეარჩიე სწორი პასუხი:

1. რას ეწოდება ვექტორი?
   ა) ნებისმიერ მონაკვეთს;
   ბ) მონაკვეთს, რომელიც ლათინური ორი ასომთავრულითაა აღნიშნული;
   გ) მიმართულების მქონე მომაკვეთს.
2. როგორ ვექტორს ეწოდება ნულოვანი?
   ა) რომელი ვექტორის სიგრძეც 0-ის ტოლია;
   ბ) წრფეზე მდებარე ვექტორს;
   გ) ერთი ასოთი მონიშნულ ვექტორს.
3. ვექტორები ტოლია, თუ:
   ა) სიგრძეები ტოლი აქვთ;
   ბ) თუ მათი სიგრძე და მიმართულება ემთხვევა;
   გ) ორივე ერთ წერტილზეა მოდებული.

ამოცანა. ნიანგი ტბის ერთი ნაპირიდან გადაადგილედება მეორე ნაპირისაკენ. ნიანგის მოძრაობის სიჩქარე იყო $\overrightarrow{v_1}$, მდინარის დინების სიჩქარე კი $\overrightarrow{v_2}$. რა სიჩქარით გადაადგილდებოდა ნიანგი?

IV. გაკვეთილის თემის გაცნობა – 2 წთ

– შეგვიძლია ვექტორებზე მოქმედებების შესრულება?
– რა მოქმედებები ვიცით ვექტორებზე?
– როგორ შევასრულოთ ვექტორების შეკრება? გამოკლება?
– როგორ გავამრავლოთ ვექტორი რიცხვზე?
– დღეს სწორედ ამ კითხვებზე გავცემთ პასუხს.

V. ახალი მასალის ახსნა. – 10 წთ

მასწავლებელი: – რა შედეგს მივიღებთ თუ შევასრულებთ $\vec{a}+\vec{a}$ შეკრებას? (მივიღებთ იმავე მიმართულების ვექტორს, რომლის სიგრძე იქნება $2a$, ანუ $2\vec{a}$ ვექტორს.)

– მივიღეთ ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი.

– როგორი სიდიდეა რიცხვის ვექტორზე ნამრავლი? (ვექტორული სიდიდეა.)

$\vec{a}$ ვექტორის k რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ვექტორს, რომლის მოდული $|k|\cdot|\vec{a}|$ -ს ტოლია, და $\vec{a}$ ვექტორის თანამიმართულია, თუ $k>0$ და საპირისპიროდ მიმართულია, თუ $k<0$. (სახელმძღვანელოში დააკვირდნენ მე-7 ნახაზს.)

- ნებისმიერი k რიცხვისთვისა და $\vec{a}$ ვექტორისთვის $\vec{a}$ ვექტორი კოლინერულია $k\vec{a}$ ვექტორის.
- ნულოვანი ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი ნულოვანი ვექტორის ტოლია: $k\dot{0}=\dot{0}$.
- ვექტორის 0-ზე ნამრავლი ნულოვანი ვექტორია: $0\cdot\dot{a}=\dot{0}$.

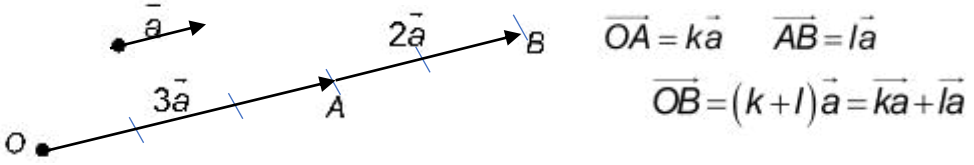
ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისათვის და ნებისმიერი k და l რიცხვებისათვის სამართლიანია ტოლობა:

ა) $(kl)\vec{a}=k\left(l\vec{a}\right)$ ჯუფთებადობის კანონი;

ბ) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ განრიგებადობის კანონი;

გ) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ განრიგებადობის კანონი.

დაფაზე და რვეულებში ასრულებენ $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$-ის ილუსტრაციას, როდესაც $k=3,\ l=2.$



მასწავლებელი: – დახაზეთ ვექტორები. $\vec{a},\ 1\frac{1}{2}\vec{a},\ -2\vec{a},\ -0,5\vec{a}.$

VI. **განმტკიცება. მასწავლებელთან ერთად პრაქტიკული მუშაობა –** 10 წთ
მუშაობენ №10, №12, №14, №16 ამოცანების ამოხსნაზე.

VII. **დამოუკიდებელი სამუშაო** №6 ამოცანა. – 6 წთ
მოსწავლეები მუშაობენ დამოუკიდებლად. მასწავლებელი აკვირდება, ეხმარება საჭიროების შემთხვევაში და აძლევს განმავითარებელ უკუკავშირს

VIII. რეფლექსია – 3 წთ

– რა ვისწავლეთ დღეს? (ვექტორებზე მოქმედებები. ვექტორის რიცხვზე გამრავლება და ამ მოქმედების ილუსტრირება.)

– რა ვიცით ვექტორთა წრფივ კომბინაციაზე?

– დაასრულეთ წინადადება: მე ვიცი . . . .;

მე შემიძლია. . . ,

მე მჭირდება . . . .

IX. საშინაო დავალება №17, №19, №21 სავარჯიშოები. – 2 წთ.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. $\dot{BA}$.

სავ.№2. ა) 4; ბ) 8.

სავ.№ 3. ბ).

სავ.№4. გ).

სავ.№5. ა) $\overrightarrow{DC}$; ბ) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$; გ) $\dot{AC}$; დ) $\dot{DB}$; ე) $\dot{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$, $\dot{AB}$ და $\overrightarrow{CB}$, $\dot{BA}$ და $\overrightarrow{BC}$, $\dot{BA}$ და $\overrightarrow{CB}$.

სავ.№6. ბ); ე).

სავ.№7. გ).

სავ.№8. პარალელოგრამი.

სავ.№9. ტრაპეცია.

სავ.№10. დ).

სავ.№11. $4\vec{a}$.

სავ.№12. $7\vec{a}+16\vec{b}$.

სავ.№13. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$.

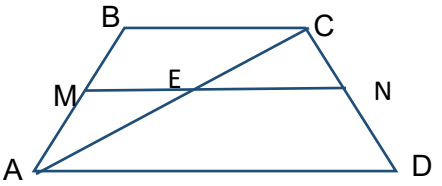
სავ.№14. $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

სავ.№15. $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$.

სავ.№16. $\sqrt{336}$ ნიუტონი.

სავ.№17. $90°$.

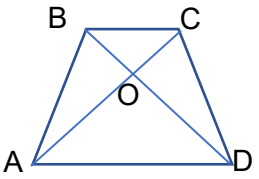
სავ.№18. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$.



სავ.№22. რადგან $\triangle BOC$ და $\triangle DOA$ მსგავსი სამკუთხედებია, ამიტომ $OA = 2 \cdot OC$, ხოლო

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}.$$



სავ.№23.

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \frac{5}{13} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{5}{13} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{5}{13} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{8}{13} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

სავ.№24. $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{5} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{BC}.$

სავ.№25. $\overrightarrow{MB} = -2 \cdot \overrightarrow{MT} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = -\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}$, საიდანაც $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$.

სავ.№27. $2\sqrt{13}$.

სავ.№28. 5.

3.2 ვექტორის კოორდინატები (3 სთ)

მიზანი:

- ვექტორი სიბრტყეზე, მისი კოორდინატების განმარტება და ნახაზზე ჩვენება;
- ვექტორის კოორდინატების გამოთვლა მისი საწყისი და წვეროს კოორდინატების მიხედვით;
- ვექტორებზე წრფივი მოქმედების კოორდინატებში ჩაწერა;
- ვექტორის სიგრძის გამოთვლა კოორდინატების საშუალებით;
- ვექტორის წარმოდგენა ორტების საშუალებით.

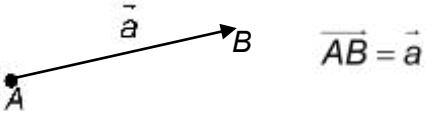
რესურსები: დამოუკიდებელი სამუშაოს ამოცანები, ნახაზები ვექტორთა კოორდინატების დასადგენად.

გაკვეთილის მსვლელობა (1-ელი გაკვეთილი)

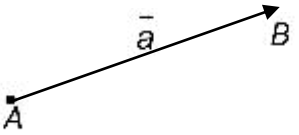
ორგანიზაციული მომენტი

წინარე ცოდნის გააქტიურება

– რას ეწოდება ვექტორი? (ხაზავენ და ასახელებენ.)

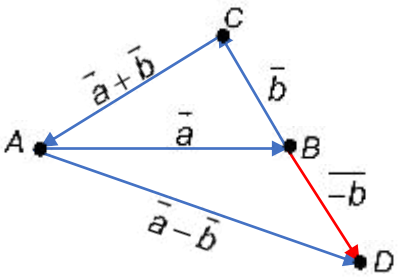


– რას ეწოდება ვექტორის სიგრძე? (წერენ და კითხულობენ ჩანაწერს.)



$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB,$$

$$\left|\bar{a}\right| = a.$$



– იმსჯელეთ მოცემული ნახაზის მიხედვით.

– რომელი ვექტორულ სიდიდეებს იცნობთ ფიზიკიდან? (ძალა, სიჩქარე, აჩქარება . . .)

მიზნის გაცნობა

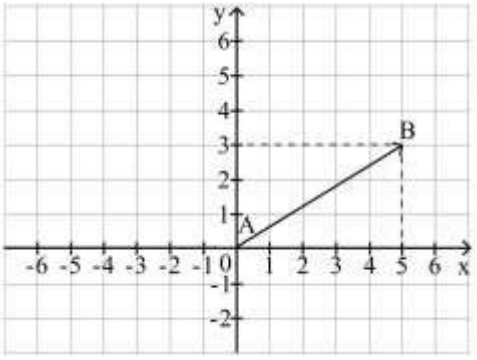
მასწავლებელი: – დღეს ვაგრძელებთ ვექტორების შესწავლას.

ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი**:**

–ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ვექტორი შეგვიძლია გადავდოთ სიბრტყის ნებისმიერ წერტილში.

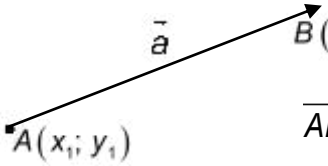
–იმისათვის, რომ ეს პროცესი გავამარტივოთ, გამოვსახოთ ისინი საკოორდინატო სიბრტყეზე. საკოორდინატო სიბრტყეზე ვექტორებს ექნება კოორდინატები, რაც მათი კოორდინატებში ჩაწერის საშუალებას მოგვცემს.



–ვექტორის კოორდინატები კოორდინატთა სათავეში მოდებული ვექტორის წვეროს კოორდინატებია.

– საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე ვექტორის კოორდინატები მისი წვეროსა და სათავის კოორდინატების სხვაობას ეწოდება.

– თუ გვაქვს ვექტორი $A(x_1; y_1)$ სათავითა და $B(x_2; y_2)$ ბოლოთი, შევძლებთ მისი კოორდინატების დადგენას? (დაფაზე ასრულებენ ნახაზს.)



$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$$

– რა დავადგინეთ? (როგორ უნდა განვსაზღროთ ვექტორის კოორდინატები, თუ იგი საკოორდინატო სიბრტყეზე ისეა განთავსებული, რომ არაა სათევზე მოდებული.)

– გამოვთვალოთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ $A(2;0)$ და $B(3;5)$.

მუშაობენ დაფაზე და რვეულებში.

ამოხსნა. $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1);\ \overrightarrow{AB}(3-2;\ 5-0);\ \overrightarrow{AB}(1;\ 5).$

მასწავლებელი: – როგორ ვექტორებს ეწოდება ტოლი? (ვექტორები ტოლია, თუ თანამიმართულებია და სიგრძეები ტოლი აქვთ.)

– ვთქვათ, გვაქვს ორი ტოლი $\vec{a}(x_1;y_1)$ და $\vec{b}(x_2;y_2)$ ვექტორი. ეს რას ნიშნავს კოორდინატების გათვალისწინებით? $(x_1 = x_2;\ y_1 = y_2.)$

– როგორ გამოვთვალოთ $A(x_1;y_1)B(x_2;y_2)$ მონაკვეთის სიგრძე სიბრტყეში?

$\left(AB = \sqrt{\left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right)}.\right)$

– ნახეთ გაკვეთილის ტექსტში 1-ელი და მე-2 ამოცანები.

– როგორ გამოვითვალოთ $\vec{a}(x;y)$ ვექტორის სიგრძე? $\left(a = \sqrt{x^2 + y^2}.\right)$

– იპოვეთ $\vec{d}(5;1)$ ვექტორის სიგრძე.

– რას გეუბნებათ ჩანაწერი: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2)$? (ორი ვექტორის ჯამის კოორდინატები შესაკრებთა შესაბამისი კოორდინატების ჯამის ტოლია.)

– რა იქნება $\vec{a}(x_1;y_1)$ და $b(x_2;y_2)$ ვექტორების სხვაობის კოორდინატები?

$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - y_1;\ x_2 - y_2).$

– როგორ ჩავწერთ კოორდინატებში $\vec{a}(x;y)$ ვექტორის სკალარზე ნამრავლს?

$$\lambda(x;y) = (\lambda x;\lambda y).$$

– რა დასკვნას ჩამოაყალიბებთ? (ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატები კოორდინატების ამ რიცხვზე ნამრავლის ტოლია.)

დამოუკიდებელი სამუშაო №1.

I ვარიანტი:

მოცემულია $\vec{a}(2;-1)$ ვექტორი. გამოთვალეთ $5\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები.

II ვარიანტი:

მოცემულია $\vec{b}(-3;2)$ ვექტორი. გამოთვალეთ $-3\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.

მასწავლებელი:

– ახლა კი გამოვთვალოთ $5\dot{a} - 3\dot{b}$ სხვაობა.

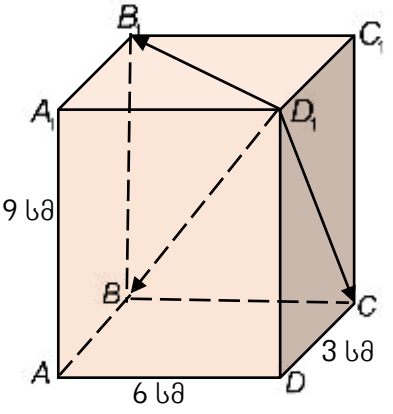
ითვ ლიან. პასუხი: (19; -11.)

– წაიკითხეთ პარაგრაფის მე-3 ამოცანა და ამოხსნა. დააკვირდით როგორ ხდება ვექტორთა შეკრება, გამოკლება და ვექტორის სკალარზე გამრავლება კოორდინატებში.

კლასში მუშაობენ: №1, №3, №5, №13 ამოცანებზე.

დამოუკიდებელი სამუშაო №2

ნახაზზე მოცემულია მართკუთხა პარალელეპიპედი. ნახაზის მიხედვით იპოვე:



I ვარიანტი:

$\overrightarrow{A_1B}$ ვექტორის სიგრძე და თანამიმართულ ვექტორთა ერთი წყვილი.

II ვარიანტი:

$\overrightarrow{D_1B}$ ვექტორის სიგრძე და საწინააღმდეგოდ მიმართულ ვექტორთა ერთი წყვილი.

III ვარიანტი:

$\overrightarrow{C_1A}$ ვექტორის სიგრძე და ტოლ ვექტორთა ერთი წყვილი.

საშინაო დავალება: №2, №4, №14 , №15 ამოცანები.

დამოუკიდებელი სამუშაოს შეფასება
I ვარიანტი – 10 ქულა

შეფასების კრიტერიუმი	ქულა
სწორად ამოიცნობს $\overrightarrow{A_1B}$ ვექტორს და მის შესაბამის მონაკვეთს.	2
სწორად განსაზღვრავს $\overrightarrow{A_1B}$ ვექტორის სიგრძეს.	2
სწორად იყენებს პარალელეპიპედის თვისებებს.	2
სწორად ირჩევს თანამიმართულ ვექტორებს.	2
პასუხს ასაბუთებს ნახაზის მიხედვით და იყენებს შესაბამის ტერმინებს.	2

განმავითარებელი შეფასება

10 ქულა – დავალება სრულყოფილად და დასაბუთებულადაა შესრულებული.

8 – 9 ქულა – დავალება ძირითადად სწორია, დაშვებულია მცირე უზუსტობა.

6 – 7 ქულა – ძირითადი ცნებები გაგებულია, თუმცა მსჯელობა ან გამოყენება ნაწილობრივი.

4 – 5 ქულა – მოსწავლე ნაწილობრივ ასრულებს დავალებას და საჭიროებს დამატებით განმტკიცებას.

1 – 3 ქულა – ცნებების გამოყენებაში მნიშვნელოვანი სირთულეები შეინიშნება.

დამოუკიდებელი სამუშაოს შეფასება
II ვარიანტი – 10 ქულა

შეფასების კრიტერიუმი	ქულა
სწორად ამოიცნობს $\overrightarrow{D_1B}$ ვექტორის საწყის და ბოლო წერტილებს.	2
სწორად ადგენს ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელ გზას.	2
სწორად იყენებს შესაბამის გეომეტრიულ თვისებებსა და დამოკიდებულებებს.	2
სწორად განსაზღვრავს საწინააღმდეგოდ მიმართულ ვექტორებს.	2
პასუხს ასაბუთებს ნახაზისა და ვექტორის მიმართულების გათვალისწინებით.	2

განმავითარებელი შეფასება

9 –10 ქულა – მოსწავლე თავისუფლად იყენებს ვექტორის სიგრძისა და მიმართულების ცნებას და პასუხს ასაბუთებს.

7 – 8 ქულა – დავალება სწორადაა გააზრებული, თუმცა მსჯელობაში მცირე ხარვეზია.

5 – 6 ქულა – ძირითადი ცნებები გაგებულია, თუმცა მსჯელობა ან გამოყენება ნაწილობრივი.

3 – 4 ქულა – მოსწავლე ნაწილობრივ სწორად იყენებს ვექტორის თვისებებს.

1– 2 ქულა – მოსწავლეს უჭირს როგორც ვექტორის სიგრძის, ისე მიმართულების განსაზღვრა.

დამოუკიდებელი სამუშაოს შეფასება
III ვარიანტი – 10 ქულა

შეფასების კრიტერიუმი	ქულა
სწორად ამოიცნობს $\overrightarrow{C_1A}$ ვექტორის საწყის და ბოლო წერტილებს.	2
სწორად განსაზღვრავს ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელ გზას.	2
სწორად იყენებს პარალელეპიპედის შესაბამის თვისებებს.	2
სწორად არჩევს ტოლ ვექტორთა ერთ წყვილს.	2
ითვალისწინებს ტოლი ვექტორების ორივე ძირითად პირობას (ტოლ სიგრძესა და ერთი და იმავე მიმართულებას) და ასაბუთებს პასუხს.	2

განმავითარებელი შეფასება

9 –10 ქულა – მოსწავლე სწორად და სრულყოფილად განსაზღვრავს ვექტორის სიგრძესა და ტოლობას. პასუხს ასაბუთებს.

7 – 8 ქულა – ძირითადი მსჯელობა სწორია, თუმცა შეინიშნება მცირე უზუსტობა.

5 – 6 ქულა – ძირითადი ცნებები გაგებულია, თუმცა მსჯელობა ან გამოყენება ნაწილობრივი.

3 – 4 ქულა – მოსწავლეს ესმის ცნება, მაგრამ მისი გამოყენება ნაწილობრივ უჭირს.

1 – 2 ქულა – მოსწავლეს უჭირს ვექტორის სიგრძისა და ტოლობის კრიტერიუმების გამოყენება.

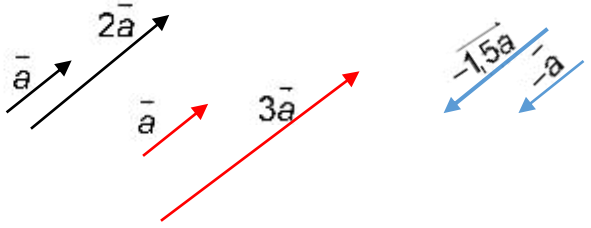
მასწავლებელს: ამ სამივე ვარიანტში 10 ქულა ისეა განაწილებული, რომ მხოლოდ საბოლოო პასუხი არ ფასდება – მოსწავლე ქულას იღებს სწორი ამოცნობის, მსჯელობის, გეომეტრიული თვისებების გამოყენებისა და დასაბუთებისთვისაც. ეს განსაკუთრებით ეფექტურია განმავითარებელი შეფასებისთვის.

მეორე გაკვეთილი

თემა: ვექტორის კოორდინატები

გაკვეთილის სტრუქტურა

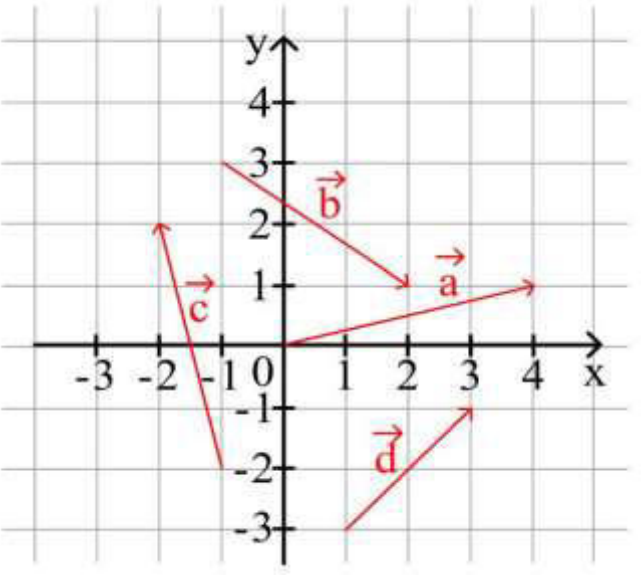
გაკვეთილის მსვლელობის ეტაპები		დავალებები, რომლებიც დაგეგმილ შედეგამდე მიგვიყვანს.
1	**ორგანიზაციული ეტაპი**	მოსწავლეთა დასწრებისა და გაკვეთილის მოსასმენად მზადყოფნის შემოწმება.
2	**საშინაო დავალების შემოწმება**	მასწავლებელი ამოწმებს 2-3 ნამუშევარს.
3	**წინარე ცოდნის გააქტიურება**	მასწავლებელი: –როგორ წარმოვადგინოთ ვექტორი კოორდინატების საშუალებით? – როგორ გამოვთვალოთ $\vec{a}(x;y)$ ვექტორის სიგრძე? – როგორ გამოვთვალოთ $A(x_1;y_1)$ და $B(x_2;y_2)$ წერტილებით მოცემული ვექტორის სიგრძე? – როგორ ვიპოვოთ სიბრტყეზე ორი ვექტორის: ა) ჯამის კოორდინატები?

		ბ) სხვაობის კოორდინატები? გ) რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატები? – იმსჯელეთ ვექტორების შესახებ მოცემული ნახა-  ზის მიხედვით.
4	**ახალი მასალის ახსნა**	ტექსტის მესამე ამოცანაზე დაყრდნობით ეცნობიან რამდენიმე ვექტორის შეკრებას კოორდინატების გამოყენებით.
5	**ვექტორების შესახებ შეძე-ნილი ცოდნის განმტკიცება**	კლასში მუშაობენ ამოცანებზე: №7, №9, №11, №12, №19.
6	**დამოუკიდებელი სამუშაო**	**I ვარიანტი**: №16 ამოცანა. **II ვარიანტი**: №17 ამოცანა.
7	**რეფლექსია**	– დაასრულე წინადადება: მე ვიცი . . . .; მე შემიძლია. . . , მე მჭირდება . . . .
8	**ინფორმაცია საშინაო დავალების შესახებ**	№8, №10, №15, №18 ამოცანები.

მე-3 გაკვეთილი

დამოუკიდებელი სამუშაო

იპოვე ნახაზზე მოცემული ვექტორების კოორდინატები.



კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№2. ა)$(7;3)$; ბ)$(6;8)$; გ)$(1;2,9)$; დ) $\left(-\sqrt{2};-2\right)$.

სავ.№3. ა)5; ბ) 13; გ) $\sqrt{10}$; დ) 2.

სავ.№4. ა)5; ბ) 5; გ) $3\sqrt{2}$; დ) 17; ე) 17; ვ) 1; ზ) 2.

სავ.№5. ა) $2\vec{i}+2\vec{j}$; ბ) $3\vec{i}+2\vec{j}$; გ) $-2\vec{i}+3\vec{j}$; დ) $-\vec{i}+4\vec{j}$; ე) $\vec{i}-4\vec{j}$; ვ) $5\vec{j}$; ზ) $5\vec{i}$.

სავ.№6. ა)$(3;5)$; ბ)$(3;-5)$; გ) $(-3;-5)$; დ) $(0;5)$; ე)$(3;0)$; ვ) $(1;-1)$.

სავ.№7. ა)5; ბ)13; გ)5; დ) 7; ე)5; ვ)$\sqrt{2}$; ზ)$\sqrt{2}$.

სავ.№8. ა)$(-7;9)$; ბ) $(14;-18)$; გ) $(-21;27)$.

სავ.№9. ა) $2\vec{a}+3\vec{b}=(12;-18)+(-12;18)=\vec{0}=(0;0)$; ბ) $2\vec{a}+3\vec{b}=(-1;2)+(-3;1,5)=(-4;3,5)$;

გ) $6\vec{i}-15\vec{j}=(6;-15)$; დ) $(16;9)$.

სავ.№10. $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}=3(-3;1)-2(4,5;-0,5)=(-9;3)+(-9;1)=(-18;4)$.

სავ.№11. ა)5; ბ) 13; გ) 2; დ) $\sqrt{113}$.

სავ.№12. $\sqrt{313}$. **სავ.13.** ± 6. **სავ.14.** ± 8.

სავ.№15. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=(-1;-1)+(1;-1)=(0;-2).$

სავ.№16. ვექტორები მოვდოთ კოორდინატთა სათავეში. ვექტორების მიმართულებებს შორის კუთხე იგივე აბსცისათა ღერძსა და პირველი მეოთხედის ბისექტრისას შორის კუთხეა, ანუ 45° .

სავ.№17. ა) 135°; ბ) 135°; გ) 15°.

სავ.№18. ა) 45°; ბ) 135°; გ) 30°; დ) 60°; ე) 120°; ვ) 30°.

სავ.№19. ა) $\uparrow\downarrow$; გ) $\uparrow\uparrow$.

სავ.№20. ა) 4; ბ) -4.

სავ.№21. ვექტორის სიგრძეა $x^2-4x+4+16-8x+x^2=2\left(x^2-6x+9\right)+2=2+2(x-3)^2$, რაც უმცირესია მაშინ, როცა $x=3$.

სავ.№22. ა) $k=4,\ \vec{a}=(12;16)$; ბ) $k=-2,\ \vec{a}=(-12;16)$. .

სავ.№23. $3\overrightarrow{a}=(1;-4)+(8;-12)=(9;-16)$, საიდანაც $\overrightarrow{a}=\left(3;-\frac{16}{3}\right)$.

სავ.№24. $\overrightarrow{OK}=\left(0;-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$, საიდანაც $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=(0;-1)$.

სავ.№25. $\vec{a}\ (4;-9)=(2\alpha+5\beta;\alpha-3\beta)$, მაშინ გვაქვს: $\alpha=-3,\beta=2$, ე.ი. $\vec{a}=-3\vec{b}+2\vec{c}$.

სავ.№27. ა) $\frac{1}{9}$; ბ) 0; გ) $-\frac{1}{5}$.

შესაძლებელია? არაა შესაძლებელი, რადგან არაკოლინეალური ვექტორების ჯამი მოგვცემს პარალელოგრამის ერთ დიაგონალს, ხოლო სხვაობა – მეორე დიაგონალს.

3.3 ვექტორების სკალარული ნამრავლი (2 სთ)

პირველი გაკვეთილი

მიზანი:

- ვექტორების სკალარული ნამრავლის ცნების შემოტანა და კოორდინატებით წარმოდგენა;
- ვექტორების სკალარული ნამრავლის თვისებების გაცნობა;
- ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდის დადგენა კოორდინატების საშუალებით;

- ვექტორთა მართობულობის პირობის დამტკიცება;
- ვექტორების სკალარული ნამრავლის გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას.

გაკვეთილის მსვლელობა

I. ორგანიზაციული მომენტი

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება

კითხვებზე პასუხი (ზეპირი სამუშაო)

1) რა არის ვექტორი? (მიმართულების მქონე მონაკვეთი)

2) რა არის ნულოვანი ვექტორი? (ვექტორი, რომლის საწყისი წერტილი ემთხვევა ბოლო წერტილს)

3) რა არის $\dot{AB}$ ვექტორის სიგრძე? (AB მონაკვეთის სიგრძე)

4) რას უდრის ნულოვანი ვექტორის სიგრძე? (0-ს)

5) როგორ ვექტორებს ეწოდება კოლინეალური? (ვექტორებს, რომელთა ერთ წრფეზე მოთავსებაა შესაძლებელი)

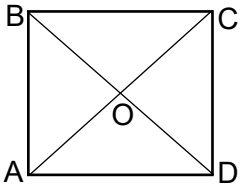
6) როგორ ვექტორებს ჰქვია თანამიმართული? (ვექტორებს, რომელთაც ერთნაირი მიმართულება აქვს)

7) როგორ ვიპოვოთ ვექტორის კოორდინატები? (ვექტორის წვეროს კოორდინატებს უნდა გამოვაკლოთ ვექტორის საწყისი წერტილის კოორდინატები. თუ გვაქვს $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

8) რას მივიღებთ ვექტორების შეკრებით? გამოკლებით? (შედეგად მივიღებთ ვექტორს.)

9) რას წარმოადგენს ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი? (საწყისი ვექტორის კოლინეალურ ვექტორს)

10) მოცემულია $ABCD$ კვადრატი, O წერტილი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. დაასახელეთ კუთხე:



ა) $\dot{CD}$ და $\overrightarrow{CA}$; ბ) $\dot{AO}$ და $\overrightarrow{OA}$; გ) $\dot{AD}$ და $\overrightarrow{BD}$; დ) $\dot{AO}$ და $\dot{CO}$ ე) $\dot{AC}$ და $\dot{DB}$ ვექტორებს შორის.

III. თემის გაცნობა, ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი: – დღეს უნდა გავეცნოთ ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება მათი სიგრძეების ნამრავლს მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსზე.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარულ ნამრავლს ასე აღვნიშნავთ: $\vec{a}\cdot\vec{b}$. თუ α მათ შორის კუთხეა, მაშინ $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha$.

მასწავლებელი: – წაიკითხეთ 1-ელი სავარჯიშო. როგორ გამოთვლით $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარულ ნამრავლს?

გამოჰყავს დაფასთან ერთ-ერთი მსურველი, რომელიც მსჯელობს (ვინაიდან თანამიმართულ ვექტორებს შორის კუთხე $0°$-ის ტოლია, ხოლო $0°$-იანი კუთხის კოსინუსი 1-ის ტოლი, ამიტომ მოცემულ შემთხვევაში $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი იქნება მათი სიგრძეების ნამრავლის ტოლი).

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos\alpha=3\cdot4\cdot\cos0°=3\cdot4=12.$$

გავეცნოთ სკალარული ნამრავლის ძირითად თვისებებს ნებისმიერი $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ვექტორებისა და k რიცხვისათვის (მასწავლებელი ფორმულებს წერს დაფაზე, ხოლო მოსწავლეები სიტყვიერად აყალიბებენ თვისებებს):

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

3) $k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(k\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left(\vec{a}\right)^2=a^2$.

IV. განმტკიცება, ამოცანების ამოხსნა

ხსნიან №3 სავარჯიშოს ა), გ) და დ) დავალებებს. დაფასთან გამოსული მოსწავლე ამოცანას ხსნის მსჯელობით. დაფაზე სრულდება ჩანაწერი:

ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}=6\cdot7\cdot\cos60°=42\cdot\frac{1}{2}=21;$

გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=12\cdot11\cdot\cos120°=132\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-66;$

დ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1{,}13\cdot3{,}27\cdot\cos90°=1{,}13\cdot3{,}27\cdot0=0.$

V. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მათი შესაბამისი კოორდინატების გამოყენებით

ამტკიცებენ თეორემას:

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მათი შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამის ტოლია. (სახელმძღვანელოში დამოუკიდებლად ეცნობიან თეორემას და დამტკიცებას, შემდეგ მსურველი გამოდის დაფასთან, ჩამოაყალიბებს თეორემას და დაამტკიცებს.) ამასთან დაკავშირებით ხსნიან სახელმძღვანელოდან №4 სავარჯიშოს ა) დავალებას.

როგორც ა), ისე ბ) დავალების შესრულებისას, დაფასთან გამოსული მოსწავლე დავალებას ხსნის მსჯელობით. ჩანაწერი იქნება შემდეგი სახის:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha = x_1x_2 + y_1y_2 = -12 + 9 = -3;$$

მეორე გაკვეთილზე იმუშავებენ დღეს შესწავლილი მასალის განმტკიცებასა და ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლებზე სკალარული ნამრავლის გამოყენებით.

განხილული ამოცანების მიხედვით შეგვიძლია შევადგინოთ ცხრილი:

კუთხის სიდიდე	სკალარული ნამრავლი
მახვილი (60°)	დადებითი (21)
ბლაგვი (120°)	უარყოფითი (-66)
მართი (90°)	ნულის ტოლი (0)

განვაზოგადოთ და ჩამოვაყალიბოთ დასკვნა:

თუ არანულოვან ვექტორებს შორის კუთხე:

- მახვილია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი დადებითია;
- ბლაგვია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი უარყოფითია;
- მართია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია.

მასწავლებელი: – რა შეგიძლიათ თქვათ საპირისპიროდ მიმართული არანულოვანი ვექტორების სკალარულ ნამრავლზე? (ვინაიდან 180°-იანი კუთხის კოსინუსი (-1)-ის ტოლია, ამიტომ საპირისპიროდ მიმართული ვექტორების ნამრავლი უარყოფითი იქნება.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha = ab \cdot (-1) = -ab.$$

VI. დამოუკიდებელი სამუშაო

სავარჯიშო №5 ა) და გ).

VII. რეფლექსია

მასწავლებელი:

– რა ვისწავლეთ დღეს?

– რას წარმოადგენს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი?

– როგორ გამოვთვალოთ ვექტორთა სიგრძის გამოყენებით ვექტორის თავისთავზე სკალარული ნამრავლი?

– როგორ გამოვთვალოთ ვექტორთა კოორდინატებით სკალარული ნამრავლი?

– ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის რა თვისებებს გავეცანით?

– განსაზღვრავს თუ არა ვექტორებს შორის კუთხე სკალარული ნამრავლის ნიშანს?

VIII. საშინაო დავალება: №2, №3-ის ბ) და გ); №4-ის გ) და დ); №8.

მეორე გაკვეთილი

მიზანი:

- ცოდნის გაღრმავება საკითხებზე:

ა) ვექტორების სკალარული ნამრავლი და მისი თვისებები;

ბ) ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა სკალარული ნამრავლის გამოყენებით;

- ვექტორების სკალარული ნამრავლის გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას.

გაკვეთილის მსვლელობა

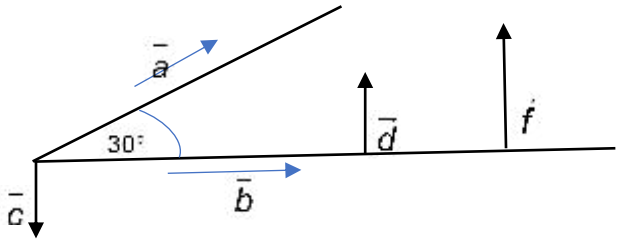
I. ორგანიზაციული მომენტი

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება

1) უპასუხეთ კითხვებს:

- რას ეწოდება ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი?
- რა მიიღება სკალარული ნამრავლის შედეგად? (რიცხვი, ანუ სკალარი.)
- რას ეწოდება ორ ვექტორს შორის კუთხე?
- ნახაზის მიხედვით იპოვეთ კუთხე ქვემოთ მოცემულ ვექტორებს შორის.

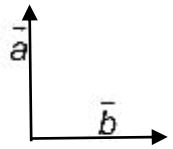
ა) $\angle(\vec{a},\vec{b})$; ბ) $\angle(\vec{a},\vec{c})$; გ) $\angle(\vec{b},\vec{c})$; დ) $\angle(\vec{d},\vec{c})$; ე) $\angle(\vec{d},\vec{f})$.



2) დაასრულეთ წინადადება, შეასრულეთ შესაბამისი ნახაზი და ჩანაწერი

- ორი არანულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს ვექტორები . . .

დაფაზე შესრულდება ნახაზი და ჩანაწერები:

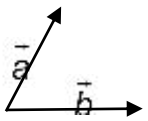


$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ, \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\underbrace{\cos 90^\circ}_{=0} = 0.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

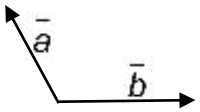
- ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი დადებითია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორებს შორის კუთხე . . .

დაფაზე შესრულდება ნახაზი და ჩანაწერები:



$$\angle(\vec{a},\vec{b}) < 90^\circ, \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\underbrace{\cos\angle(\vec{a},\vec{b})}_{>0} > 0.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a},\vec{b}) < 90^\circ.$$

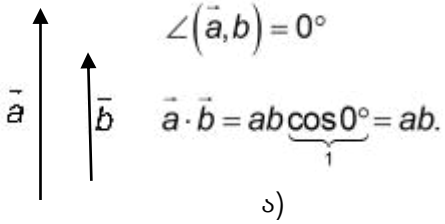


$$\angle(\vec{a},\vec{b}) > 90^\circ, \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\underbrace{\cos\angle(\vec{a},\vec{b})}_{<0} < 0.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a},\vec{b}) > 90^\circ.$$

მასწავლებელი: – კიდევ რა კერძო შემთხვევები შეგვიძლია განვიხილოთ?

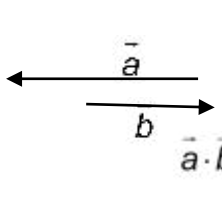
მოსწავლეები პასუხობენ და დაფაზე ასრულებენ შესაბამის ნახაზებსა და ჩანაწერებს:



$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0^\circ$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = ab.$$

ა)



$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = 180^\circ$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -ab.$$

ბ)

გ) $\angle(\vec{a},\vec{a}) = 0^\circ \quad \vec{a}\cdot\vec{a} = a\cdot a\cdot\cos 0^\circ = a\cdot a\cdot 1 = a^2$

მასწავლებელი:

– რა სახელწოდებას შეურჩევთ $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ნამრავლს? ($\vec{a}$ ვექტორის სკალარული კვადრატი.)

– ზეპირსიტყვიერად ჩამოაყალიბეთ, რა არის ვექტორის სკალარული კვადრატი. (ვექტორის სკალარული კვდრატი არის მისი სიგრძის კვადრატი.)

– როგორ ჩაწერთ? ($\vec{a}^{\,2} = a^2$.)

– როგორ გამოვთვალოთ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მათი კოორდინატების გამოყენებით? (ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის გამოსათვლელად უნდა გამოვთვალოთ მათი შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამი. $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$, სადაც $(x_1; y_1)$ არის $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, ხოლო $(x_2; y_2)$ – $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.)

III. ამოცანების ამოხსნა

ხსნიან:

- ტექსტში მოცემულ მაგალითს ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლაზე;
- სახელმძღვანელოდან №6 სავარჯიშოს ა) და ბ) ამოცანებს;
- სახელმძღვანელოდან №7 სავარჯიშოს ა) ამოცანას;
- სახელმძღვანელოდან №11 ამოცანას.

IV. დამოუკიდებელი სამუშაო

სახელმძღვანელო, №8 სავარჯიშო.
პასუხი: 0 ან -1,5.

V. რეფლექსია

მასწავლებელი: – რა იყო ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის მიზანი?
– როგორ გამოვთვალოთ ვექტორების სკალარული ნამრავლი?
– რა თვისებები აქვს ვექტორების სკალარულ ნამრავლს?;
– როგორ გამოვთვალოთ ვექტორებს შორის კუთხე სკალარული ნამრავლის გამოყენებით.

VI. საშინაო დავალება

№6(გ,დ), №7(ბ,გ), №10, №11 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№ 1. 12.

სავ.№ 2. -10.

სავ.№ 3. ა) 21; ბ) $14\sqrt{2}$; გ) -66; დ) 0.

სავ.№ 4. ა)-3; ბ)0; გ) 4; დ) 0.

სავ.№ 5. ა) $\frac{7}{25}$; ბ) 0; გ) 0; დ) $\frac{240}{289}$.

სავ.№ 6. ა) 180°; ბ) 90°; გ) 0; დ) 30°.

სავ.№ 7. ა) 60°; ბ) 45°; გ) 150°.

სავ.№ 8. $-1,5$ ან 0.

სავ.№ 9. ა) მახვილი; ბ) ბლაგვი; გ) მართი; დ) ბლაგვი.

სავ.№10. სამკუთხედი მართკუთხაა, $S = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 2$.

სავ. №11. -59.

სავ. №12. $\sqrt{4\cdot 9 + 12\cdot 3\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 9\cdot 25} = 3\sqrt{29+10\sqrt{3}}$.

სავ.№13. $S = \frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\sqrt{1-\left(\frac{-4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}\right)^2} = 1,5$.

სავ.№14. ა) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 5\cdot 8\cdot\left(-\frac{25+64-49}{80}\right) = -20$;

ბ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\cdot(-25-20) = -22,5$;

გ) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(-\frac{8}{13}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{5}{13}\cdot\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{8}{13}\cdot 25 - \frac{5}{13}\cdot 20 = -\frac{300}{13}$.

სავ.№15. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right) = 16-9 = 7.$

sav. №16. 10.

სავ.№17. (-1,5; 7).

სავ.№18. 5.

სავ.№19. (-2;1).

სავ.№20. $4\sqrt{3}$.

სავ.№21. 13.

3.4 მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში (3 სთ)

მიზანი: შემდეგი საკითხების გაცნობა:

- მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში;
- წერტილის პოვნა სივრცეში მისი კოორდინატებით;
- მოცემული წერტილის კოორდინატების დადგენა;
- ორ წერტილს შორის მანძილის გამოთვლა კოორდინატებით.

გაკვეთილის მსვლელობა (1-ელი გაკვეთილი)

I. ორგანიზაციული მომენტი

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება

მასწავლებელი სვამს კითხვებს, მოსწავლეები ადგილიდან პასუხობენ.

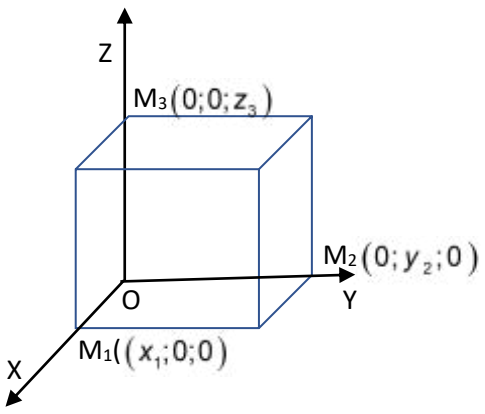
1) როგორ დაადგენ საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე ვექტორის კოორდინატებს?
2) რა არის ნულოვანი ვექტორის კოორდინატები?
3) როგორ გამოითვლი სიბრტყეზე ვექტორის სიგრძეს მისი კოორდინატებით?
4) რას უდრის ორი ვექტორის ჯამის კოორდინატები?
5) რას უდრის მოცემული ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორის კოორდინატები?

III. თემისა და მიზნის გაცნობა

მასწავლებელი: – თქვენ უკვე იცნობთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სიბრტყეზე, რომელიც შემოიტანა ფრანგმა მათემატიკოსმა რენე დეკარტმა XVII საუკუნეში. დღეს უნდა გავეცნოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სივრცეში.

IV. ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი: – მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ასაგებად მოვნიშნავთ კოორდინატთა სათავეს. ვაგებთ სამ ურთიერთმართობულ ღერძს და ვირჩევთ მათზე ჩვენთვის საჭირო მასშტაბს.



მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ყოველ M წერტილს შეესაბამება მისი კოორდინატების სამეული $M(x,y,z)$, სადაც x აბსცისაა, y – ორდინატი, ხოლო z - აპლიკატი.

ამოცანა 1. ავაგოთ $A(2;6;5)$ წერტილი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

ამისთვის:

1) OX ღერძზე მოვნიშნოთ 2 ერთეულის სიგრძის მონაკვეთი და ამ წერტილზე გავატაროთ OY ღერძის პარალელური წრფე.

2) OY ღერძზე მოვნიშნოთ 6 ერთეულის სიგრძის მონაკვეთი და ამ წერტილზე გავატაროთ OX ღერძის პარალელური წრფე.

3) ორი წრფის გადაკვეთის წერტილზე გავავლოთ Oz ღერძის პარალელური წრფე და მასზე გადავდოთ 5 ერთეულის სიგრძის მონაკვეთი. (ნახაზს ასრულებენ დაფაზე და რვეულებში.)

მასწავლებელი: – რა არის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ძირითადი კომპონენტები? (საკოორდინატო ღერძები, საკოორდინატო სიბრტყეები და ათვლის სათავე.)

– ცალ-ცალკე დაახასიათეთ თითოეული მათგანი.

პასუხობს სხვადასხვა მოსწავლე:

- **საკოორდინატო ღერძები** – ესაა სამი ურთიერთმართობული წრფე: OX, OY, OZ.
- **საკოორდინატო სიბრტყეები** – ესაა სამი სიბრტყე:

$$XOY\,(Z=0),\ YOZ\,(X=0),\ XOZ\,(Y=0).$$

- **ათვლის სათავე** – $O(0;0;0)$.

მასწავლებელი: – რას წარმოადგენს თითოეული კოორდინატი?

- x არის აბსცისა;
- y არის ორდინატი;
- z არის აპლიკატი.
- ათვლის სათავე (O წერტილი, რომელშიც სამივე ღერძი გადაიკვეთება.)

V. განმტკიცება

ხსნიან სახელმძღვანელოდან №1, №3, №5, №7 ამოცანებს.

მასწავლებელი: – ამოვხსნათ **ამოცანა**

დავადგინოთ AB მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები სივრცეში, თუ ცნობილია მისი ბოლოების $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ და $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ კოორდინატები.

მსჯელობენ და ასკვნიან, რომ მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატებია

$$B\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

იციან როგორ გამოთვალონ AB მონაკვეთის სიგრძე სიბრტყეზე. მასწავლებელი სთხოვს AB მონაკვეთის სიგრძის გამოთვლას სივრცეში, თუ მონაკვეთის ბოლოებია $A(x_1;y_1,z_1)$ და $B(x_2;y_2,z_2)$.

გამოაქვთ **დასკვნა**:

მონაკვეთის სიგრძე სივრცეში – ესაა მანძილი მის ბოლოებს შორის და გამოითვლება ფორმულით: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

VI. დამოუკიდებელი სამუშაო

ამოცანა. იპოვე მანძილი A(1; 2; 3) და B(-2; 6; -9) წერტილებს შორის.

VII. რეფლექსია.

მასწავლებელი: – რა ვისწავლეთ დღეს?

– რამდენი კოორდინატი აქვს წერტილს საკოორდინატო სიბრტყეზე? სივრცეში?

– XOY სიბრტყეში მდებარე წერტილს რომელი კოორდინატები აქვს 0-ის ტოლი?

– რომელი კოორდინატი აქვს 0-ის ტოლი ორდინატთა ღერძის კუთვნილ წერტილს?

VIII. საშინაო დავალება: №2, №4 და №6 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) OX; ბ) OZ; გ) OX; დ) OY; ე) samives; ვ) ar cer Ts.

სავ.№2. ა) XOZ; ბ) YOZ ; გ) XOY; დ) YOZ; ე) YOZ-s da XOY-s; ვ) ar cer Ts.

სავ.№3. ა) 13; ბ) 5; გ) 13; დ) $\sqrt{111}$.

სავ.№4. $\pm\sqrt{21}$.

სავ.№5. $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|(2;0;-2)\right| = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}.$

სავ.№6. 5.

სავ.№7. 13.

სავ.№8. $(\pm 1,1;0;0)$.

სავ.№9. $(0;\pm 9;0)$.

სავ.№10. $(0;0;\pm 7)$.

სავ.№ 11. ა) 3; ბ) 2 ; გ)1.

სავ.№12. ა) $(2;0;-1)$; ბ) $(2,5;-4,5;2)$; გ) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};4;\frac{1}{2}\right)$.

სავ.№13. ა) M-ის კოორდინატები

$$\frac{1}{2}(5;2;-6)+\frac{1}{2}(-7;4;6)=(-1;3;0), AM=\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}=5,\ AM=5;$$

ბ) $\sqrt{14}$; გ) $\frac{\sqrt{70}}{2}$. **M**-ის კოორდინატებია $(-1;3;0)$, $AM=\sqrt{0+9+16}=5$.

სავ.№14. $C=(1;1;0)$; $C_1=(1;1;1)$; $D_1=(0;1;1)$; $B_1=(1;0;1)$.

სავ.№15. a) მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია

$\left(\frac{-1+5-7}{3};\frac{0+2+4}{3};\frac{4-6+6}{3}\right)=\left(-1;2;\frac{4}{3}\right)$, ამიტომ მანძილი სათავემდე იქნება $\frac{\sqrt{61}}{3}$;

b) $\frac{\sqrt{14}}{3}$; g) $\frac{\sqrt{13}}{3}$.

სავ.№16. $C=(3;4;0)$; $C_1=(3;4;5)$; $D_1=(0;4;5)$; $B_1=(3;0;5)$.

შესაძლებელია? პასუხი: არა, რადგან სამი წერტილი ყოველთვის ერთ სიბრტყეშია.

3.5 ვექტორები სივრცეში (3 სთ)

მიზანი:

- სივრცული ვექტორის კოორდინატების გაცნობა და პოვნა;
- სივრცულ ვექტორებზე წრფივი მოქმედებებისა და სკალარული ნამრავლის ჩაწერა კოორდინატებით;
- სივრცული ვექტორის წარმოდგენა ორტების საშუალებით;
- წრფივი მოქმედებების გამოსახვა გრაფიკულად;
- ვექტორის სიგრძის გამოთვლა;
- კომპლანარული და არაკომპლანარული ვექტორების ამოცნობა და გრაფიკულად გამოსახვა;
- ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა კოორდინატებით.

გაკვეთილის მსვლელობა (1-ელი გაკვეთილი)

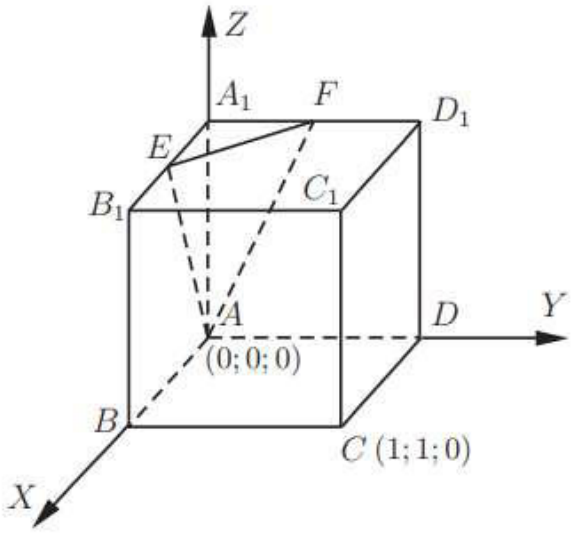
I. ორგანიზაციული მომენტი

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება

მასწავლებელი: – ამოვხსნათ ამოცანა მოცემული ნახაზის მიხედვით.
ამოცანა. ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ: კუბის: ა) წვეროების კოორდინატები;

ბ) წიბოების E და F შუა წერტილების კოორდინატები;

გ) AC_1 დიაგონალის სიგრძე.



III. გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა.

მასწავლებელი: – დღეს უნდა გავეცნოთ ვექტორებს სივრცეში.

სიბრტყეზე ვექტორების შესახებ შეძენილი ცოდნა გაგიადვილებთ მათზე სივრცეში მუშაობას.

IV. ახალი მასალის ახსნა

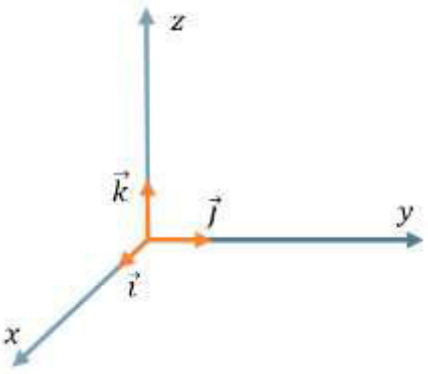
ვექტორი სივრცეში – ისევე, როგორც სიბრტყეზე, ესაა მიმართულების მქონე მონაკვეთი.

ვექტორს სივრცეში აქვს სამი კოორდინატი: x, y, z. ამ კოორდინატების საპოვნელად ვექტორი უნდა მოვდოთ კოორდინატთა სათავეში და დავადგინოთ მისი წვეროს კოორდინატები.

ნებისმიერი $\vec{a}(x;y;z)$ ვექტორი შეგვიძლია კოორდინატებისა და ორტების საშუალებით წარმოვადგინოთ:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

სადაც $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$ და $\vec{k}(0;0;1)$ ორტებია.



– რა განსხვავებაა სიბრტყეზე მოცემულ და სივრცეში მოცემულ ვექტორებს შორის?

– გაიხსენეთ რაც იცით ვექტორების შესახებ სიბრტყეში და მიპასუხეთ კითხვაზე:

– რა ტიპის ვექტორები გვხვდება სიბრტყეზე? (ნულოვანი ვექტორი, კოლინეარული ვექტორები, თანამიმართული ვექტორები, საპირისპიროდ მიმართული ვექტორები, ტოლი ვექტორები.)

– მაინტერესებს თქვენი წარმოდგენები ჩამოთვლილი ვექტორების შესახებ სივრცეში. დაახასიათეთ ნულოვანი ვექტორი სივრცეში. (ვექტორი, რომლის სათავე და ბოლო ემთხვევა ერთმანეთს. მას არც სიგრძე და არც მიმართულება არ გააჩნია.)

– რას იტყვით კოლინეალური ვექტორების შესახებ? როგორი ვექტორები იქნება კოლინეალური სივრცეში? (ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფეებზე მდებარე თანამიმართულნი, ან საპირისპიროდ მიმართული ვექტორები.)

– კომპლანალური ეწოდება ისეთ სამ ვექტორს სივრცეში, რომელთა მოთავსება შესაძლებელია ერთ სიბრტყეში. ორტების სამეული არაკომპლანარული ვექტორების სამეულია.

– რას მეტყვით ტოლი ვექტორების შესახებ სივრცეში? (ტოლი ვექტორები ტოლი სიგრძის თანამიმართული ვექტორებია.)

– ვექტორების ჯამი, სხვაობა და რიცხვზე ნამრავლი სივრცეში ისევე განიმარტება, როგორც სიბრტყეში.

ვექტორთა შეკრებისა და რიცხვზე ნამრავლის წესები სამართლიანია სივრცეში მდებარე ვექტორებისათვისაც.

– ვექტორთა ჯამის რა თვისებები ვიცით სიბრტყეზე? ჩაწერეთ მათემატიკურად.

– როგორ გამოვთვალოთ ორი ვექტორის ჯამის კოორდინატები? (ორი ვექტორის ჯამის კოორდინატები არის შესაბამისი კოორდინატების ჯამის ტოლი.)

მასწავლებელი დაფაზე აწერინებს მაგალითს:

$$\vec{a}(x_1;y_1;z_1)+\vec{b}(x_2;y_2;z_2)=\vec{c}(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2)$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ჯამი $\vec{a}(2;-3;1)+\vec{b}(-1;2;0)$.

ამოხსნა. $\vec{a}(2;-3;1)+\vec{b}(-1;2;0)=\vec{c}(2-1;-3+2;1+0)=\vec{c}(1;-1;1)$.

პასუხი: $\vec{a}(2;-3;1)+\vec{b}(-1;2;0)=\vec{c}(1;-1;1)$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ $\dot{c}=\dot{a}+\dot{b}$,
$\vec{a}(2;-3;1);\ \vec{c}(1;-1;1)$.

ამოხსნა. $\vec{b}$ ვექტორი გამოვსახოთ $\vec{a}$ და $\vec{c}$ ვექტორების გამოყენებით: $\dot{b}=\dot{a}-\dot{c}$.

პასუხი: $\vec{b}(1;-2;0)$.

მასწავლებელი: – ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატები შესაბამისი კოორდინატების რიცხვზე ნამრავლის ტოლია. მაგალითად, $\vec{a}(x;y;z)$-ის λ-ზე ნამრავლი არის : $(\lambda x;\lambda y;\lambda z)$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\vec{c}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ

$\vec{c}=2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b},\ \vec{a}(-3;0;2),\ \vec{b}(4;-2;2)$.

ამოხსნა.

$$2\vec{a}=(2\cdot(-3);2\cdot 0;2\cdot 2)=(-6;0;4);$$

$$\frac{1}{2}\vec{b}=\left(\frac{1}{2}\cdot 4;\frac{1}{2}\cdot(-2);\frac{1}{2}\cdot 2\right)=(2;-1;1)$$

$$\vec{c}=2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b},=\vec{c}(-6-2;\ 0+1;4-1)=\vec{c}(-8;\ 1;3).$$

პასუხი: $\vec{c}(-8;\ 1;3)$.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\bar{a}(2;-5;-8)$ ვექტორის სიგრძე.

ამოხსნა. $\sqrt{2^2+(-5)^2+(-8)^2}=\sqrt{93}$.

პასუხი: $\sqrt{93}$.

V. განმტკიცება.

ხსნიან №1, №3, №5 ამოცანებს.

VI. რეფლექსია

– რა კოორდინატები ექნება ნულოვან ვექტორს სივრცეში?

– როგორ გამოვთვალოთ ვექტორის სიგრძე სივრცეში?

– როგორ დავადგინოთ ვექტორის კოორდინატები სივრცეში?

– რას უდრის ორი ვექტორის ჯამის კოორდინატები სივრცეში?

– რას უდრის ორი ვექტორის სხვაობის კოორდინატები სივრცეში?

– რას უდრის ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატები სივრცეში?

– რომელიმე თქვენგანს თუ აქვს რაიმე შეკითხვა დღევანდელი საკითხების შესახებ?

VII. საშინაო დავალება: № 2, №4, №6 ამოცანები.

მე-2 გაკვეთილი

მიზანი:

- სკალარული ნამრავლისა და ორ ვექტორს შორის კუთხის გამოთვლა სივრცეში;
- ცოდნის განმტკიცება:

  ა) ვექტორების ჯამისა და სხვაობის კოორდინატების გამოთვლა;

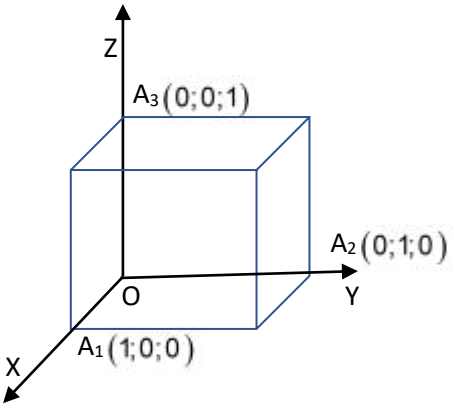
  ბ) ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატების დადგენა;

  გ) ორ ვექტორს შორის კუთხის გამოთვლა სივრცეში.

მე-3 გაკვეთილი

გაკვეთილი დაეთმობა პარაგრაფში მოცემული საკითხების შესახებ შეძენილი ცოდნის განმტკიცებას.

მე-3 გაკვეთილზე წინარე ცოდნის გააქტიურების მიზნით შემოგთავაზებთ ამოცანას ნახაზით.



ამოცანა. ნახაზზე მოცემულია პარალელეპიპედი. ნახაზის მიხედვით დაადგინეთ:

ა) რა სახის პარალელეპიპედია;

ბ) წვეროების კოორდინატები;

ბ) კუთხე $\overrightarrow{A_1A_2}$ ვექტორსა და $\overrightarrow{A_1A_3}$ ვექტორს შორის კოორდინატების გამოყენებით;

გ) $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$ ვექტორის სიგრძე კოორდინატების გამოყენებით.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. ა) (-2;-1;-6); ბ) (6;1;-13); გ) (0,5;-3;1); დ) $(-\sqrt{3};-2)$.

სავ.№2. ა) $\sqrt{16+9+144}=13$; ბ) $\sqrt{25+0+144}=13$;

გ) $\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$; დ) $\sqrt{2+0+0}=\sqrt{2}$.

სავ.№3. ა) 5; ბ) 5; გ) 5; დ) 17; ე) 3; ვ) 2.

სავ.№4. a) $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{k}$; b) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$; g) $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; d) $\vec{a}=-4\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k}$.

სავ.№5. ა) (1;2;3); ბ) (2;3;-4); გ) (1;4;0); დ) (0;2;3); ე). (-7;0;0).

სავ.№6. ა) $\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}$; ბ) $\sqrt{1+144+1}=\sqrt{146}$; გ) $\sqrt{9+16+0}=5$; დ) 1,2.

სავ.№7. ა) (-1;4;-3); ბ) (2;-8;6); გ) (-3;12;-9).

სავ.№8. a) $2\vec{a}+3\vec{b}=(0;10;-14)+(-12;9;18)=(-12;19;4)$;

b) $2\vec{a}+3\vec{b}=(6;-1;2)+(-3;6;15)=(3;5;17)$;

გ) $2\vec{a}+3\vec{b}=(6;-2;0)+(0;-15;3)=(6;-17;3)$.

სავ.№9. $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}=(-2;6;1)-(8;14;-10)=(-10;-8;11)$.

სავ.№10. a) $2\vec{a}+\vec{b}=(-2;14;-7)$, სიგრძეა $\sqrt{4+196+49}=\sqrt{249}$; b) $2\vec{a}+\vec{b}=(-3;3;10)$,

b) $2\vec{a}+\vec{b}=(-3;3;10)$, სიგრძეა $\sqrt{9+9+100}=\sqrt{118}$;

გ) $2\vec{a}+\vec{b}=(2\sin\alpha;2\cos\alpha;0)$, სიგრძეა $\sqrt{4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}=2$;

დ) $2\vec{a}+\vec{b}=5\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$ სიგრძეა $\sqrt{25+4+36}=\sqrt{65}$.

სავ.№11. $2\dot{AB}+\dot{CD}=(12;-6;-2)+(5;-4;-3)=(17;-10;-5)$, სიგრძეა $\sqrt{289+100+25}=\sqrt{414}$.

სავ.№12. ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}=21\cdot\frac{1}{2}=10,5$; ბ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$; გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=8\cdot13\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-52$; დ) 0.

სავ.№13. ა) $\dot{a}\cdot\dot{b}=-8+9+0=1$; ბ) $\dot{a}\cdot\dot{b}=0-3+3=0$;

გ) $\dot{a}\cdot\dot{b}=4+0+6=10$; დ) $\dot{a}\cdot\dot{b}=9-6+0=3$.

სავ.№14. ა) $\cos\alpha=\frac{-9+16-144}{\sqrt{169}\sqrt{169}}=-\frac{137}{169}$; ბ) $\cos\alpha=\frac{25}{169}$; გ) $\cos\alpha=0,48$; დ) $\cos\alpha=\frac{64}{289}$.

სავ.№15. ა) ერთი ვექტორი მიიღება მეორის (-1)-ზე გამრავლებით, ე.ი. საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია და ამიტომ მათ შორის კუთხეა $180°$. ცხადია, იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ გამოვითვლით მათ შორის კუთხის კოსინუსს: $\cos\alpha=\frac{-9-16-1}{26}=-1,\ \alpha=180°$;

ბ) ერთი ვექტორი მიიღება მეორის 2-ზე გამრავლებით, ე.ი. თანამიმართული ვექტორებია და ამიტომ მათ შორის კუთხეა $0°$;

გ) ერთი ვექტორი მიიღება მეორის (-3)-ზე გამრავლებით, ე.ი. საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია, ამიტომ მათ შორის კუთხეა $180°$; დ) $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \alpha=30°$.

სავ.№16. ა) $60°$; ბ) $45°$ გ) $150°$.

სავ.№17. ა) $2-12-5<0\Rightarrow\cos\alpha<0$, ე.ი. ვექტორებს შორის კუთხე ბლაგვია;

ბ) $\cos\alpha>0$, ე.ი. ვექტორებს შორის კუთხე მახვილია;

გ) $\cos\alpha>0$, ე.ი. ვექტორებს შორის კუთხე მახვილია;

დ) $\cos\alpha<0$, ე.ი. ვექტორებს შორის კუთხე ბლაგვია.

სავ.№18. რადგან ვექტორებს შორის კუთხე მართია, ამიტომ მათი სკალარული ნამრავლია 0, ანუ $x^2-4x+4=0,x=2$.

სავ.№19. რადგან ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლია 0, ამიტომ ვექტორებს შორის კუთხე მართია, ე.ი. $S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

სავ.№20. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=a^2-b^2=6-74=-68$.

სავ.№21. $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{a^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4b^2}=\sqrt{25-4\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{2}+64}=7$.

სავ.№22. ა) $\vec{a}=4(12;-3;4)=(48;-12;16)$; ბ) $\vec{a}=-2(-6;8;24)=(12;-16;-48)$.

სავ.№23. $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{55}}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{55}}\Rightarrow S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{5}\cdot\sin\left(180^\circ-\alpha\right)=\frac{\sqrt{46}}{2}$.

სავ.№24. $\cos\alpha=-\frac{5}{13}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=13\cdot14\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)=-70$.

სავ.№25. $\sqrt{1+x^2-2x+1+4-4x+x^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}+\left(x-1{,}5\right)^2}$, უმცირესია $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

შესაძლებელია?

პასუხი: არაა შესაძლებელი, რადგან სამი არაკომპლანარული ვექტორის ჯამი წარმოადგენს ამ ვექტორებით, როგორც წიბოებით, შედგენილი პარალელეპიპედის დიაგონალს.

3.6 ვექტორების გამოყენება გეომეტრიაში (2 სთ)

მიზანი:

ვექტორების გამოყენება გეომეტრიული დებულებების დასაბუთებასა და ამოცანების ამოხსნაში.

წინარე ცოდნის გააქტიურების მიზნით მასწავლებელი სვამს კითხვებს:

1) რაში მდგომარეობს კოსინუსების თეორემა?
2) სამკუთხედის სიმაღლეების რა თვისება იცით?
3) როგორ წრფეს ეწოდება სიბრტყის მართობული?
4) რაში მდგომარეობს წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი?
5) როგორ დავადგინოთ კუთხე ორ აცდენილ წრფეს შორის?
6) რა შემთხვევაშია ორი ვექტორი ურთიერთმართობული?
7) პარალელოგრამის რა თვისება იცით?
8) რა თვისება აქვს პარალელოგრამის დიაგონალებს? რომბის დიაგონალებს? მართკუთხედის დიაგონალებს?

მასწვლებელი: – ყველა ჩამოთვლილი საკითხის გახსენება საჭიროა იმისათვის, რათა წარმატებით დავძლიოთ დღევანდელი გაკვეთილის თემა: ვექტორების გამოყენება გეომეტრიაში. ამასთან დაგვჭირდება და უნდა გავიხსენოთ ვექტორებზე წრფივი მოქმედებების თვისებები (ფრონტალურად გამოჰკითხავს):

მოსწავლეები პასუხობენ:

ნებისმიერი $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებისთვის სრულდება ტოლობები:

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.
- $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=\vec{0}$.
- $\vec{a}\cdot 0=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.
- $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}\right)$.
- $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.
- $1\cdot\dot{a}=\dot{a}$

საჭირო წინარე ცოდნის გახსენების შემდეგ მასწავლებელი ესაუბრება მოსწავლეებს ვექტორების გამოყენების შესახებ სხვადასხვა მეცნიერებაში.

– დღეს ამოვხსნით გეომეტრიის ამოცანებს ვექტორების გამოყენებით.

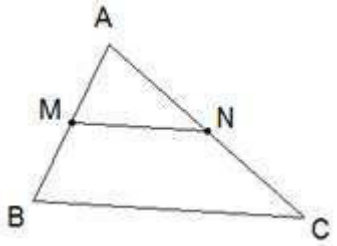
– გეომეტრიაში ვექტორების გამოყენების მეთოდი მოიცავს ოპერაციებს ვექტორებზე (შეკრება, გამოკლება, რიცხვზე გამრავლება, სკალარული ნამრავლი) და შედეგის ინტერპრეტაციას.

ასეთი ამოცანის ამოხსნის ძირითადი ეტაპებია:

1) ამოცანის პირობის გაცნობა-გაანალიზება (სად განიხილება ვექტორები – ორგანზომილებიან თუ სამგანზომილებიან სისტემაში და რას ვეძებთ).
2) ძირითადი ვექტორების აღნიშვნა (მაგალითად, სამკუთხედის გვერდები ან მრავალკუთხედის დიაგონალები).
3) საძიებელი სიდიდის გამოსახვა: ყველა სიგრძე და მიმართულება ვექტორის საშუალებით.
4) ვექტორული ოპერაციების გამოყენება: შეკრება, გამოკლება, რიცხვზე გამრავლება.
5) კუთხის ან სიგრძის გამოსათვლელად სკალარული ნამრავლის ფორმულის გამოყენება $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos\alpha\right)$.
6) მიღებული ვექტორული ტოლობის სკალარულ შედეგთან დაკავშირება.

მაგალითად, ამოვხსნათ:

ამოცანა. ვექტორების გამოყენებით დავამტკიცოთ სამკუთხედის შუა ხაზის თვისება.



მოცემულია ABC. სამკუთხედი *M* და N წერტილები, შესაბამისად, AB და AC გვერდების შუა წერტილებია.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ MN შუა ხაზი BC ფუძის პარალელურია და მისი ნახევრის ტოლია.

დამტკიცება (დაფაზე და რვეულებში).

$\overrightarrow{MN}$ ვექტორი წარმოვადგინოთ ორი სახით:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}, \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}. \end{cases}$$

ამ სისტემის განტოლებათა წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BC}$$

$\dot{MA}$ და $\dot{MB}$ ვექტორების ჯამი ნულოვანი ვექტორია, რადგან $\dot{MA}$ და $\dot{MB}$ ტოლი სიგრძეების კოლინეალური და საპირისპიროდ მიმართული ვექტორებია. ნულოვანია , აგრეთვე, $\dot{AN}$ და $\dot{CN}$ ვექტორთა ჯამი. მაშასადამე, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$. მივიღეთ, რომ სამკუთხედის შუა ხაზი ფუძის ნახევრის ტოლია. ამას გარდა, რადგან $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$, ვასკვნით, რომ ისინი კოლინეალურია და თანამიმართული. რაც ნიშნავს, რომ $\overrightarrow{MN} \parallel \dot{BC}$.

მასწავლებელი საშინო დავალებად დასამტკიცებლად მისცემს ტრაპეციის შუა ხაზის ანალოგიურ თვისებას.

1-ელი გაკვეთილი

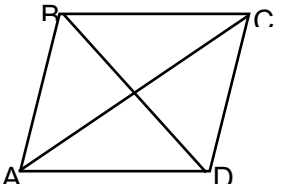
კლასში: ტექსტის №1, №2 ამოცანები და №1, №3, №5 სავარჯიშოები.
საშინაო დავალება: №2, №4, №6 სავარჯიშოები.

მე-2 გაკვეთილი

კლასში: ტექსტის №3, №4 ამოცანები და №7, №9, №11 სავარჯიშოები.
საშინაო დავალება: №8, №10, №12 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები

სავ.№1. მოცემულია ABCD რომბი. AB=BC=CD=AD



$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) =$$

$$= AD^2 - AB^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}.$$

სავ.№2. მოცემულია ABCD მართკუთხედი.

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°.$$

$$AC^2 = \overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC \cdot \cos 90° = AB^2 + AC^2$$

$$DB^2 = \overrightarrow{DB}^2 = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right)^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 90° = AB^2 + BC^2 \text{ . ე.ი. } AC=DB.$$

სავ.№3. გამომდინარეობს ვექტორების კოლინეალურობის განმარტებიდან.

სავ.№4. მოცემულია ABCD პარალელოგრამი.

$$AC^2 + DB^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right)^2 =$$

$$= AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos B + AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 2AB^2 + 2AC^2.$$

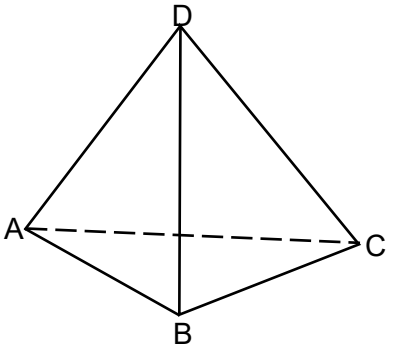
სავ.№5. ვთქვათ, O_1 და O_2 შესაბამისად, AC-ს და BD-ს შუა წერტილებია. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $O_1 = O_2$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ \overrightarrow{AO_2} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{AO_2} \Rightarrow O_1 = O_2.$$

სავ.№6. მოცემულია AB=AC=BC=AD=a.

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} =$$

$$= a^2\cos 60° - a^2\cos 60° = 0.$$



პასუხი: 90°.

სავ. №7. მოცემულია $AD \perp BC$, $AC \perp BD$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ $AB \perp CD$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = 0, \\ \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = 0. \end{cases}$$

მიღებული ტოლობების გამოკლებით მივიღებთ:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DC}.$$

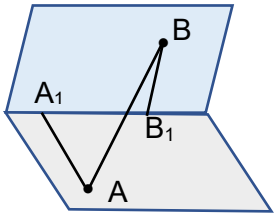
სავ. №8. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B_1B} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{c}$.

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობებს:

$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos(180° - \varphi) = -a\cdot b\cdot\cos\varphi$, მივიღებთ:

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a\cdot b\cdot\cos\varphi.$$



ნახ.4

პასუხი: $AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\varphi}$.

სავ. №9. მე-8 სავარჯიშოში მიღებული პასუხის გათვალისწინებით: $\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{2ab}$.

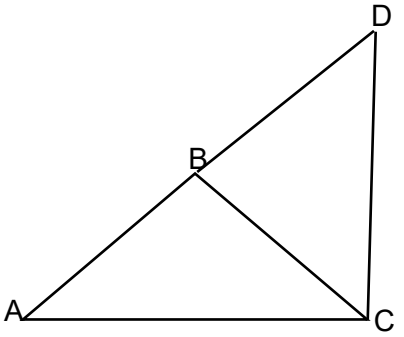
სავ. №10. ვისარგებლოთ მე-9 სავარჯიშოში მიღებული ფორმულით:

ა) $\cos\varphi = \frac{9 + 16 + 24 - 49}{24} = 0 \Rightarrow \varphi = 90°$; ბ) $\cos\varphi = \frac{4 + 25 + 36 - 64}{20} = \frac{1}{20} > 0$, ე.ი. მახვილია.

სავ. №11. ვთქვათ, C წერტილის კოორდინატებია (x;y;z). $\dot{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (5;10;-5), ხოლო $\dot{AC}$ ვექტორის კოორდინატები – (x+3;y+7;z-6). მოცემულობის თანახმად $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, ე.ი. (x+3; y+7; z-6)=(3; 6; -3), აქედან: x=0, y=-1, z=3.

სავ. №12. ვთქვათ, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$, სადაც $\dot{i}$, $\vec{j}$ და $\dot{k}$ ორტებია. საძიებელია კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$, ხოლო $a=b=\sqrt{2}$. ე.ი. საძიებელი კუთხის კოსინუსია 0,5.
პასუხი: 60°.

შესაძლებელია? სამკუთხედის შემთხვევაში შეუძლებელია, რადგან თუ წრფე ორი გადამკვეთი წრფის მართობულია, მაშინ ამ წრფეებზე გამავალი სიბრტყის და შესაბამისად, მესამე გვერდის მართობულიც იქნება. თუ ოთხკუთხედს ორი პარალელური გვერდი აქვს, მაშინ შეგვიძლია იმავე სიბრტყეში ავიღოთ ამ გვერდების მართობული წრფე, რომელიც დანარჩენი გვერდების მართობული არ იქნება.



აბა, სცადე!

ნახაზზე AB=BC=BD, ამიტომ:

$\angle ACD = 90° \quad \uparrow \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right) =$

$= \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0.$

3.7 სიმეტრია და მობრუნება (3 სთ)

გაკვეთილის სტრუქტურა (1-ელი გაკვეთილი)

მიზანი:

- მობრუნების ცნების შემოტანა;
- მობრუნების შესაბამისი მათემატიკური ჩანაწერის გაცნობა;
- მობრუნების თვისებების გაცნობა;
- მობრუნების აგება;

- მობრუნების, ცენტრული და ღერძული სიმეტრიების შესრულება და საკოორდინატო სიბრტყეზე ჩვენება.

რესურსი: ნახაზები. სიმეტრიისა და მობრუნების ამსახველი სურათები

გაკვეთილის მსვლელობა

ორგანიზაციული მომენტი

წინარე ცოდნის გააქტიურება

მასწავლებელი: – დღევანდელი ჩვენი გაკვეთილი სიბრტყის გარდაქმნას ეხება. ჩვენ ზოგიერთი სახის გარდაქმნას უკვე ვიცნობთ წინა კლასებიდან. მაგალითად, სიმეტრიას. გაიხსენეთ, როგორი სახის სიმეტრიას ვიცნობთ. (ცენტრული და ღერძული)

– რას გაიხსენებთ ცენტრულ სიმატრიაზე? (მოსწავლეები პასუხობენ)

– დაასახელეთ ცენტრული სიმეტრიის ცხოვრებისეული მაგალითები.

– როგორი გარდაქმნაა ღერძული სიმეტრია? (პასუხობენ და ცხოვრებისეულ მაგალითებსაც ასახელებენ)

გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა.

დღევანდელი ჩვენი გაკვეთილი ეთმობა გეომეტრიულ გარდაქმნას, რომელსაც მობრუნება ეწოდება. გავეცნობით მასთან დაკავშირებულ ცნებებს, მობრუნების თვისებებს, შევძლებთ მობრუნების ილუსტრირებას.

ფიგურათა მობრუნების თეორია მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა სფეროში გამოიყენება. მათ შორის:

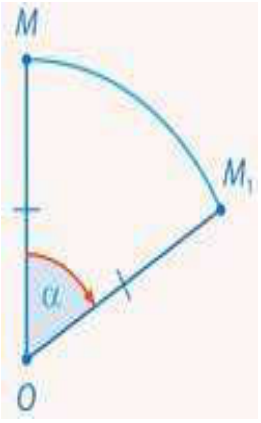
- **კომპიუტერულ გრაფიკაში**. ობიექტების მობრუნება სამგანზომილებიან სივრცეში ანიმაციის, დინამიური სისტემების მოდელირებისა და სამგანზომილებიანი სცენების შექმნის საფუძველია.
- **ნავიგაციაში.** მობრუნება გამოიყენება სივრცეში ობიექტის მოძრაობისა და მდებარეობის გასარკვევად.
- **მათემატიკაში.** მობრუნებას ვიყენებთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტებასა და მათი თვისებების დადგენაში.

ახალი მასალის ახსნა

მობრუნება ეს არის სიბრტყის გარდაქმნა, რომლის დროსაც ყველა წერტილი მობრუნდება ფიქსირებული წერტილის (ცენტრის) ირგვლივ ერთი და იმავე კუთხით, ერთი და იმავე მიმართულებით.



ნახ.1 ა



ნახ.1 ბ

1-ელ ნახაზზე M წერტილი α გრადუსით მობრუნების შედეგად გადავიდა M_1 წერტილში. მაშასადამე, შესრულდა M წერტილის მობრუნება α გრადუსით.

O წერტილი მობრუნების ცენტრია. ის არ მოძრაობს. α მობრუნების კუთხის სიდიდეა (მაგალითად, $\alpha = 25°$ ნიშნავს, რომ მოძრავი წერტილი $25°$-ით მობრუნდა (ნახ. 1 ა) საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო $\alpha = -32°$ ნიშნავს, რომ წერტილი $32°$-ით მობრუნდა საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (აჩვენებს ნახ 1 ბ).

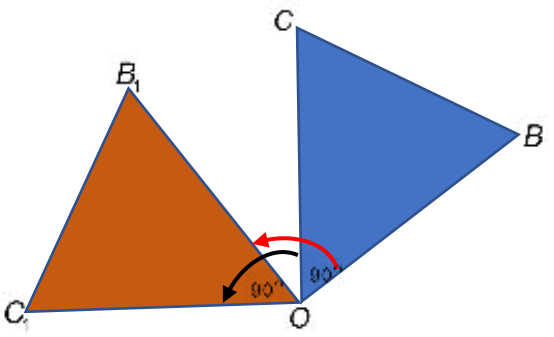
– გავეცნოთ მობრუნების თვისებებს:

- მობრუნებისას წრფე გადადის წრფეში;
- მობრუნებისას მონაკვეთი გადადის მონაკვეთში;
- მობრუნება ინახავს წერტილებს შორის მანძილს;
- მობრუნებისას ფიგურა გადადის მის ტოლ ფიგურაში;
- მობრუნება ინახავს კუთხეს.

ახლა გავეცნოთ ფიგურის მობრუნების აგების ალგორითმს. იმუშავეთ რვეულებში ჩემთან ერთად. შევასრულოთ BCO სამკუთხედის მობრუნება $90°$-ით.

1) ავირჩიოთ მობრუნების O ცენტრი და α კუთხე $(90°)$, რომლითაც უნდა შევასრულოთ მობრუნება.

2) O ცენტრის მიმართ $90°$-ით მოვაბრუნოთ სამკუთხედის OB გვერდი. ამით სამკუთხედის B წვერო გადავიდა B_1 წერტილში, ხოლო OB მონაკვეთი OB_1 მონაკვეთში. ანალოგიურად შევასრულოთ OC მონაკვეთის მობრუნება OC_1-ში. შევაერთოთ O და C_1 წერტილები. BCO სამკუთხედის $90°$-ით მობრუნებით მივიღეთ $\triangle B_1C_1O$.



მასწავლებელი:

– რა შეგიძლიათ თქვათ ამ სამკუთხედების შესახებ? (სამკუთხედები ტოლია.)

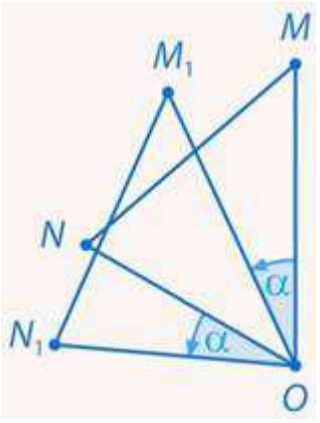
– დაასაბუთეთ მათი ტოლობა. ($OB = OB_1$, $OC = OC_1$, $CB = C_1B_1$, რადგან მობრუნება მონაკვეთის სიგრძეს ინახავს.)

წინადადებას „BCO სამკუთხედის $90°$-ით მობრუნებით მივიღეთ B_1C_1O სამკუთხედი“ მათემატიკურად ასე ჩავწერთ

$$R_0^{90°}(\triangle OBC) = \triangle OB_1C_1.$$

გამოვიყენეთ მობრუნების თვისება, რომ იგი მანძილებს ინახავს. დავამტკიცოთ რომ ეს მართლაც ასეა.

მოვაბრუნოთ M და N წერტილები O ცენტრის მიმართ α კუთხით (ნახ. 2). მივიღებთ მათ ასახვას M_1 და N_1 წერტილებში. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $MN=M_1N_1$.



ნახ.2

ამისათვის უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\Delta MON = \triangle M_1ON_1$. მართლაც, მათი კუთხეები O წეროსთან ტოლია, რადგან

$$\angle MON = \alpha + \angle M_1ON, \quad \angle M_1ON_1 = \alpha + \angle M_1ON.$$

ამასთან, $OM = OM_1$, $ON = ON_1$.

მაშინ $\Delta MON = \triangle M_1ON_1$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად.

მაშასადამე, მობრუნება ინახავს მანძილებს წერტილებს შორის. აქვე შეგვიძლია დავძინოთ, რომ მობრუნება ინახავს კუთხეებს.

– იმსჯელეთ შერჩეული ცენტრის მიმართ 180-გრადუსიანი კუთხით მობრუნების შესახებ.

ანალიზის შემდეგ ადგენენ, რომ 180-გრადუსიანი კუთხით მობრუნება ცენტრული სიმეტრიაა. აგებენ შესაბამის ნახაზს.

განმტკიცება.

ხსნიან №9, №17 სავარჯიშოებს.

მასწავლებელი: – წაიკითხეთ გაკვეთილის ტექსტში მოცემული 1-ელი ამოცანა და მისი ამოხსნა. გაიაზრეთ ამოცანის შინაარსი და ამოხსნის გზა. დაფასთან გამოვიდეს მსურველი და ნახაზის გამოყენებით აგვიხსნას როგორაა ამოცანა ამოხსნილი.

ამის შემდეგ ხსნიან №10, 12 ამოცანებს.

რეფლექსია

– რა თემაზე ვიმუშავეთ დღეს?

– რას წარმოადგენს მობრუნება?

– რა არის მობრუნებისას უძრავი? (მობრუნების ცენტრი.)

– რას წარმოადგენს მობრუნებათა კომპოზიცია?

საშინაო დავალება: №11, №16, №23 ამოცანები.

მეორე გაკვეთილი

მიზანი:

- ცენტრული და ღერძული სიმეტრიების შესახებ ცოდნის გაღრმავება;
- მობრუნების, ცენტრული და ღერძული სიმეტრიების ჩაწერა კოორდინატების საშუალებით;
- მობრუნების, ცენტრული და ღერძული სიმეტრიების დემონსტრირება.

რესურსები: მობრუნებისა და სიმეტრიის ამსახველი ნახაზები, ნახატები, ფოტოები, ფერადი ცარცები.

გაკვეთილის მსვლელობა

I. ორგანიზაციული მომენტი – 2 წთ

მოსწავლეთა დასწრების შემოწმება, განწყობის შექმნა გაკვეთილის მოსასმენად.

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება –7 წთ

მასწავლებელი: – დაასახელეთ გეომეტრიის ის ნაწილი, რომელსაც დღეს ვსწავლობთ (გეომეტრიული გარდაქმნები)

– რომელ გარდაქმნებს ვიცნობთ?

– რა გარდაქმნაა მობრუნება? ცენტრული სიმეტრია? ღერძული სიმეტრია?

– აჩვენეთ მოცემულ ნახატებზე, რომელია მობრუნება, რომელი ცენტრული სიმეტრია და რომელი ღერძული სიმეტრია. ეს ყველაფერი თქვენ წინა კლასებშიც გაქვთ ნასწავლი.



III. გაკვეთილის თემის გაცნობა. – 2 წთ

მასწავლებელი: – დღეს ძალიან საინტერესო თემაზე უნდა ვიმუშაოთ. აბა, ნახატების მიხედვით ვინ მიხვდება, რა არის ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის თემა.

– დიახ, სწორად მიხვდით, ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის თემა არის სიმეტრია. დღეს გავიხსენებთ და გავიღრმავებთ ცოდნას სიმეტრიის შესახებ.

– სიმეტრიის ცნება წარმოიშვა ცოცხალი ორგანიზმების, ადამიანის გარშემო არსებული ბუნების შესწავლისას. სიტყვა „სიმეტრია“ ბერძნული წარმოშობისაა და ნიშნავს „თანაზომადს“, ნაწილების ერთნაირად განლაგებას.

IV. გაკვეთილის თემაზე მუშაობა, ცოდნის გაღრმავება, განმტკიცება – 12 წთ

მასწავლებელი:

– როგორი გარდაქმნაა ცენტრული სიმეტრია?

– მოცემულთაგან რომელ ნახატებსა და ნახაზებში ხედავთ ცენტრულ სიმეტრიას?

– გავიხსენოთ წინა გაკვეთილიდან, თუ როდისაა ცენტრული სიმეტრია მობრუნება.

– რა უნდა იყოს მოცემული და როგორ უნდა ავაგოთ მოცემული ფიგურის ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურა?

აჩვენებს საკოორდინატო სისტემას სიბრტყეზე (ბადის ჩვენებით). გამოჰყავს 2 მოსწავლე.

- ერთს აძლევს მონაკვეთს ბოლოების გარკვეული კოორდინატებით და სთხოვს მისი სიმეტრიული მონაკვეთის აგებას სათავის მიმართ.
- მეორესაც აძლევს ბადიან საკოორდინატო სისტემას და მასზე მოცემულ სამკუთხედს. სთხოვს ააგოს ამ სამკუთხედის სიმეტრიული სამკუთხედი სათავის მიმართ.

მასწავლებელიც და მოსწავლეებიც, მუშაობენ რა რვეულებში, ყურადღებით ადევნებენ თვალს დაფასთან მომუშავეებს. შეცდომით გაკეთებული სვლის შემთხვევაში გაასწორებენ შეცდომას.

მასწავლებელი (სამუშაოს შესრულების შემდეგ): – ჩამოაყალიბეთ ფიგურის ცენტრულად სიმეტრიული ფიგურის აგების ალგორითმი.

– რა ფიგურა აისახება თავის თავში ცენტრულად სიმეტრიული გარდაქმნისას? (წრე და წრეწირი).

– ფიგურას, რომელიც ცენტრული სიმეტრიით თავის თავში აისახება, ცენტრულ - სიმეტრიული ფიგურა ეწოდება.

– ვის შეუძლია ცენტრული სიმეტრიის თვისებების ჩამოყალიბება? – ცენტრული სიმეტრიით მიღებული ფიგურები ტოლი ფიგურებია. ცენტრული სიმეტრიით გარდაქმნა არ ცვლის არცკუთხისა და არც მონაკვეთის ზომას.

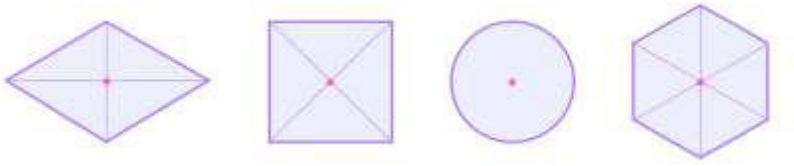
– არის თუ არა ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა წრფე? (წრფე ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურაა. მისი ყოველი წერტილი მისივე სიმეტრიის ცენტრია).

– არის თუ არა ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა პარალელოგრამი? (დიახ, ცენტრულ-სიმეტრიული ფუგურაა პარალელოგრამი).

– რა არის პარალელოგრამის სიმეტრიის ცენტრი? (მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი).

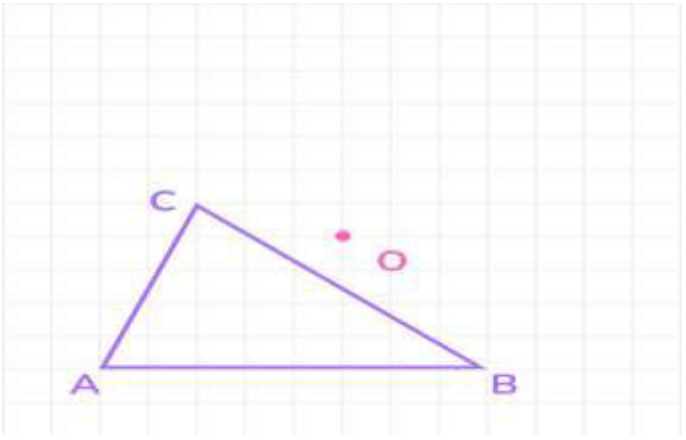
– არის თუ არა ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა წესიერი n-კუთხედი? (არის ლუწი n-ის შემთხვევაში).

– დაასახელეთ სურათზე მოცემული ფიგურების სიმეტრიის ცენტრები.



–რომელი წერტილია საკოორდინატო სიბრტყეზე ორივე ღერძის საერთო სიმეტრიის ცენტრი?

– რომელია საკოორდინატო სიბრტყეზე O ცენტრის მიმართ (x;y) წერტილის მიმართ სიმეტრიული წერტილი? ((-x;-y).)



V. დამოუკიდებელი სამუშაო – 4 წთ

დახაზე სამკუთხედი და მის გარეთ მონიშნე წერტილი. ააგე ამ სამკუთხედის სიმეტრიული სამკუთხედი მონიშნული წერტილის მიმართ.

მოსწავლეები ასრულებენ დავალებას. მასწავლებელი აკვირდება, ეხმარება საჭიროების შემთხვევაში და აძლევს განმავითარებელ უკუკავშირს.

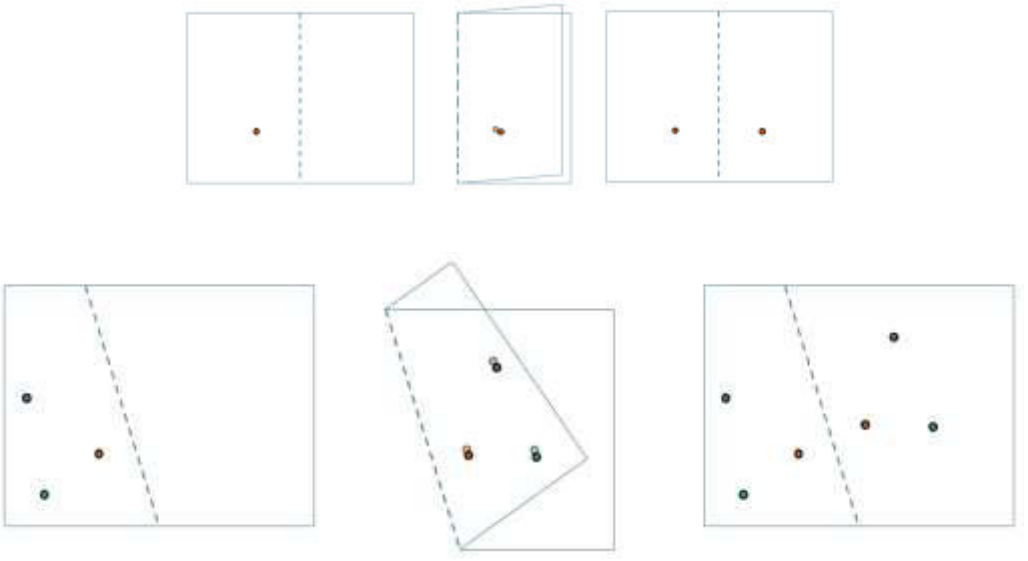
VI. განმტკიცება 2 – 12წთ

მასწავლებელი აჩვენებს სურათებს და სვამს კითხვას:

– რა საერთო მახასიათებელ ნიშანს მოუძებნით ნახატზე მოცემულ ფოთოლს, პეპელას და ჭიამაიას? (ისინი ღერძულად სიმეტრიული ფიგურებია)



მასწავლებელი – ორად დაკეცილი ფურცელზე ფანქრის წვერის ჩხვლეტით აჩვენებს მოცემული წერტილის ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილის მიღების პრაქტიკულ მაგალითს.

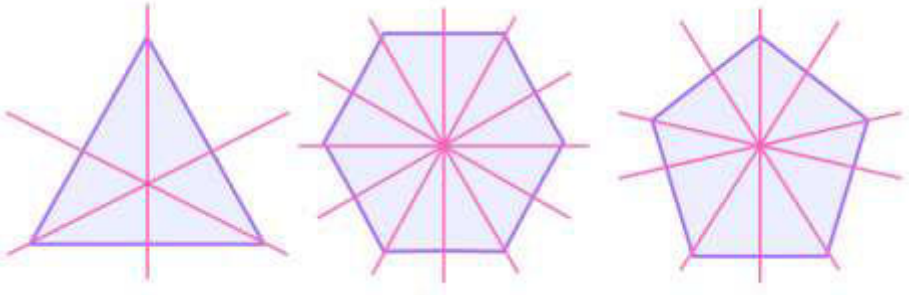


მასწავლებელი საუბრობს ღერძულ სიმეტრიაზე და იმავე ნახატებზე (ოთხივეზე) აჩვენებენ ღერძულად სიმეტრიულ წერტილებს, ასახელებენ შესაბამის სიმეტრიის ღერძებს.

მასწავლებელი: – შეგიძლიათ დაასახელოთ ჩვენ გარსემო არსებული ღერძული სიმეტრიის მაგალითები? (ფოთოლი, პეპელა, ჭიამაია, სხვადასხვა ყვავილები, არქიტექტურული ნაგებობები და სხვ.)

– რას წარმოადგენს ღერძული სიმეტრია?

– შეგიძლიათ დაასახელოთ გეომეტრიაში არსებული ღერძული სიმეტრიის მაგალითები? (კუთხე, ტოლფერდა სამკუთხედები, მართკუთხედი, რომბი წრე)

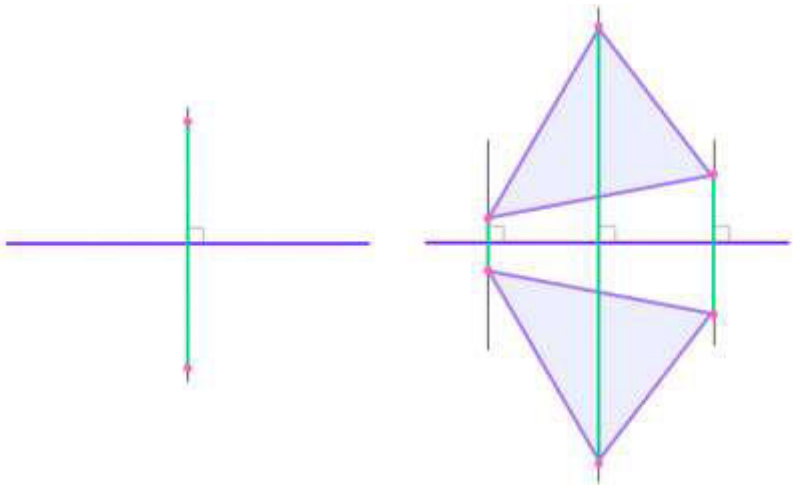


მსჯელობენ ნახაზზე წარმოდგენილი ფიგურების სიმეტრიის ღერძებზე.

– შევადგინოთ მოცემული მრავალკუთხედის ღერძულად სიმეტრიული მრავალკუთხედის აგების ალგორითმი.

1) გავავლოთ სიმეტრიის **a** ღერძი, რომლის მიმართაც უნდა ავაგოთ ფიგურა.
2) მოცემული ფიგურის ყოველი წვეროსთვის ავაგოთ მისი სიმეტრიული წერტილი **a** ღერძის მიმართ.
3) შევაერთოთ მონიშნული წერტილები.

– ავაგოთ ღერძულად სიმეტრიული ფიგურები.



ხსნიან №4, № 7, №8 სავარჯიშობს.

VII. რეფლექსია – 4 წთ

– რა თემაზე ვიმუშავეთ დღეს?

– ჩამოთვალეთ სიმეტრიის სახეები.

– როგორ იცვლება წერტლის კოორდინატები კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით?

– როგორ იცვლება წერტლის კოორდინატები ორდინატათა (აბსცისთა) ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიით?

– თქვენთვის უპასუხეთ კითხვებს:

- რა ვისწავლე?
- რა გამიჭირდა?
- რა შემიძლია უკვე დამოუკიდებლად?

VIII. საშინაო დავალება – 2 წთ.

№1, №3, №5, №6 ამოცანები (განმარტებით).

მესამე გაკვეთილი

მესამე გაკვეთილზე მოსწავლეები იმუშავებენ ღერძულ სიმეტრიაზე საკოორდინატო სიბრტყეზე და სიმეტრიითა და მობრუნებით შედგენილ კომპოზიციაზე.

კლასში იმუშავებენ მე-4 ნახატზე მოცემულ გარდაქმნებზე და №14, №15, №18, №19, №22 ამოცანებზე.

საშინაო დავალება: №13, №20, №21 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№17. პასუხი: ა) (0;1); ბ) (-1;0); გ) (0;-1); დ) (1;0).

სავ.№18. სასურველია, დაიხაზოს საკოორდინატო სიბრტყეზე. **პასუხი:** (5;-5).

სავ.№19. ა) AC დიაგონალის შუა წერტილის კოორდინატებია (0;0,5), ამიტომ B წერტილის კოორდინატები იქნება (-0,5;0,5), ხოლო D წერტილის კოორდინატები (0,5;0,5);

ბ) B(-0,5;0,5), C(-1;0), D((-0,5; 0,5).

სავ.№20. აბსცისების საპოვნელად უნდა დავადგინოთ რიცხვით ღერძზე 0-ის მიმართ -1-ისა და 2-ის სიმეტრიული წერტილები. ესენია 1 და -2. ორდინატების საპოვნელად უნდა დავადგინოთ -3-ს მიმართ -2-ისა და 2-ის სიმეტრიული წერტილები. ესენია -4 და -8.

პასუხი. $A_1(1;-4)$, $C_1(-2;-8)$.

სავ.№21. ა) აბსცისა მიიღებს მნიშვნელობებს 0-დან 1-მდე (ჩათვლით), ხოლო ორდინატა

-1-დან 1-მდე (ჩათვლით. ვაჩვენოთ ნახაზზე).

ბ) ჯამი შეიცვლება. მაგალითად, -45°-ით მობრუნებით ჯამი იქნება ნული, ხოლო 45°-ით მობრუნებით ჯამი იქნება $\sqrt{2}$.

გ) არ შეიცვლება, იქნება 1-ის ტოლი, ანუ კოორდინატთა სათავემდე მანძილის ტოლი.

სავ.№22. საკოორდინატო სიბრტყეზე უნდა დაიხაზოს ერთეულოვანი წრე და მოინიშნოს შესაბამისი წერტილები. კოორდინატები გამოითვლება პითაგორას თეორემის გამოყენებით.
შევნიშნოთ, რომ ეს კოორდინატები ტრიგონომეტრიიდან იციან.

პასუხი: ა) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ბ) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ გ) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

სავ.№23. თუ შევასრულებთ 19°-ით თანმიმდევრობით 20-ჯერ მობრუნებას, მივიღებთ მობრუნებას 380°-ით, რაც იგივე 20°-ით მობრუნებაა.

სავ.№24. ვთქვათ, კუთხე შეიქმნა x წუთში. ერთ წუთში წუთების ისარი მობრუნდება 360:60=6 გრადუსით, ხოლო x წუთში 6x გრადუსით. საათის ისარი ერთ წუთში მობრუნდება 30:60=0,5 გრადუსით. მივიღეთ განტოლება: 6x-0,5x=55. x=10. **პასუხი:** 10წუთში.

სავ.№25. პასუხი: $\frac{360^\circ}{n}$.

შესაძლებელია?

შესაძლებელია. მაგალითად, წრფის პერპენდიკულარული ყველა წრფე მისი სიმეტრიის ღერძია, ხოლო წრფის ყველა წერტილი – მისი სიმეტრიის ცენტრი.

3.8 ჰომოთეტია და პარალელური გადატანა (3 სთ)

მიზანი:

- ჰომოთეტიისა და პარალელური გადატანის განმარტება და დემონსტრირება;
- ჰომოთეტიისა და პარალელური გადატანის კომპოზიციის დემონსტრირება.

პარაგრაფის შესწავლის შემდეგ მოსწავლემ **უნდა შეძლოს**:

- ჰომოთეტიისა და პარალელური გადატანის შესრულება;
- ჰომოთეტიისა და პარალელური გადატანის კომპოზიციის შედგენა;
- თემასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნა.

გაკვეთილის მსვლელობა

პირველი გაკვეთილი

მიზანი:

- ჰომოთეტიის ცნების შემოტანა;
- შემოტანა ცნებების: ჰომოთეტიის ცენტრი, ჰომოთეტიის კოეფიციენტი;
- მოცემული ფიგურის ჰომოთეტიური ფიგურის აგება.

ორგანიზაციული მომენტი

წინარე ცოდნის გააქტიურება

მასწავლებელი:

1) სვამს კითხვებს:

– რა სახის გარდაქმნას ვიცნობთ?

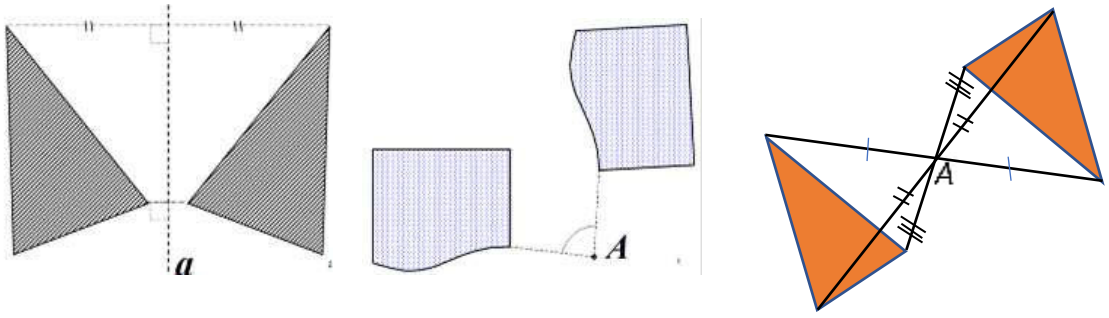
– როგორ გარდაქმნას ჰქვია ცენტრული სიმეტრია? ღერძული სიმეტრია? მობრუნება?

– რა თვისებები აქვს ღერძულ სიმეტრიას? მობრუნებას?

– როგორ ფიგურებს ჰქვია მსგავსი?

– ჩამოაყალიბეთ სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები.

2) რა სახის გარდაქმნებია ნახაზზე მოცემული?



– რა თვისებებით ხასიათდება ღერძული სიმეტრია? მობრუნება?

პასუხობენ:

- წრფე გადადის წრფეში, სხივი – სხივში, მონაკვეთი – მონაკვეთში.
- უცვლელი რჩება მონაკვეთის სიგრძე.
- უცვლელი რჩება კუთხის სიდიდე.

– რა დასკვნას ჩამოაყალიბებთ სამივე თვისების გაერთიანებით? (სამივე გარდაქმნისას ფიგურა გადადის მის ტოლ ფიგურაში).

გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა

მასწავლებელი მოსწავლეებს აცნობს **გაკვეთილის თემას და მიზანს** და მასალის გადაცემას იწყებს ჰომოთეტიის ცნების შემოტანით.

მასწავლებელი: – დღეს ისეთ გარდაქმნას გავეცნობით, რომელიც არ ინახავს მონაკვეთის სიგრძეს, ანუ მანძილს წერტილებს შორის. ამ გარდაქმნას ჰომოთეტია ჰქვია.

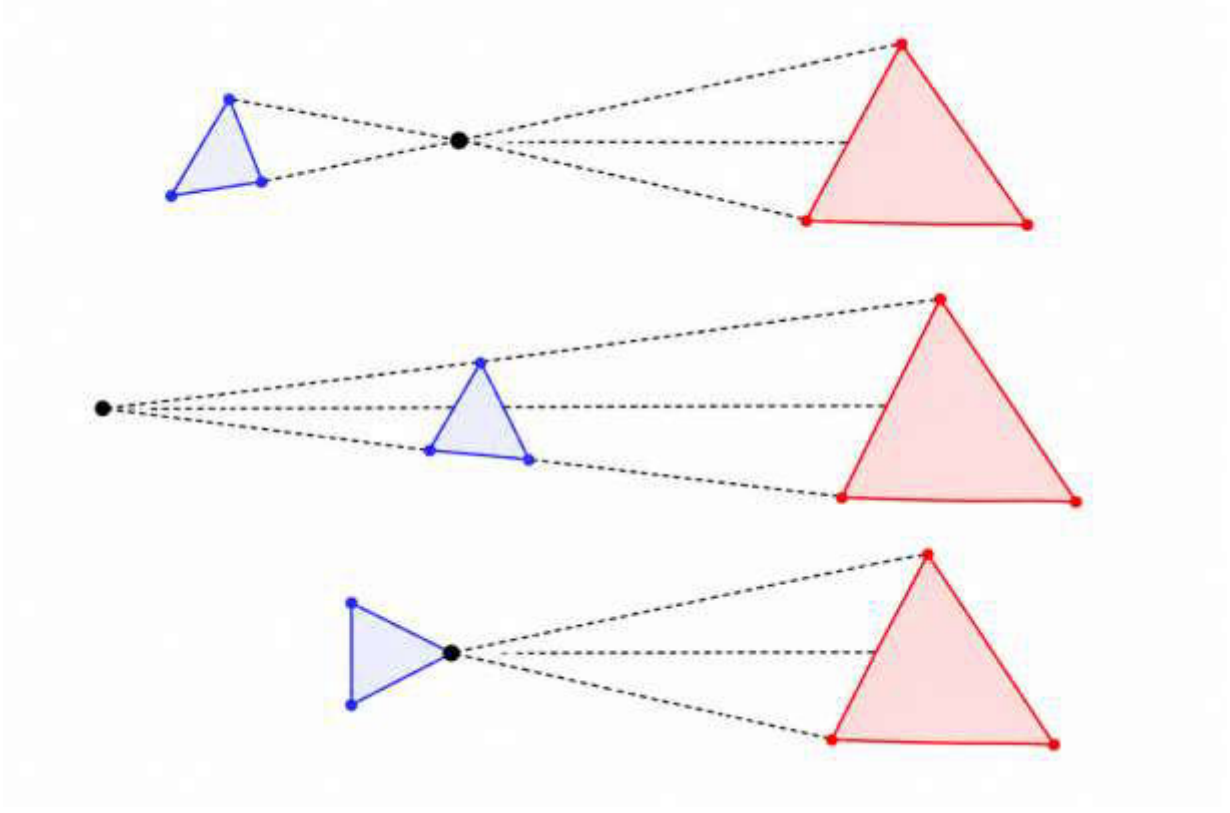
ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი ხსნის გაკვეთილს (სახელმძღვანელოს მიხედვით).

მასწავლებელი:

– ავაგოთ AB მონაკვეთის ჰომოთეტიური ფიგურა (ტექსტის №1 ამოცანა).

– ჰომოთეტიის ცენტრი შეიძლება მდებარეობდეს ნებისმიერად შერჩეულ ადგილზე (შერჩეული ფიგურის გარეთ ან ფიგურის შიგნით ან ფიგურის საზღვარზე).



დავხაზოთ სამკუთხედი და ავაგოთ მისი ჰომოთეტიური ფიგურა.

ჩვენ შევარჩიოთ:

- O ცენტრი სამკუთხედის გარეთ (ხაზავენ დაფაზე და რვეულებში);
- კოეფიციენტი $k = 2$.

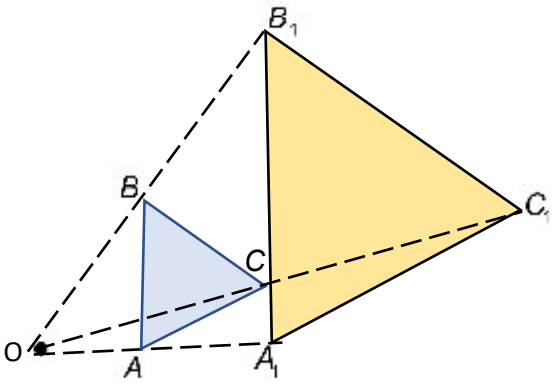
ეს ნიშნავს, რომ ჰომოთეტიური სამკუთხედის ასაგებად უნდა შევასრულოთ შემდეგი მოქმედებები:

1) O წერტილიდან სამკუთხედის A, B, C წვეროებზე გავავლოთ OA, OB, OC სხივები;

2) გავზომოთ მანძილები O წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე (OA, OB, OC);

3) თითოეულ სხივზე O-დან გადაიზომოს იმაზე 2-ჯერ გრძელი მონაკვეთი, რაც არის მანძილი O წერტილიდან სამკუთხედის წვერომდე

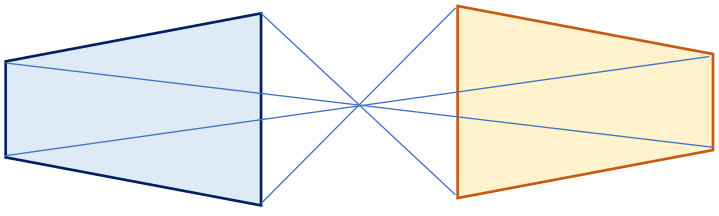
($OB_1 = 2 \cdot OB,\ OA_1 = 2 \cdot OA,\ OC_1 = 2 \cdot OC$);



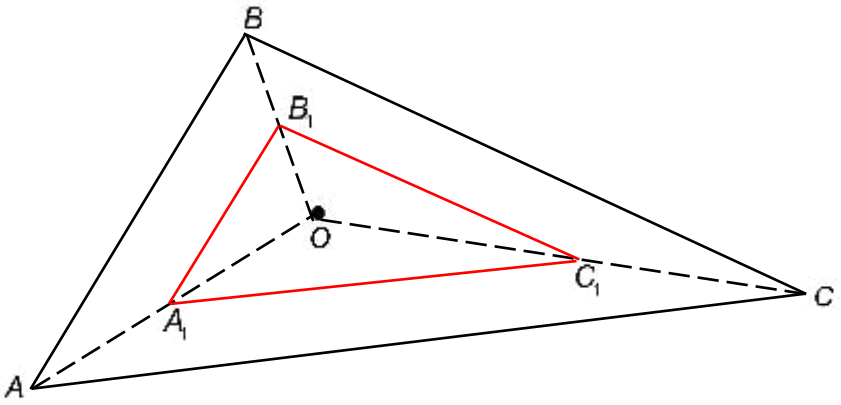
4) სხივებზე მონიშნული წერტილები შევაერთოთ მონაკვეთებით. შედეგად მივიღეთ მოცემული ABC სამკუთხედის მსგავსი $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი, რომლის ფართობი მოცემული სამკუთხედის ფართობზე k^2 -ჯერ, ანუ ჩვენ შემთხვევაში 4-ჯერ დიდია.

აგებენ ნახაზებს:

- $k < 0$ -თვის. გამოაქვთ შესაბამისი დასკვნა.
- $0 < k < 1$ -თვის და ასკვნიან, რომ მიღებული ჰომოთეტიური ფიგურის ფართობი საწყისი ფიგურის ფართობზე ნაკლებია.
- $k = 1$-თვის და ასკვნიან, რომ მიღებული ჰომოთეტია იგივური გარდაქმნაა.
- $k = -1$ შემთხვევის ჩვენება უმჯობესია სამკუთხედისაგან განსხვავებული ფიგურის ჰომოთეტიით გარდაქმნის ჩვენება, რადგან სამკუთხედზე უკვე იმუშავეს.



მასწავლებელი აცნობს ჰომოთეტიის მათემატიკური ჩანაწერისა და წაკითხვის წესებს. აგებენ ნახაზს იმ შემთხვევისას, როდესაც ცენტრი ფიგურის შიგნითაა.



განმტკიცება. მუშაობენ №2, №4, №5, №6, №7 სავარჯიშოებზე.

დამოუკიდებელი სამუშაო - №9 ამოცანა.

რეფლექსია

მასწავლებელი:

– რა არის ჰომოთეტია? (ჰომოთეტია არის გარდაქმნა).

– როგორი გარდაქმნაა ჰომოთეტია, როცა k>0? (რომლის დროსაც ყოველი A წერტილი გადადის OA სხივზე მდებარე შესაბამის A_1 წერტილში ისე, რომ $\frac{OA_1}{OA} = k$.

– რას წარმოადგენს O წერტილი? (O ფიქსირებული წერტილია.)

– რა არის k ? (k ჰომოთეტიის კოეფიციენტია.)

– როგორი რიცხვია k ?

– იმსჯელეთ იმ შემთხვევაზე, როცა:

ა) $k > 0$ (A და A_1 წერტილები ცენტრის ერთ მხარეს მდებარეობენ) ;

ბ) $k < 0$ (A და A_1 წერტილები ცენტრის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ) ;

გ) $k = -1$ (ჰომოთეტიის გარდაქმნა ცენტრული სიმეტრიაა);

დ) თუ ჰომოთეტიის ცენტრი საკოორდინატო სისტემის ათვლის სათავეს ემთხვევა, მაშინ $M(x;y;z)$ წერტილი გადადის $M'\left(x';y';z'\right)$ წერტილში, სადაც

$$x' = k \cdot x, \quad y' = k \cdot y, \quad z' = k \cdot z.$$

საშინაო დავალება: №1, №3, №8, №10 ამოცანები.

მეორე გაკვეთილი

მიზანი:

- პარალელური გადატანისა და მისი თვისებების გაცნობა;
- გეომეტრიული ფიგურის პარალელური გადატანის შესრულება;
- ამოცანების ამოხსნა პარალელური გადატანის თემაზე;
- ცოდნის განმტკიცება სიმეტრიის შესახებ;
- ლოგიკური აზროვნების, საკუთარი ნააზრევის დაცვისა და დასკვნის ჩამოყალიბების უნარების განვითარება.

გაკვეთილის მსვლელობა

ორგანიზაციული მომენტი

წინარე ცოდნის გააქტიურება

მასწავლებელი: – სანამ ახალი მასალის შესწავლაზე გადავალთ, გავიხსენოთ დღეისთვის საჭირო საკითხები. მიპასუხეთ კითხვებზე:

– რა სახის გარდაქმნებს ვიცნობთ?

– რას წარმოადგენს ჰომოთეტია? მობრუნება?

– რა სახის სიმეტრიას ვიცნობთ?

– რა თვისებები აქვს ცენტრულ სიმეტრიას? ღერძულ სიმეტრიას?

– თუ ჰომოთეტია ცენტრული სიმეტრიაა, მაშინ რას უდრის მისი კოეფიციენტი?

– როგორ წრფეებს ეწოდება პარალელური?

– ჰომოთეტიაც ინახავს მონაკვეთის სიგრძესა და კუთხის სიდიდეს? (კუთხის სიდიდეს ინახავს, მონაკვეთის სიგრძეს არ ინახავს, მას $|k|$ – ჯერ სცვლის. ჰომოთეტიური გარდაქმნისას მონაკვეთის სიგრძე მხოლოდ კერძო შემთხვევაში რჩება უცვლელი. ეს მაშინ, როდესაც $k = \pm 1$.)

– რა არის ვექტორი? (მიმართული მონაკვეთი)

– როგორ ვექტორებს ეწოდება ტოლი?

ამოცანა. $A'B'C'$ სამკუთხედი ცენტრულად სიმეტრიულია ABC სამკუთხედის. $AB = 3,\ BC = 5,\ AC = 7$. რას უდრის $A'B'C'$ სამკუთხედის პერიმეტრი?

გაკვეთილის თემის გაცნობა

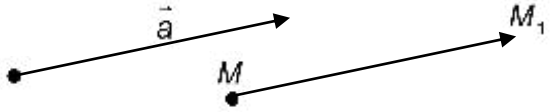
მასწავლებელი აცნობს გაკვეთილის თემასა და მიზანს.

ახალი მასალის ახსნა.

– დახაზეთ ვექტორი და სამკუთხედი. სამკუთხედი გადაიტანეთ ამ ვექტორის მიმართულებით. რა შეიცვალა? რა არ შეიცვალა?

– თქვენ შეასრულეთ სამკუთხედის პარალელური გადატანა. ჩამოაყალიბეთ პარალელური გადატანის თქვენეული განმარტება. (გარდაქმნაა, რომლის დროსაც ფიგურის ყველა წერტილი ერთი და იმავე მიმართულებით, ერთი და იმავე მანძილით გადაადგილდება).

– დიახ, მოცემულ $\vec{a}$ ვექტორით პარალელური გადატანა არის ასახვა, რომლის დროსაც M წერტილი გადადის M_1 წერტილში ისე, რომ $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$.



– პარალელური გადატანის რა მაგალითების დასახელება შეგვიძლია რეალური ცხოვრებიდან? (ფეხსაცმლის ძირის ნაკვალევი, შენობის ფანჯრები, დენის ბოძები ქუჩის გასწვრივ, ნაქარგები, ნაქსოვები, მაქმანების ფიგურები, ნახატები, ავეჯის გადაადგილება ოთახში, სხეულის დაცურება დახრილ სიბრტყეზე და სხვ.)



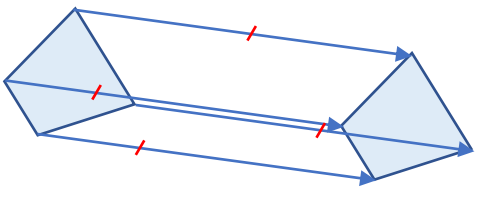


მასწავლებელი: – ახლა ვნახოთ, თუ როგორ უნდა შევასრულოთ მრავალკუთხედის პარალელური გადატანა.

მრავალკუთხედის პარალელური გადატანა სწორად რომ შევასრულოთ, ამისათვის უნდა ვიცოდეთ გადატანის მიმართულება და მანძილი, რა მანძილზეც გადატანა უნდა შევასრულოთ. უნდა შემოვიტანოთ საჭირო მიმართულებისა და სიგრძის ვექტორი. ამ ვექტორს მოვდებთ მრავალკუთხედის წვეროებზე და მოვნიშნავთ ვექტორის წვეროსთან მდებარე წერტილებს. ყველა წერტილის მონიშვნის შემდეგ შევაერთებთ მათ წყვილ-წყვილად. მივიღებთ საწყისი ფიგურის ტოლ ფიგურას.

აგებენ: მონაკვეთის, სამკუთხედის, ტრაპეციის პარალელურ გადატანას და იმის მიხედვით ასკვნიან, რომ პარალელურ გადატანას ახასიათებს თვისებები:

1) მონაკვეთი გადააქვს მის ტოლ მონაკვეთში;
2) კუთხე გადააქვს მის ტოლ კუთხეში;
3) წრე გადააქვს წრეში;
4) ნებისმიერი მრავალკუთხედი გადააქვს მის ტოლ მრავალკუთხედში;

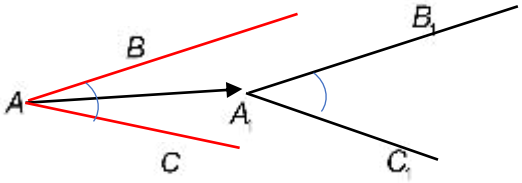


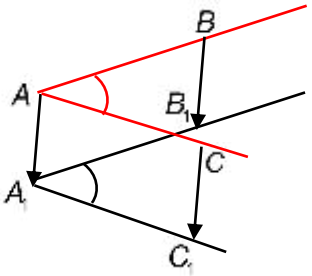
5) მართობული წრფეები გადააქვს მართობულ წრფეებში.

განმტკიცება. ამოცანების ამოხსნა.

ამოცანა. შევასრულოთ კუთხის პარალელური გადატანა.

ნახაზი მოსწავლეებმა სხვადასხვა ვარიანტად შეიძლება შეასრულონ.



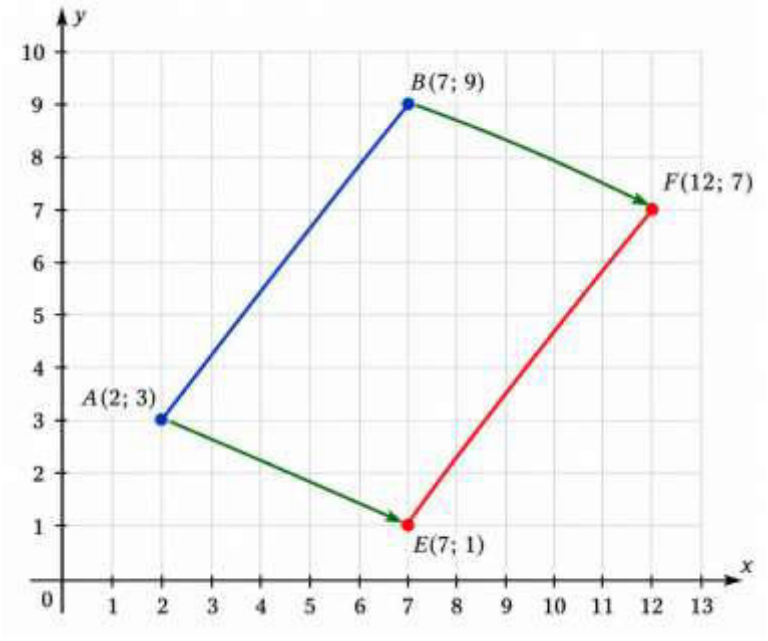


მასწავლებელი:

– როგორც ვხედავთ, პარალელური გადატანისას ფიგურის ყველა წერტილი ერთი და იმავე მანძილით გადაადგილდება ერთი მიმართულებით. ასეთი გარდაქმნისას ფიგურა ინარჩუნებს თავის ფორმასა და ზომას. რა იცვლება? (მისი მდებარეობა.)

– ახლა ვნახოთ, რა ცვლილებებს განიცდიან წერტილთა კოორდინატები პარალელური გადატანისას.

მოცემული საკოორდინატო სისტემის მიხედვით დავადგინოთ AB მონაკვეთის ბოლოების კოორდინატები.



ნახაზზე შესრულებულია AB მონაკვეთის პარალელური გადატანა. რომლის შედეგად $A(2;3)$ წერტილი გადავიდა $E(7;1)$ წერტილში, ხოლო $B(7;9)$ წერტილი გადავიდა $F(12;7)$ წერტილში. გავარკვიოთ როგორია კოორდინატების ცვლილება.

დაადგინეს: $A(2;3)$ და $B(7;9)$.)

- ჯერ A წერტილზე ვნახოთ ცვლილებები.
- აბსცისა იყო 2, გახდა 7. ე.ი გადაინაცვლა 7–2=5 ერთეულით.
- ორდინატა იყო 3, გახდა 1. ე.ი. ცვლილებაა 1–3=–2.

- ახლა B წერტილზე ვნახოთ ცვლილებები.
  - აბსცისა იყო 7, გახდა 12. ე.ი გადაინაცვლა 12-7=5 ერთეულით.
  - ორდინატა იყო 9, გახდა 7. ე.ი. ცვლილებაა 7–9=–2.

– რა დასკვნას გამოიტანთ ამ შემთხვევაში? (აბსცისები ერთნაირად შეიცვალა, ორდინატებიც ერთნაირად შეიცვალა.)

– $A(x;y)$ წერტილის $A'(x';y')$ წერტილში პარალელური გადატანისას გადამტანი AA' ვექტორის კოორდინატებია $(x'-x;y'-y)$. ამ კოორდინატებს პარალელური გადატანის კოორდინატები ეწოდება. მაშასადამე, თუ გვაქვს პარალელური გადატანა, რომლის კოორდინატებია $(a;b)$, მაშინ ამ პარალელური გადატანით $A(x;y)$ წერტილი გადავა $A'(x';y')$ წერტილში, სადაც $x'=x+a,\quad y'=y+b.$

ამის შემდეგ ხსნიან №17 და №18 ამოცანებს.

დამოუკიდებელი სამუშაო

№16 ამოცანა (2 ვარიანტად).

რეფლექსია, შედეგების შეჯამება

– როგორ ასახვას ჰქვია პარალელური გადატანა?

– მოიყვანეთ პარალელური გადატანის ცხოვრებისეული მაგალითები.

– რა აქვთ საერთო ცენტრულ სიმეტრიას, ღერძულ სიმეტრიას და პარალელურ გადატანას? (ცენტრული სიმეტრია, ღერძული სიმეტრია და პარალელური გადატანა ისეთი მოძრაობებია, რომელთა შესრულების შემდეგ წერტილი გადადის წერტილში, მონაკვეთი მის ტოლ მონაკვეთში, კუთხე მის ტოლ კუთხეში და ნებისმიერი ფიგურა მის ტოლ ფიგურაში).

– გამოთქვით თქვენი აზრი გაკვეთილის შესახებ:

- რა მოგეწონათ?
- რა იყო გაუგებარი?

საშინაო დავალება.

ამოხსენით №19, №20, №21 ამოცანები და ჩაატარეთ კვლევა:

– რა სახის გარდაქმნაა საერთო ცენტრის მქონე k_1 და k_2 კოეფიციენტებიანი ორი ჰომოთეტიის კომპოზიცია? (არის ჰომოთეტია k_1k_2 კოეფიციენტით)

– რა წერტილში გადავა $A(x;y)$ წერტილი კოორდინართა სათავის მიმართ k კოეფიციენტის მქონე ჰომოთეტიით? ($A'(kx';ky')$ წერტილში)

მესამე გაკვეთილი

მიზანი:

- ჰომოთეტიისა და პარალელური გადატანის შესახებ შეძენილი ცოდნის განმტკიცება და გაღრმავება;
- ჰომოთეტიისა და პარალელური გადატანის კოორდინატების საშუალებით ჩაწერა;
- ორი გარდაქმნის თანმიმდევრობით შესრულების შედეგის შესახებ წარმოდგენის ჩამოყალიბება და შედეგში მიღებული ფიგურის პარამეტრების დადგენა.

გაკვეთილის მსვლელობა

ორგანიზაციული მომენტი.

წინარე ცოდნის გააქტიურება.

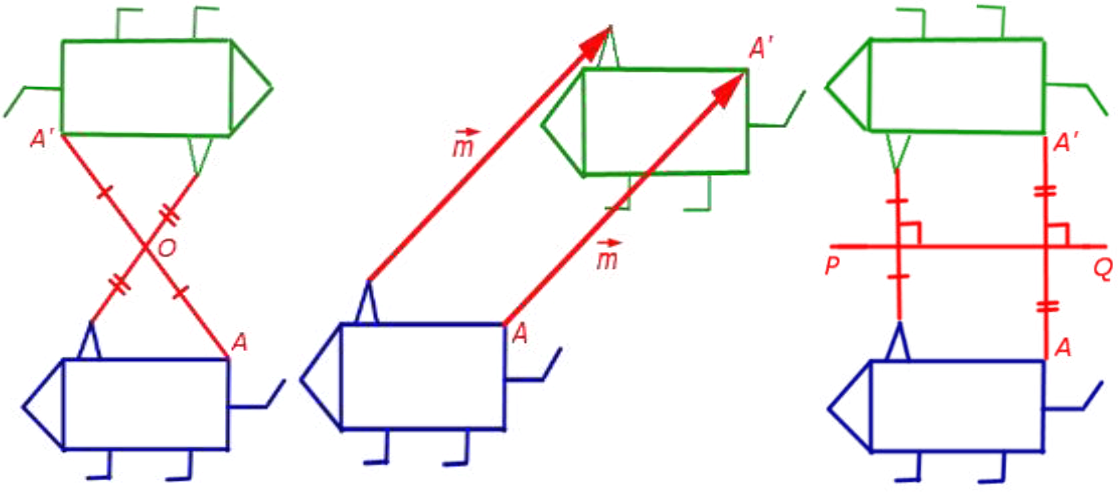
მასწავლებელი სვამს კითხვებს: – რა სახის გეომეტრიული გარდაქმნები ვიცით?

– როგორ გარდაქმნას ჰქვია ცენტრული სიმეტრია? ღერძული სიმეტრია? მობრუნება? დ) პარალელური გადატანა? ჩამოაყალიბეთ თვისებები.

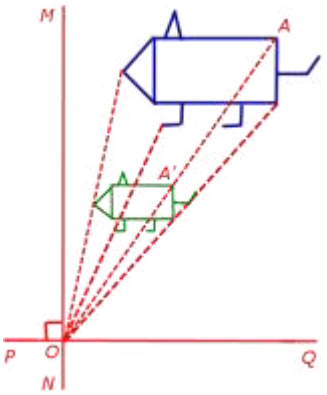
– რა არის აუცილებელი პარალელური გადატანის შესასრულებლად?

– როგორ იცვლება წერტილის $(x;y)$ კოორდინატები k კოეფიციენტის მქონე ჰომოთეტისას ცენტრით კოორდინატთა სათავეში?

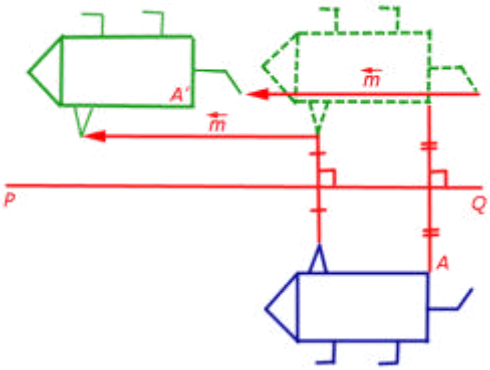
მასწავლებელი: – დააკვირდით მოცემულ ნახატებს და ახსენით რა სახის გარდაქმნებია მოცემული თითოეულ მათგანზე.



№1 №2 №3



№4



№5

გაკვეთილის თემის დასახელება.

– თქვენ აღმოაჩინეთ, რომ მე-5 ნახაზზე ორი გარდაქმნა, ანუ გარდაქმნათა კომპოზიციაა მოცემული. ესაა ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის თემა. დღეს ვიმუშავებთ გეომეტრიულ გარდაქმნათა კომპოზიციაზე. უნდა ვისწავლოთ კომპოზიციების შედგენა, შესაბამისი ნახაზის შესრულება და კოორდინატების დადგენა. ვისწავლლით რა შედეგს მივიღებთ, თუ ფიგურას ჯერ გავადიდებთ, შემდეგ კი გარკვეული მიმართულებით გადავიტანთ გარკვეულ მანძილზე.

მასწავლებელი: – რა თანმიმდევრობითაა მე-5 ნახაზზე გარდაქმნები შესრულებული? (ჯერ ღერძული სიმეტრიითაა გარდაქმნილი, შემდეგ – პარალელური გადატანით)

– იქნებ პირიქითაა? (არაა პირიქით. ისრები გვიჩვენებენ თანმიმდევრობას)

ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი:

– რა არის გარდაქმნათა კომპოზიცია? (გარდაქმნათა კომპოზიცია არის გარდაქმნა, რომელიც მიიღება ამ გარდაქმნათა თანმიმდევრობით შესრულების შედეგად)

– F და G ორი გარდაქმნის კომპოზიცია (იწერება $F \circ G$) იქნება ისეთი H გარდაქმნა, რომელიც სიბრტყის ნებისმიერ A წერტილს $A' = H(A) = F(G(A))$ ფორმულით გადაიტანს ამავე სიბრტყის A' წერტილში.

– წაიკითხეთ ტექსტის №4 ამოცანა. გაანალიზეთ და ახსენით, რა არის შემოთავაზებული და როგორაა ამოხსნილი. რა უნდა ვიცოდეთ ამოცანის გაანალიზების შემდეგ?

– ავაგოთ ABC სამკუთხდი წვეროებით: $A(1;1), B(3;2), C(2;1)$ და მისი სათავის მიმართ ჰომოთეტიური სამკუთხედი $k = 1,5$ კოეფიციენტით. შევასრულოთ მიღებული სამკუთხედის პარალელური გადატანა $P(2;0)$.

მოსწავლეები ასკვნიან, რომ $H(O;k)$ ჰომოთეტიისა და $P(a,b)$ პარალელური გადატანის $P \circ H$ კომპოზიციით $A(x;y)$ წერტილი გადავა $A'(kx'+a;ky'+b)$ წერტილში.

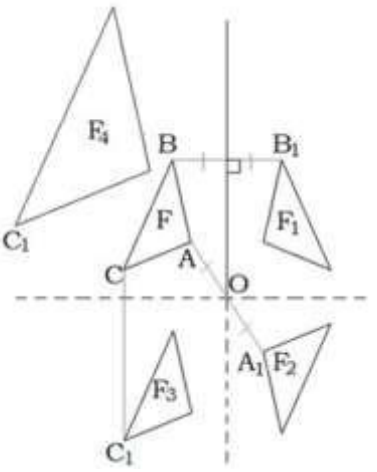
განმტკიცება

კლასში მუშაობენ №11, №22, №25, №28 ამოცანებზე.

რეფლექსია

მასწავლებელი: –რა ვისწავლეთ დღეს?

– ნახაზის მიხედვით დაასახელეთ გარდაქმნა, რომლითაც F ფიგურა გადავიდა F_n ფიგურაში. $(n = 1,2,3,4.)$



საშინაო დავალება: №12, №23, №24, №26 ამოცანები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№8. მზის რადიუსი დაახლოებით 696343 კმ-ია, დედამიწის 6371, ამიტომ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი იქნება $\pm 696343:6371 \approx \pm 109,3$; ა) $\approx \pm 109,3$; ბ) მთვარის რადიუსია 1737კმ, ამიტომ კოეფიციენტი იქნება $\pm 1737:6371 \approx \pm 0,27$.

სავ.№14. პასუხი: -3.

სავ.№15. პასუხი: 4, $k = \pm\frac{r}{R}$, $k = \pm\frac{R}{r}$ კოეფიციენტების მქონე ჰომოთეტიებით.

სავ.№22 და **24**. ზოგადად, P(a;b) და P(c;d) პარალელური გადატანების კომპოზიციით მიიღება P(a+c; b+d) გადატანა, ამიტომ №22-ში პასუხია (-4;6), ხოლო № 24-ში მიიღება P(0;0). ეს კი იგივური გარდაქმნაა.

სავ.№23. უშუალოდ ჰომოთეტიის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $H_0^k \circ H_0^q = H_0^{kq}$, ამიტომ $H_0^k \circ H_0^{\frac{1}{k}} = H_0^1$.

სავ.№25. პასუხი: 4, $k_{1,2} = \pm\frac{R_1}{R_2}$, $k_{3,4} = \pm\frac{R_2}{R_1}$ კოეფიციენტების მქონე ჰომოთეტიებით.

სავ.№28. ერთ შემთხვევაში კოორდინატებია (kx+a;ky+b), ხოლო მეორეში (kx+ka;ky+kb). ერთმანეთს დაემთხვევა, როცა ka=a და kb=b. ეს კი მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა k=1 ან a=0 და b=0, ანუ როცა ერთ-ერთი გარდაქმნა იგივურია.

სავ.№29. საკუთხო კოეფიციენტი არ შეიცვლება, ანუ იქნება y=2x+b. პარალელური გადატანით (0; 3) წერტილი გადავა (-2; 7) წერტილში. ჩავსვათ ეს კოორდინატები საძიებელ განტოლებაში. მივიღებთ: 7= -4+b, b=11. **პასუხი**: y=2x+11.

სავ.№30. საკუთხო კოეფიციენტი არ შეიცვლება, ანუ იქნება y=ax+c. პარალელური გადატანით (0; b) წერტილი გადავა (0; kb) წერტილში, ანუ c=kb. **პასუხი:** y=ax+kb.

მესამე თავის დამატებითი სავარჯიშოები (1 სთ)

მიზანი: მე-3 თავში განვლილი მასალის გამეორება-განმტკიცება.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. პასუხი: (8;12).
სავ.№2. პასუხი: 25.
სავ.№3. პასუხი: -4.
სავ.№4. პასუხი: $-7\vec{i}+2\vec{j}$.
სავ.№5. შეგვიძლია გამოვითვალოთ კოსინუსი (-1), ან შევნიშნოთ, რომ $\vec{b}=-3\vec{a}$.
პასუხი: 180° .
სავ.№6. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=a^2-b^2=-15$
სავ.№ 7. პასუხი: $\vec{a}=\vec{b}+2\vec{c}$.
სავ.№8. ბისექტრისის თვისებით AK:KC=1:2, ამიტომ:

$$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

სავ.№9. პასუხი: 3.
სავ.№10. პასუხი: 5.
სავ.№11. პასუხი: 10.
სავ.№12. პასუხი: (1;2;-4).
სავ.№13. პასუხი: $5\sqrt{2}$.
სავ.№14. პასუხი: $\frac{48}{65}$.
სავ.№15. $\overrightarrow{AB}(2;2;0),\ \overrightarrow{AC}(2;0;2)\Rightarrow\cos\alpha=\frac{4}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ.$
სავ.№16. კოლინეალურობის გამო $\vec{a}=k\vec{b}\Rightarrow -14k=7\Rightarrow k=-0,5\Rightarrow x=-0,5, y=-8.$

სავ.№17. კოლინეალურობის გამო $\vec{a} = k\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} x = ky \\ -1 = -kx \\ y = 8k \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 4.$

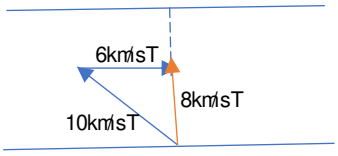
სავ.№18. $\sin\angle B = 0{,}8,\ AB \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \angle B) = -12 \Rightarrow AB \cdot BC = 20 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0{,}8 = 8.$

პასუხი: 8.

სავ.№19. პასუხი: P(-2;-5), (-3;-4).

სავ.№20. პასუხი: (-2y;2x).

სავ.№21. ნავის სიჩქარისა და დინების სიჩქარის ტოლქმედი სიჩქარე, პირობის თანახმად, ნაპირის და ამიტომ დინების მართობულია. მისი სიდიდე პითაგორას თეორემით იქნება 8კმ/სთ. 0,4:8=0,05სთ=3წთ.

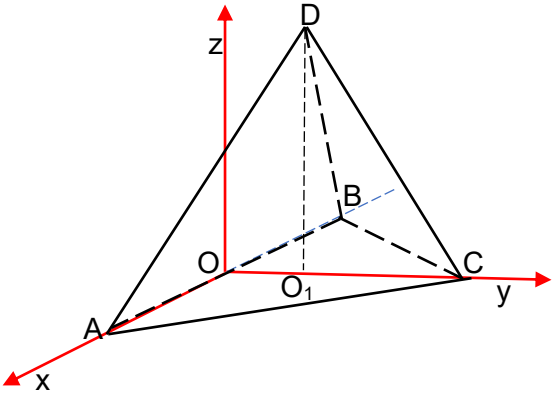


შესაძლებელია თუ არა?

შეუძლებელია, რადგან ერთ წერტილში მოდებით ასეთი სამი ვექტორი ერთ სიბრტყეში აღმოჩნდება.

აბა, სცადე!

პირამიდის ფუძე ტოლგვერდა სამკუთხედია 2-ის ტოლი გვერდით, მისი სიმაღლეა $OC = \sqrt{3}$, ხოლო ჩახაზული წრის რადიუსი $OO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (იხ.ნახაზი). ამიტომ, D წერტილის x კოორდინატი არის 0, y კოორდინატი $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, ხოლო z კოორდინატი გამოითვლება CO_1D სამკუთხედიდან $\pm\sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.



სულ გვექნება 4 ასეთი პირამიდა. ნახაზზე მხოლოდ ერთი მათგანია წარმოდგენილი.

პასუხი: D წვეროს კოორდინატებია $\left(0; \pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

პროექტი „დაგეგმარება ვექტორებით“

მიზანი:

პროექტის განმავლობაში მოსწავლემ უნდა შეძლოს:

- ამოცანის პირობის დამოუკიდებლად გააზრება;
- მოცემული და საძიებელი სიდიდეების გამოყოფა;
- შესაბამისი ფორმულის/მეთოდის შერჩევა;
- ნახაზის ან სქემის გამოყენება;
- გამოთვლების სწორად შესრულება;
- მიღებული პასუხის საზომი ერთეულით ჩაწერა;
- მიღებული შედეგის რეალურ სიტუაციასთან დაკავშირება;
- საკუთარი ნაშრომ/ნააზრევის ახსნა და დასაბუთება.

მოცემული სქემის ანალიზი

ა) სქემის მიხედვით პუნქტების კოორდინატებია:

$$A(4;3;0),\ B(0;5;2),\ C(0;0;1),\ D(3;0;3).$$

ბ) პუნქტებს შორის მანძილებია:

$$AB = \sqrt{24} \approx 4{,}9\ \text{კმ};\ AC = \sqrt{26} \approx 5{,}1\ \text{კმ};\ AD = \sqrt{19} \approx 4{,}36\ \text{კმ};$$

$$BC = \sqrt{26} \approx 5{,}1\ \text{კმ};\ BD = \sqrt{35} \approx 5{,}9\ ;\ CD = \sqrt{13} \approx 3{,}6\ \text{კმ};$$

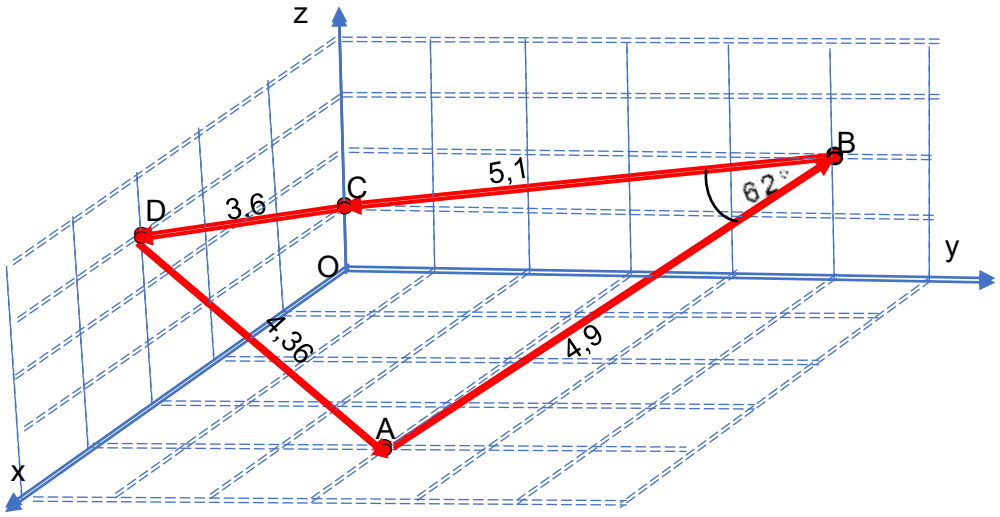
გ) $\dot{AB}$ და $\dot{BC}$ ვექტორებს შორის კუთხეა $\approx 118^\circ$, რაც ნიშნავს, რომ $\angle ABC \approx 62^\circ$; $\dot{AD}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებს შორის კუთხეა დაახლოებით 40°, რაც ნიშნავს, რომ $\angle DAC \approx 40^\circ$;

შენიშვნა: მოსწავლეებს შევახსენოთ, რომ ორ ვექტორს შორის კუთხე არის ის კუთხე, რომელსაც ეს ვექტორები ქმნიან ერთ წერტილში მოდების შემდეგ. მაგალითად, $\dot{AB}$ და $\dot{BC}$ ვექტორებს შორის კუთხე ABC კუთხის მოსაზღვრე კუთხეა და არა ABC კუთხე. თუ ABC კუთხის ზომა გვაინტერესებს, $\dot{BA}$ და $\dot{BC}$ ვექტორების კოორდინატებით უნდა ვისარგებლოთ.

დ) ნახაზიდან ჩანს, რომ A წერტილი არაა BCD სამკუთხედის სიბრტყეში; შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\dot{AC}$ ვექტორი არ წარმოდგება $\dot{AB}$ და $\dot{AD}$ ვექტორების საშუალებით (ანუ ეს ვექტორები ქმნიან არაკომპლანარულ ვექტორთა სამეულს);

ე) აღმოსავლეთ მიმართულებას გვიჩვენებს OY ღერძი, ანუ $\vec{j}$ (0;1;0) ორტი. $\overset{\frown}{AB}$ ვექტორთან კუთხე იქნება დაახლოებით $67°$;

ვ) მარშრუტის ვექტორულ სქემაზე უნდა მიეთითოს ვექტორები, მათი სიგრძე და კუთხეები (ნახაზზე ნიმუშის სახით მითითებულია კუთხე BA და BC ვექტორებს შორის.)



მოსწავლის პროექტზე მუშაობის შეფასების ნიმუში

შეფასების მაქსიმალური ქულა: 30

1-ელი ნაწილი – მოცემული საჰაერო მარშრუტის ანალიზი – 15 ქულა.

კრიტერიუმი	მოსალოდნელი შედეგი	ქულა
1. წერტილების კოორდინატები	სწორად ადგენს A,B,C,D წერტილების სამგანზომილებიან კოორდინატებს და სწორად კითხულობს საკოორდინატო ღერძებს.	3
2. მანძილების გამოთვლა	სწორად ადგენს შესაბამის ვექტორებს და ითვლის საჭირო მონაკვეთებს.	3
3. კუთხეების გამოთვლა	სწორად ადგენს კუთხეებს $\overset{\frown}{AC}$ და $\overrightarrow{BC}$, აგრეთვე, $\overset{\frown}{AD}$ და $\overset{\frown}{BD}$ ვექტორებს შორის; იყენებს შესაბამის ფორმულას.	3
4. სიბრტყეში მდებარეობის დადგენა	ასაბუთებს, არიან თუ არა ერთ სიბრტყეში A,B,C,D წერტილები; იყენებს შესაბამის ვექტორულ მეთოდს.	2

5. მიმართუ-ლების კუთხე	სწორად განსაზღვრავს A -დან B -მდე ფრენის მიმართულებას და კუთხეს მითითებულ ღერძთან; ითვალისწინებს ამოცანაში მოცემულ ორიენტაციას.	**2**
6. ვექტორული მარშრუტის სქემა	სქემაზე სწორად აჩვენებს მარშრუტს, მიმართულებებს, მანძილებსა და კუთხეებს.	**2**

პროექტის 1-ელი ნაწილის შეფასების დონეები:

13 – 15 ქულა – მაღალი დონე

მოსწავლე დამოუკიდებლად აანალიზებს სივრცულ სქემას, სწორად იყენებს ვექტორებსა და ფორმულებს, პასუხებს ასაბუთებს და გრაფიკულ სქემას ზუსტად წარმოადგენს.

10 – 12 ქულა – კარგი დონე

ძირითადი დონეები სწორად აქვს შესრულებული, თუმცა აქვს მცირე გამოთვლითი ან გრაფიკული უზუსტობები.

7 – 9 ქულა – საშუალო დონე

ესმის ამოცანის ძირითადი იდეა, მაგრამ უჭირს ვექტორების, კუთხეების ან სივრცული ურთიერთმდებარეობის ზუსტად განსაზღვრა.

0 – 6 ქულა – გასაუმჯობესებელი დონე

ვერ ადგენს კოორდინატებს ან ვექტორებს სწორად და უჭირს მიღებული შედეგების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

პროექტის მეორე ნაწილის შეფასება

კრიტერიუმი	მოსალოდნელი შედეგი	ქულა
1. პუნქტების შერჩევა და მარშრუტის იდეა	მიზნობრივად ირჩევს 3-4 პუნქტს და ქმნის ლოგიკურ მარშრუტს.	**2**
2. სამგანზომილებიანი მოდელი	არჩეულ პუნქტებს წარმოადგენს $3D$ კოორდინატთა სისტემაში და მიუთითებს მათ კოორდინატებს.	**3**
3. ვექტორების აგება	სწორად ადგენს გადაადგილების ვექტორებს თითოეული მონაკვეთისათვის.	**3**
4. მანძილები და მიმართულებები	მიუთითებს მარშრუტის მონაკვეთების მანძილებსა და მიმართულებებს.	**2**

5. გადაადგილების თანმიმდევრობა და კუთხეები	მკაფიოდ აჩვენებს, რომელი პუნქტიდან რომელ პუნქტზე გადადის და განსაზღვრავს მიმართულებებს შორის კუთხეებს.	2
6. ნახაზები და ფოტოები	ურთავს შესაბამის $3D$ სქემატურ ნახაზებსა და შერჩეული პუნქტების ფოტოებს.	2
7. ახსნა და დასაბუთება	ხსნის, რატომ შეარჩია ეს პუნქტები, როგორ მიიღო კოორდინატები, მანძილები და კუთხეები.	1

საერთო შეფასება

27 – 30 ქულა – შესანიშნავი – სრულად დამოუკიდებელი, მათემატიკურად დასაბუთებული და პრაქტიკულად გამოყენებული ცოდნა.

23 – 26 ქულა – ძალიან კარგი – მცირე უზუსტობებით შესრულებული, მაგრამ კონცეფციები სწორადაა გაგებული.

19 – 22 ქულა – კარგი – ძირითადი ცოდნა და უნარები გამოვლენილია.

15 – 18 ქულა – დამაკმაყოფილებელი – ნაწილობრივი გააზრება, საჭიროა დამატებითი მხარდაჭერა.

0 – 14 ქულა – საჭიროებს გაუმჯობესებას – მნიშვნელოვანი ხარვეზებია როგორც მათემატიკურ, ისე პრაქტიკულ ნაწილში.

მოსწავლისადმი დასასმელი კითხვები

პირველი ნაწილი – „მოცემული სქემის გააზრება“

1) როგორ დაადგინეთ A,B,C,D წერტილების კოორდინატები?
2) როგორ მიიღეთ A -დან B -მდე გადაადგილების ვექტორი?
3) როგორ გამოთვალეთ ორ პუნქტს შორის მანძილი?
4) რას გვიჩვენებს ვექტორის სიგრძე ამ კონკრეტულ პროექტში?
5) როგორ იპოვეთ კუთხე $A\hat{C}$ და $B\hat{C}$ -ს შორის?
6) რას ნიშნავს მიღებული კუთხე რეალური მარშრუტის თვალსაზრისით?
7) როგორ შეამოწმეთ, არის თუ არა ოთხივე წერტილი ერთ სიბრტყეში?
8) როგორ განსაზღვრეთ A -დან B -ს მიმართულება OX ღერძთან მიმართებით?

მეორე ნაწილი – „საკუთარი რეალური მარშრუტი“

1) რატომ შეარჩიეთ სწორედ ეს 3-4 მარშრუტი?
2) როგორ გადაწყვიტეთ, რომელი პუნქტი იქნებოდა მარშრუტის საწყისი და რომელი საბოლოო?
3) რას წარმოადგენს x, y, z კოორდინატები თქვენს რეალურ მარშრუტში?
4) როგორ გამოთვალეთ მარშრუტის თითოეული მონაკვეთის სიგრძე?
5) როგორ იპოვეთ ორ მიმართულებას შორის კუთხე?
6) რომელი ნაწილის შესრულება იყო თქვენთვის ყველაზე რთული?
7) რა შეცდომა დაუშვით და როგორ გამოასწორეთ?
8) სხვა გზით რომ შეგესრულებინათ პროექტი, რას შეცვლიდით?
9) სად შეიძლება გამოიყენოთ ვექტორები რეალურ ცხოვრებაში ამ პროექტის გარდა?

საბოლოო თვითშეფასება

ამ პროექტში ჩვენს მუშაობას შევაფასებთ:

ძალიან კარგად – დამოუკიდებლად ვმუშაობდით, ვიაზრებდით მოქმედებებს და შეგვიძლია შედეგების ახსნა.

კარგად – დავალებების უმეტესობა ჩვენით შევასრულეთ, დაგვჭირდა მცირე დახმარება.

ნაწილობრივ – ძირითადი იდეა გავიგეთ, მაგრამ რამდენიმე საკითხში დახმარება დაგვჭირდა.

ჯერ კიდევ ვსწავლობთ – ბევრი სირთულე შეგვხვდა და საკითხების უკეთ გასაგებად დამატებითი მუშაობა გვჭირდება.

რა იქნება თქვენი მთავარი დასკვნა ამ პროექტიდან?

„ამ პროექტიდან ყველაზე მნიშვნელოვანი, რაც ვისწავლეთ . . . .“

შემაჯამებელი სამუშაო №3

I ვარიანტი

1. გამოთვალე $\dot{AB}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია (3;-7), ხოლო B წერტილის – (-2;5).

2. იპოვე $2\dot{a} - 3\dot{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (-3;1), ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის – (0;-2).

3. იპოვე x და y, თუ ცნობილია, რომ $\vec{a}$ (x; -1; 4) და $\vec{b}$ (2,5; 2; y) კოლინეალური ვექტორებია.

4. იპოვე კუთხე $\vec{a}$ (3; -2; 1) და $\vec{b}$ (2; 1,5; -3) ვექტორებს შორის.

5. წერტილზე, რომლის კოორდინატებია (3; –4), იმოქმედეს ჯერ სიმეტრიით ორდინატთა ღერძის მიმართ, ხოლო შემდეგ (1;–12) კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანით. იპოვე მანძილი მიღებულ წერტილსა და მოცემულ წერტილს შორის.

II ვარიანტი

1. გამოთვალე $\dot{AB}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია (-3;7), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (2;-5).

2. იპოვე $3\dot{a} - 2\dot{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (0;-2), ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (-3;1).

3. იპოვე x და y, თუ ცნობილია, რომ $\vec{a}$ (-1; x; 4) და $\vec{b}$ (2; 4; y) კოლინეალური ვექტორებია.

4. იპოვე კუთხე $\vec{a}$ (3; -1; 0,5) და $\vec{b}$ (1; 2; -2) ვექტორებს შორის.

5. წერტილზე, რომლის კოორდინატებია (-2;3), იმოქმედეს ჯერ სიმეტრიით აბსცისთა ღერძის მიმართ, ხოლო შემდეგ (6;-2) კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანით. იპოვე მანძილი მიღებულ წერტილსა და მოცემულ წერტილს შორის.

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების ნიმუში

სულ 10 ქულა

1. თითოეული კოორდინატის პოვნა – თითო ქულა.

სულ 2 ქულა.

2. იპოვა ვექტორის კოორდინატები (-6;8) ----1 ქულა;

   იპოვა სიგრძე (10) ----------2 ქულა.

სულ 2 ქულა.

3. იპოვა x ან y ------1 ქულა ;

   იპოვა x და y (x=-1,25, y=-8) ------ 2 ქულა.

სულ 2 ქულა.

4. იპოვა სკალარული ნამრავლი (0) ----1 ქულა;

   იპოვა კუთხე (90^0)------ 2 ქულა.

სულ 2 ქულა.

5. იპოვა მიღებული წერტილის კოორდინატები (-2;-16) ---1 ქულა;

   იპოვა მანძილი (13) ----- 2 ქულა.

სულ 2 ქულა.

II ვარიანტის განმავითარებელი შეფასების ნიმუში

№	შეფასების საკითხი	მაღალი დონე 2 ქულა	საშუალო დონე 1 ქულა	დასახვეწია 0 ქულა
1	**AB ვექტორის კოორდინატების პოვნა**	სწორად იყენებს AB მონაკვეთის კოორდინატების გამოსათვლელ ფორმულას, სწორად ასრულებს გამოთვლას და სწორად პასუხობს.	იცის გამოსაყენებელი წესი, მაგრამ დაშვებული აქვს მცირე გამოთვლითი შეცდომა.	ვერ იყენებს ვექტორის კოორდინატების პოვნის წესს ან პასუხი არსებითად მცდარია.
2	$3\vec{a}-2\vec{b}$ **ვექტორის სიგრძის პოვნა**	სწორად პოულობს $3\vec{a}-2\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებს, შემდეგ სწორად ითვლის ვექტორის სიგრძეს.	სწორად ასრულებს ამოცანის ძირითად ნაწილს, მაგრამ აქვს ერთი გამოთვლითი ან ფორმულასთან დაკავშირებული შეცდომა.	ვერ ადგენს მიღებული ვექტორის კოორდინატებს ან ვერ იყენებს სიგრძის გამოსათვლელ ფორმულას.
3	**კოლინეალური ვექტორებით** x **-ისა და** y **-ის პოვნა**	სწორად იყენებს კოლინეალურობის პირობას, ადგენს შესაბამის განტოლებებს და პოულობს x -ს და y -ს.	სწორად ხსნის, იყენებს კოლინეალურობის იდეას, მაგრამ ერთ ეტაპზე უშვებს შეცდომას	ვერ იყენებს კოლინეალურობის პირობას ან ვერ ადგენს შესაბამის კავშირებს.
4	**ორ ვექტორს შორის კუთხის პოვნა**	სწორად იყენებს სკალარული ნამრავლის ფორმულას და იღებს სწორ პასუხს.	სწორად ხსნის, იყენებს კოლინეალურობის იდეას, მაგრამ ერთ ეტაპზე უშვებს შეცდომას.	ვერ ახერხებს სკალარული ნამრავლის გამოთვლას.
5	**სიმეტრიისა და პარალელური გადატანის გამოყენება; მანძილის პოვნა**	სწორად ასრულებს ორივე გარდაქმნას, ადგენს მიღებული წერტილის კოორდინატებს და სწორად სწორად პოულობს თავდაპირველ და საბოლოო წერტილებს შორის მანძილს.	სწორად ასრულებს ერთ-ერთ გარდაქმნას ან ამოცანის ძირითად იდეას, მაგრამ უშვებს ერთ ან რამდენიმე მცირე შედომას.	ვერ ასრულებს გარდაქმნებს სწორად ან ვერ იყენებს მანძილის ფორმულას.
6	**მაქსიმალური ჯამი**			

შეფასებები

მიღებული ქულა	განმავითარებელი შეფასება
9 – 10	მოსწავლე კარგად ფლობს ვექტორებთან დაკავშირებულ ძირითად ცნებებსა და მოქმედებებს. შეუძლია ფორმულების სწორად შერჩევა და გამოყენება, ასევე გეომეტრიული გარდაქმნებისა და ამოცანების დამოუკიდებლად შესრულება.
7 – 8	მოსწავლე ძირითადად ფლობს მასალას და სწორად ირჩევს ამოხსნის გზას, თუმცა ზოგჯერ უშვებს გამოთვლით ან ალგებრულ შეცდომებს. საჭიროა სიზუსტისა და გამოთვ ლების კონტროლის გაძლიერება.
5 – 6	მოსწავლეს აქვს ძირითადი ცოდნა, მაგრამ უჭირს ზოგიერთი ფორმულის გამოყენება და ამოცანის ეტაპობრივად შესრულება. სასურველია დამატებითი ვარჯიში ვექტორის სიგრძეზე, კოლინეალურობასა და სკალარულ ნამრავლზე.
0 – 4	მოსწავლეს უჭირს ვექტორებთან დაკავშირებული ზოგიერთი ფორმულის გამოყენება. საჭიროა საკითხების განმეორება მარტივი მაგალითრებიდან დაწყებით და ეტაპობრივი დახმარება.

თავი 4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

თავის მიზანი:

- ფუნქციის ცნებისა და მოცემის ხერხების შესახებ წინა კლასებში მიღებული ცოდნის გამეორება/გაღრმავება;
- $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ ფუნქციათა თვისებების (ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა, ნიშან-მუდმივობისა და ზრდადობა-კლებადობის შუალედები, ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები) გაცნობა და დასაბუთება ერთეულოვანი წრეწირისა და გრაფიკის გამოყენებით;
- $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ ფუნქციების გრაფიკების აგება;
- უმარტივესი განტოლების ამოხსნის მეთოდის გაცნობა.

თავის შესწავლის შემდეგ მოსწავლემ **უნდა შეძლოს**:

- პერიოდული, კენტი და ლუწი ფუნქციების ამოცნობა, პერიოდის პოვნა, გრაფიკის აგება და წაკითხვა;
- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებების (ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა, ნიშან-მუდმივობისა და ზრდადობა-კლებადობის შუალედები, ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები) დასაბუთება ერთეულოვანი წრეწირისა და გრაფიკის გამოყენებით;
- $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ ფუნქციების გრაფიკების აგება და წაკითხვა;
- მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამონახსნისა და მოცემულ შუალედში მოთავსებული ამონახსნის პოვნა.

4.1 პერიოდული, ლუწი და კენტი ფუნქციები (2 სთ)

მიზანი:

ფუნქციის შესახებ ცოდნის გამეორება და გაღრმავება (რიცხვითი ფუნქციის ცნების შემოტანა, არგუმენტისა და ფუნქციის მნიშვნელობა, ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა, ფუნქციის ლუწობის, კენტობისა და პერიოდულობის დადგენა და მათი გრაფიკების თვისებები, გრაფიკის წაკითხვა და აგება).

პარაგრაფში მოცემული მასალის შესწავლის შემდეგ მოსწავლემ **უნდა შეძლოს:**

- ფუნქციის, მისი განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის ცნებათა განმარტება;
- პერიოდული, ლუწი და კენტი ფუნქციების განმარტება და მაგალითების დასახელება;
- ფუნქციის გრაფიკის წაკითხვა და აგება.

რესურსი: ლუწი და კენტი ფუნქციების მზა გრაფიკები, პარაბოლას და ჰიპერბოლას მოდელი.

ებგაკვეთილის მსვლელობა

1-ელი გაკვეთილი

I. ორგანიზაციული მომენტი

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება, მოტივაცია

განმარტეთ, რას წარმოადგენს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა.

1) საკოორდინატო სიბრტყეზე ააგეთ $A(2;13)$ და $B(15;6)$ წერტილები. დაასახელეთ ამ წერტილების აბსცისები და ორდინატები.

2) იპოვეთ $3x-4$ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა $x=0;\ \ x=-3;\ \ x=2,\ \ x=1\frac{2}{3}$.

3) ამოხსენით **ამოცანა 1.** ავტომანქანა მოძრაობს 60 კმ/სთ სიჩქარით. რა მანძილს გაივლის ის 2 სთ-ში?

ამოცანა 2: ავტომანქანა მოძრაობს 60 კმ/სთ სიჩქარით. რა დროში გაივლის ის s კმ-ს?

III. გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა

მასწავლებელი:

– რაზეა დამოკიდებული გამოსახულების მნიშვნელობა მეორე ამოცანაში? (x-ის მნიშვნელობებზე)

– რა სიდიდეები უკავშირდება ერთმანეთს მესამე ამოცანაში? (მანძილი, დრო და სიჩქარე)

– რომელი სიდიდეა საძიებელი მე-4 ამოცანის პირობის მიხედვით? (დრო)

რაზეა დამოკიდებული ავტომობილის მიერ გავლილი მანძილი მესამე ამოცანაში? (ავტომობილის მიერ დახარჯულ დროზე) თუ დროს t ასოთი აღვნიშნავთ, როგორ გამოვითვლით მანძილს მე-4 ამოცანაში? ($s=60t$).

– როგორ სიდიდეებს ვუწოდებთ ერთმანეთზე ფუნქციურად დამოკიდებულს?

– $s=60t$ დამოკიდებულებაში რომელი სიდიდეები უკავშირდება ერთმანეთს?

– ხვდებით თუ არა, რა იქნება ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის თემა?

– დიახ. ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილი ეძღვნება ფუნქციას. კერძოდ რიცხვით ფუნქციას და მის თვისებებს.

IV. მასწავლებელთან ერთად პრაქტიკული მუშაობა

– გავიხსენოთ, რას ეწოდება ფუნქცია (ფუნქცია ესაა წესი, რომელიც დამოუკიდებელ x

ცვლადის, ანუ არგუმენტის, ყოველ მნიშვნელობას უთანადებს დამოკიდებული ცვლადის ერთადერთ y მნიშვნელობას).

– რა იცით ფუნქციის შესახებ? (მას აქვს განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე, განსაზღვრის არის ყოველ ელემენტს ფუნქცია უთანადებს მნიშვნელობათა სიმრავლის ერთადერთ ელემენტს)

– რა არის რიცხვითი ფუნქცია? (ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეცა და მნიშვნელობათა არეც რიცხვითი სიმრავლეებია)

–რიცხვითი ფუნქციის რა თვისებებს იცნობთ? (მონოტონურობა, ნულები, ნიშანმუდმივობა, ექსტრემუმები, ლუწობა, კენტობა, პერიოდულობა)

– რაში ვიყენებთ ფუნქციის თვისებების ცოდნას? (გრაფიკის აგებასა და ფუნქციის გამოკვლევაში)

– გავიხსენოთ რას წარმოადგენს ფუნქციის განსაზღვრის არე. (f ფუნქციის განსაზღვრის არე, რომელსაც $D(f)$-ით აღვნიშნავთ, ესაა x ცვლადის (არგუმენტის) ყველა დასაშვები მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y = f(x)$ დამოკიდებულებას აზრი აქვს. ანუ განსაზღვრის არე არის x -ის იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც ფუნქცია განსაზღვრულია)

– რა იქნება $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე? (x -ის ნებისმიერი მნიშვნელობა, გარდა 0-ისა.)

– როგორ ჩავწეროთ პასუხი მათემატიკურად? ($D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.)

– რას წარმოადგენს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე?(მნიშვნელობათა სიმრავლე $E(f)$ ესაა ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლსაც იღებს დამოკიდებული y ცვლადი)

– რა იქნება $y = \sqrt{x}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე? ($E(f) = [0;+\infty)$

– მოცემულია $y = 2x^2 - 8x$ ფუნქციის გრაფიკი. განსაზღვრეთ გრაფიკის მიხედვით მისი განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე. (პასუხობენ: $D(y)=R$, $E(y) = [-8;+\infty]$)

– რიცხვითი ფუნქციაა წრფივი ფუნქცია $y = kx + b$, სადაც k და b მოცემული რიცხვებია. რიცხვითია, აგრეთვე, კვადრატული ფუნქცია $y = ax^2 + bx + c$, სადაც a, b და c მოცემული რიცხვებია.

– რიცხვითია ჩვენთვის ნაცნობი სამივე ტრიგონომეტრიული ფუნქცია და სხვ.

– ტერმინი „ნიშანმუდმივობის შუალედები“ თქვენთვის უკვე ნაცნობია. რას გვიჩვენებს ნიშანმუდმივობის შუალედები? (გვიჩვენებს რომელ შუალედებშია ფუნქცია დადებითი და

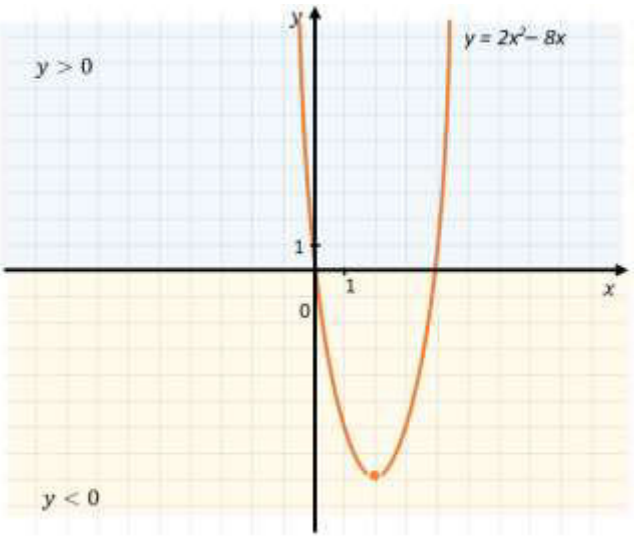
რომელში უარყოფითი)

მაგალითად, რომელია ნახაზზე წარმოდგენილი და ჩვენთვის ნაცნობი ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები?

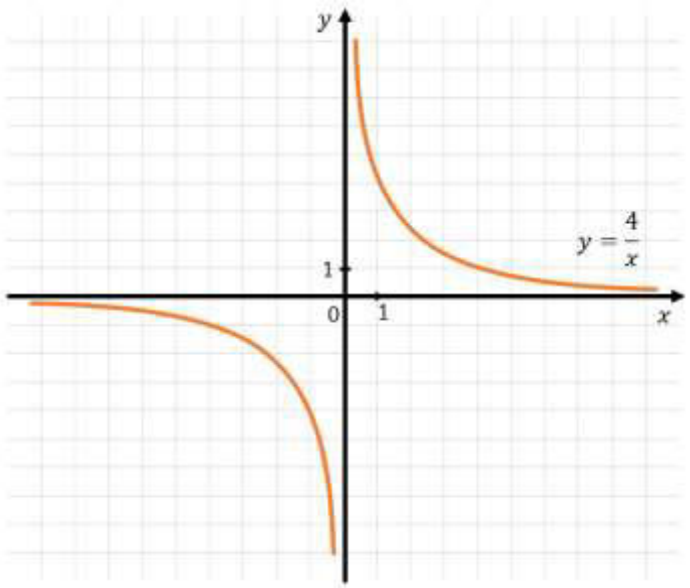
პასუხობენ:

$y>0$, როცა $x\in(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$;

$y<0$, როცა $x\in(0;4)$.



– რა იქნება გრაფიკულად წარმოდგენილი $y=\frac{4}{x}$ ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედები?



ხშირად გვხვდება ცხოვრებაში განმეორებადი პროცესები. მაგალითად, დრო (დღე-ღამე), საათის ქანქარას მოძრაობა, პულსი, წელიწადის დროების ცვლა.

მასწავლებელი აყალიბებს პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრებას, აჩვენებს პერიოდული ფუნქციის გრაფიკს და გრაფიკზე გამოყოფს განმეორებად ნაწილებს.

– გავიხსენოთ პერიოდული ფუნქციის განმარტება.

რიცხვით ფუნქციას ეწოდება პერიოდული T პერიოდით, თუ არსებობს ისეთი არანულოვანი T რიცხვი, რომ ფუნქციის განსაზღვრის არედან აღებული ყოველი x რიცხვისათვის სრულდება ორი პირობა:

1) $x+T$ და $x-T$ რიცხვები ეკუთვნის $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

2) $f(x-T)=f(x+T)=f(x)$.

მასწავლებელი მსჯელობს პერიოდული ფუნქციის შესახებ, ასახელებს მარტივ პერიოდულ ფუნქციებს, უხსნის T პერიოდის მქონე მთელ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ფუნქციის გრაფიკის აგების წესს, ხსნიან სახელმძღვანელოში მოცემულ მაგალითს, აკვირდებიან ნახაზს.

V. განმტკიცება

ასრულებენ პარაგრაფის №1,№3, №5, №7 სავარჯიშოებს.

VI. რეფლექსია

VII. საშინაო დავალება: №2, №4, №6, №8 სავარჯიშოები.

მეორე გაკვეთილი

მიზანი:

- ლუწი და კენტი ფუნქციები და მათი გრაფიკები;
- ფუნქციისა და მისი თვისებების შესახებ შეძენილი ცოდნის განმტკიცება;
- ფუნქციის ცნებასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნა;
- გონებრივი და შემოქმედებითი შესაძლებლობებისა და ლოგიკური აზროვნების განვითარება.

ორგანიზაციული მომენტი, საშინაო დავალების შემოწმება
წინარე ცოდნის გააქტიურება, გაკვეთილის თემის გაცნობა

– ახლა გავიხსენოთ, როგორ ფუნქციას ჰქვია ლუწი. (ყოველი x-სათვის განსაზღვრის არედან $-x$ -იც განსაზღვრის არეშია და სრულდება ტოლობა: $f(-x)=f(x)$).

– რა შეგიძლიათ თქვათ ლუწი ფუნქციის გრაფიკზე? (ორდინატთა ღერძის სიმეტრიულია)

– ახლა გავიხსენოთ, როგორ ფუნქციას ჰქვია კენტი. (ყოველი x-სათვის განსაზღვრის არედან $-x$ -იც განსაზღვრის არეშია და სრულდება ტოლობა: $f(-x)=-f(x)$).

–რა შეგიძლიათ თქვათ კენტი ფუნქციის გრაფიკზე? (კოორდინატთა სათავის სიმეტრიულია)

– დაასახელეთ ლუწი ფუნქციის მაგალითი ტრიგონომეტრიიდან. (კოსინუს ფუნქცია)

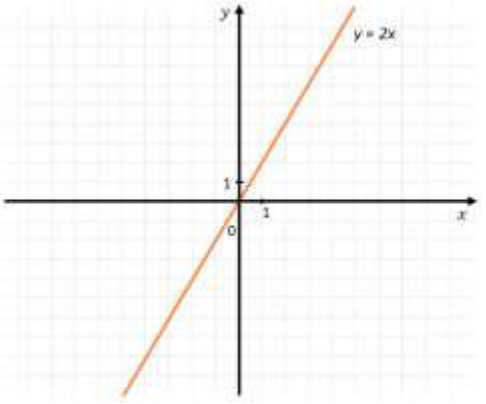
რეფლექსია, შედეგების შეჯამება

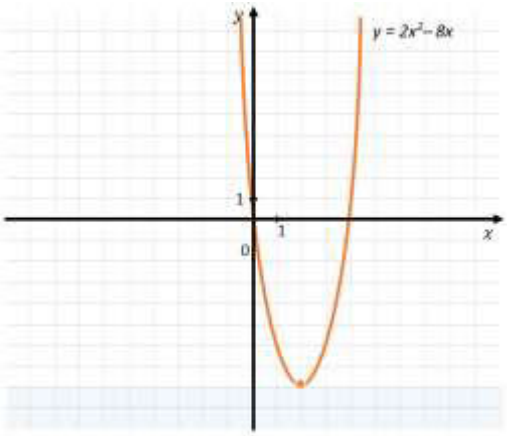
მასწავლებელი:– წარმოდგენილი ფუნქციების გრაფიკების გამოყენებით:

1) დაასახელეთ ფუნქციის: ა) განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე;

ბ) ნიშანმუდმივობის შუალედები;

2) რომელი ფუნქციაა ლუწი? კენტი?





– როგორ გავარჩიოთ ვიზუალურად, რომელია კენტი ფუნქცია და რომელი ლუწი?

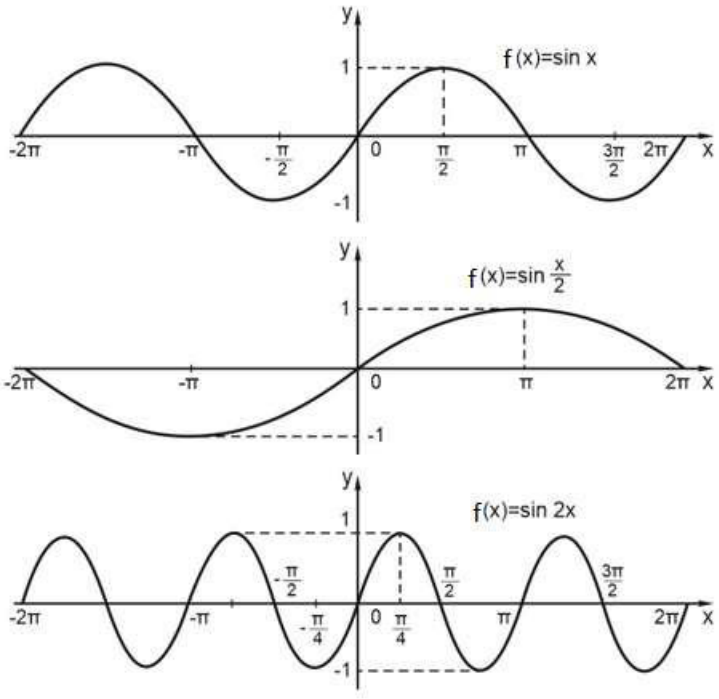
– როგორ გავარკვიოთ ფორმულის საშუალებით, რომელია ლუწი ფუნქცია და რომელი კენტი?

განმტკიცება

კლასში მუშაობენ: №9, №11, №13, №15, №17 სავარჯიშოებზე.

დამოუკიდებელი კვლევითი სამუშაო წყვილებში

– ნახაზის მიხედვით იმსჯელეთ იმ ფუნქციის თვისებებზე, რომელიც ნახაზზეა წარმოდგენილი.



იკვლევენ:

I ვარიანტი: $y = \sin x$ და $y = \sin\frac{x}{2}$ ფუნქციებს;

II ვარიანტი: $y = \sin x$ და $y = \sin 2x$ ფუნქციებს.

მასწავლებელი: – დააკვირდით მოცემულ გრაფიკებს და ცალ-ცალკე დაახასიათეთ თითოეული მათგანი.

მინდა შევნიშნო, რომ სამივე წარმოადგენს სინუსის გრაფიკს, ანუ სინუსოიდას. მართალია,

თქვენ ის ჯერ არ შეგისწავლიათ, მაგრამ ფუნქციის რა თვისებებიც იცით, იმის გამოყენებით იმსჯელეთ.

დამოუკიდებელი სამუშაოს შესრულების შემდეგ პასუხებს კითხულობს წყვილიდან ჯერ ერთი, შემდეგ მეორე მოსწავლე. აფიქსირებენ და ასწორებენ შეცდომებს.

რეფლექსია.

მასწავლებელი:

– რა თემაზე ვიმუშავეთ?

– როგორ ფიქრობთ, მივაღწიეთ მიზანს?

– ძველი ბერძენი ისტორიკოსი ჰეროდოტე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე 425 წელს წერდა, რომ ეგვიპტის მეფეებმა მიწა გაანაწილეს ეგვიპტელებს შორის და ამ მიწების გადასახადს იღებდნენ დაკავებული ნაკვეთის ფართობის პროპორციულად. ხედავთ ამ ამბავში ფუნქციას? პასუხი ახსენით.

საშინაო დავალება: №10, №12, №14, №16 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები.

სავ.№1. ა) f(-2,3)= f(-2,3+1+1)= f(-0,3)=9; ბ) f(3,7)= f(3,7-1-1-1-1)= f(-0,3)=9. პასუხი: ა) 9; ბ)9.

სავ.№2. ა) f(3)+g(5)= f(3-3)+g(5-5)=f (0)+ g(0) = -3;

ბ) f(-6)+g(-10)= f(-6+3+3)+g(-10+5+5)=f (0)+ g(0) = -3;

გ) f(15)+g(15)= f(15-3-3-3-3-3)+g(15-5-5-5)=f (0)+ g(0) = -3. პასუხი: ა)-3; ბ)-3; გ)-3 ; დ) -3.

სავ.№4. f + g ფუნქციის დადებითი პერიოდია 20. მართლაც, განსაზღვრის არედან აღებული ნებისმიერი *x* არგუმენტისთვის

(f + g) (x) = f(x) + g(x)= f(x+4+4+4+4+4) + g(x+5+5+5+5)= f(x+20) + g(x+20)= (f + g) (x+20). პასუხი: 20

სავ.№5-6. აიგება პარაგრაფში განხილული მაგალითის ანალოგიურად.

სავ.№7. f(x)=f(x +T_1) = f (x +T_1 +T_2) ტოლობა სრულდება ნებისმიერი x არგუმენტისათვის განსაზღვრის არედან.

სავ.№8. პერიოდია ნებისმიერი ლუწი ნატურალური რიცხვი, რადგან ლუწი რიცხვის დამატება ლუწ-კენტობას არ ცვლის. უმცირესი დადებითი პერიოდია 2.

სავ.№14. ა) არა, ბ) არა, გ) კენტია, დ) ლუწია, რადგან $f\left(g\left(-x\right)\right)=\left|\left(-x\right)^3\right|=\left|x^3\right|=f\left(g\left(x\right)\right)$.

სავ.№15. $F\left(-x\right)=f\left(-x\right)+f\left(x\right)=F\left(x\right)$, $G\left(-x\right)=f\left(-x\right)-f\left(x\right)=-G\left(x\right)$.

სავ.№16. f(5)=f(-1+6)=2; f(7)= f(1+6) =f(1)=- f(-1)=-2. პასუხი: 0.

სავ.№17. ა) $f(-0,5)= -f(0,5)=-(0,25-0,5)=0,25=f(-0,5+2)=f(1,5)$; პასუხი: 0,5; ბ) ჯერ ავაგებთ გრაფიკს (0;1) შუალედში (პარაბოლას ნაწილი), შემდეგ ცენტრული სიმეტრიით გადავიტანთ (-1;0) შუალედში და ბოლოს პერიოდულობით გავავრცელებთ.

შესაძლებელია? თუ f ფუნქცია ლუწიცაა და კენტიც, მაშინ ყოველი x-სათვის განსაზღვრის არედან, $f(-x)=f(x)=-f(x)\Rightarrow f(x)=0$. პასუხი: შესაძლებელია (მხოლოდ იგივურად ნულის ტოლი ფუნქციაა ასეთი).

აბა, სცადე!

$f(x)=\frac{F(x)+G(x)}{2}$, სადაც F და G მე-15 სავარჯიშოში მოცემული ფუნქციებია.

4.2 $y=\sin x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი (2 სთ)

მიზანი:

- $y=\sin x$ ფუნქციის თვისებების გაცნობა და დასაბუთება (ლუწ-კენტობა, პერიოდულობა, ნიშან-მუდმივობისა და ზრდადობა-კლებადობის შუალედები, ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები) გაცნობა;
- $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება.

მოსწავლემ **უნდა შეძლოს**:

- $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება;
- $y=\sin x$ ფუნქციის თვისებების ჩამოყალიბება და დასაბუთება;
- $y=\sin x$ ფუნქციის თვისებების გრაფიკზე დემონსტრირება;
- $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკისა და თვისებების გამოყენება.

პირველი გაკვეთილი

გაკვეთილის მსვლელობა

შენიშვნა: სასურველია, გაკვეთილზე ინტერაქტიული მოდელის (მაგალითად, GeoGebra) გამოყენება, იმის დემონსტრირებისთვის, თუ როგორ მიიღება სინუსოიდა ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით.

I. **ორგანიზაციული მომენტი** – 2 წთ

II. **წინარე ცოდნის გააქტიურება** – 6 წთ

მასწავლებელი: – რას ეწოდება ფუნქციის გრაფიკი?

– რომელი ფუნქციის გრაფიკებს იცნობთ?

– რას წარმოადგენს წრფივი ფუნქციის გრაფიკი?

– დახაზეთ წრფივი ფუნქციის გრაფიკი და გაიხსენეთ მისი თვისებები.

– რას წარმოადგენს კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი?

– გაიხსენეთ კვადრატული ფუნქციის თვისებები.

– როგორ განვასხვავოთ გრაფიკის მიხედვით ლუწი ფუნქცია კენტი ფუნქციისაგან?

– რას უდრის $\sin 0$? $\sin\frac{\pi}{2}$? $\sin\pi$?

– რას წარმოადგენს ერთეულოვანი წრეწირი?

– როგორ განვსაზღროთ კუთხის სინუსი ერთეულოვან წრეწირზე? (სინუსი არის წერტილის ორდინატა.)

III. გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა – 1 წთ

მასწავლებელი აცნობს გაკვეთილის თემასა და მიზანს.

IV. ახალი მასალის ახსნა – 12 წთ

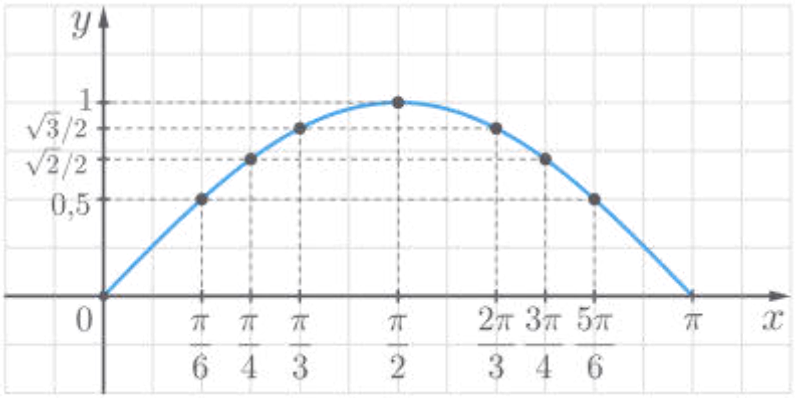
ახალ მასალას უხსნის სახელმძღვანელოს ტექსტის მიხედვით. ნახაზს ასრულებენ მასწავლებელიც და პარალელურად მოსწავლეებიც.

მასწავლებელი: – ავაგოთ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი ისე, როგორც აქამდე ვაგებდით სხვა ფუნქციების გრაფიკებს. ვინ მიხვდა რას ვგულისხმობ? (შევადგინოთ არგუმენტებისა და ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობების ცხრილი და მათი საშუალებით ვიპოვოთ გრაფიკის წერტილები საკოორდინატო სიბრტყეზე. მონიშნული წერტილები შევაერთოთ გლუვი წირით)

ადგენენ ცხრილს:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y=\sin x$	0	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5	0

აგებენ გრაფიკს (მუშაობენ დამოუკიდებლად).



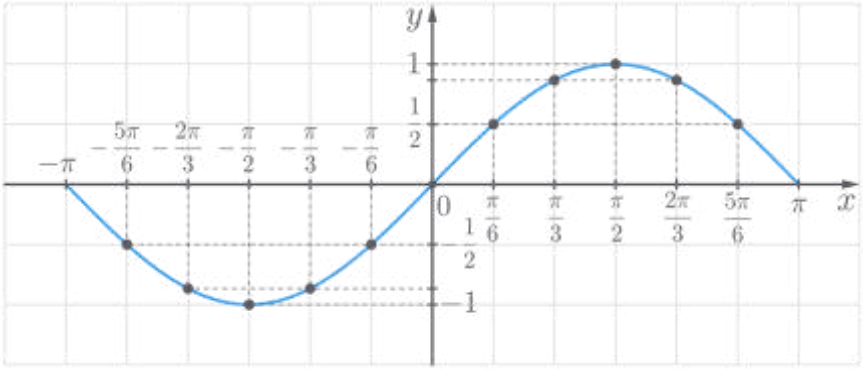
მასწავლებელი:

– როგორ ფიქრობთ, ეს მთლიანი გრაფიკია? (ეს არის გრაფიკის ნაწილი, რომელიც ეკუთვნის $[0;\pi]$ შუალედს.

– ბადეებიან ქაღალდზე გრაფიკის ასაგებად, უმჯობესია, შემდეგი მასშტაბის არჩევა: აბსცისათა ღერძზე ბადის 6 ან 12 უჯრა შეადგენდეს π ერთეულს, ხოლო ორდინატთა ღერძზე 2 უჯრა შეადგენდეს 1 ერთეულს.

– შევძლებთ მთლიანი გრაფიკის აგებას? რატომ ვერ შევძლებთ? (იმიტომ, რომ არგუმენტის მნიშვნელობათა სიმრავლე უსასრულოა)

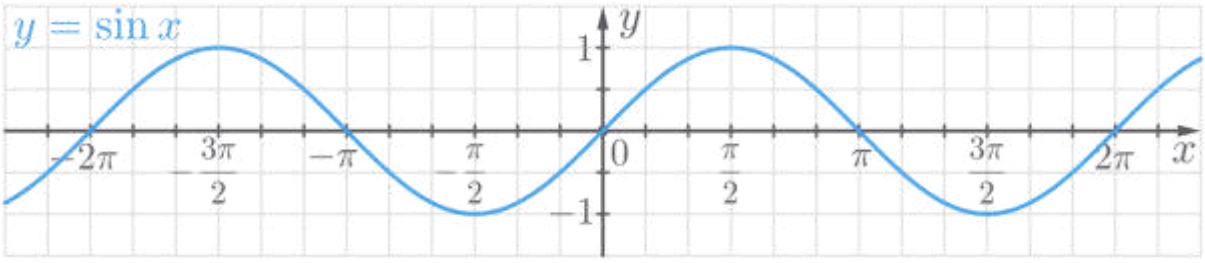
– როგორ ავაგოთ მთლიანი გრაფიკის ისეთი ნაწილი, რომელიც ნათელ სურათს მოგვცემს? (ათვლის სათავის მიმართ ავაგოთ ჩვენ მიერ აგებული გრაფიკის სიმეტრიული გრაფიკი)



– რა მივიღეთ? ($y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის ესკიზი $[-\pi;\ \pi]$ შუალედში, სიგრძეა 2π)

– როგორ გავავრცოთ გრაფიკის ეს ნაწილი მთელ ღერძზე? (რადგან 2π სინუსის პერიოდია რიცხვით ღერძზე გრაფიკის მისაღებად შეგვიძლია $[-\pi;\ \pi]$ შუალედზე გრაფიკის აგებული ნაწილი გადავდოთ რიცხვით ღერძზე მარცხნივ და მარჯვნივ $2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi$ და ა.შ.

მივიღებთ სინუსოიდას, რომელსაც ტალღების ფორმა აქვს)



– ახლა სინუსოიდაზე დაკვირვებით ჩამოაყალიბეთ $y = \sin x$ ფუნქციის თვისებები.

(გრაფიკის მიხედვით მსჯელობენ ფუნქციის განსაზღვრის არეს, მიშვნელობათა სიმრავლის, ლუწ-კენტობის, პერიოდულობისა და ფუნქციის ნულების, ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების შესახებ)

– ახლა დაადგინეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები ჯერ $[-\pi; \pi]$ შუალედში, შემდეგ მთელი განსაზღვრის არეზე.

– დაადგინეთ, რომელ შუალედებშია ფუნქციის მნიშვნელობები დადებითი და რომელში – უარყოფითი.

– რატომ არ შეუძლია სინუსის „ტალღას“ 1-ზე მაღლა ასვლა ან −1-ზე დაბლა ჩასვლა? (პასუხი დაუკავშირეთ სინუსის განმარტებას ერთეულოვან წრეწირის საშუალებით)

– რა მოხდება, თუ გრაფიკს ავსახავთ კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულად?

V. განმტკიცება – 15 წთ

მუშაობენ №1, №3, №5, №13, №17 ამოცანებზე.

VI. რეფლექსია , შედეგების შეჯამება – 6 წთ

– რას წარმოადგენს სინუსოიდა?

– გადის თუ არა სინუსოიდა კოორდინატთა სათავეზე?

– შესაძლებელია, რომ სინუსის მნიშვნელობა იყოს 0,7? −0,689? 1,5? -7?

– შესაძლებელია, რომ არგუმენტის მნიშვნელობა იყოს: 0,7? −0,689? 1,5? -7?

– რა არის სინუსის პერიოდი?

– როგორ გამოვიყენეთ სინუსის პერიოდულობა გრაფიკის აგებისას?

VII. საშინაო დავალება – 3 წთ

№2, №4, №6, №14 სავარჯიშოები. მოიძიე შენ გარშემო სინუსოიდის ფორმის მაგალითები. (სავარაუდოდ, გამოიყენებენ მასწავლებლის მიერ მიწოდებულ მასალას. მოიძიებენ: ზღვის პეიზაჟს (ტალღებს), კარდიოგრამას, ნაქარგებს ან ნახატებს და სხვ.)

მეორე გაკვეთილი

მიზანი:

- $y = \sin x$ ფუნქციის თვისებებისა და გრაფიკის შესახებ შეძენილი ცოდნის გაღრმავება.
- ფუნქციის თვისებები შესწავლა გრაფიკის მიხედვით. $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის წაკითხვა;
- $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნა, შესაბამისი გრაფიკის აგება და წაკითხვა.

გაკვეთილის გეგმა

I. ორგანიზაციული მომენტი

II. წინარე ცოდნის გააქტიურება

1) ფრონტალური გამოკითხვა:

- როგორია სინუს ფუნქციის განსაზღვრის არე? მნიშვნელობათა სიმრავლე?
- შესაძლებელია თუ არა გრაფიკზე ვაჩვენოთ, როგორ იცვლება სინუსის მნიშვნელობები?
- რას წარმოადგენს $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი?
- დაასახელეთ სინუსოიდის მიერ ღერძებთან კვეთის წერტილების კოორდინატები.

2) ჩამოაყალიბეთ სინუსოიდის აგების ალგორითმი.

III. განმტკიცება

GeoGebra-ს გამოყენებით აგებენ $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკს. გრაფიკზე აჩვენებენ არგუმენტებს და ასახელებენ შესაბამის ფუნქციის მნიშვნელობებს და პირიქით, აჩვენებენ ფუნქციის მნიშვნელობებს და ასახელებენ გრაფიკზე შესაბამის არგუმენტებს, აჩვენებენ და ასახელებენ ზრდადობისა და კლებადობის შუალედებს.

მასწავლებელი: – ვინ მიხვდება, რა მდებარეობა და რა სახე ექნება $y = \sin x + 2$ ან $y = \sin x - 1$ ფუნქციის გრაფიკს? (პასუხობენ და განმარტავენ, თუ რატომ გამოიტანეს ასეთი დასკვნა)

IV. გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა

– მიხვდით, დღეს რას ვისწავლით? ვისწავლით $y = \sin x \pm a$, $y = k \sin x$, $y = \sin kx$ გრაფიკების აგებას, ანუ $y = \sin x$ ფუნქციის გარდაქმნის სხვადასხვა შემთხვევას.

V. ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი: – ნახეთ კონტექსტის 1-ელი მაგალითი. დააკვირდით გრაფიკებს. რომელი ფუნქციების გრაფიკებია ნახაზზე მოცემული?

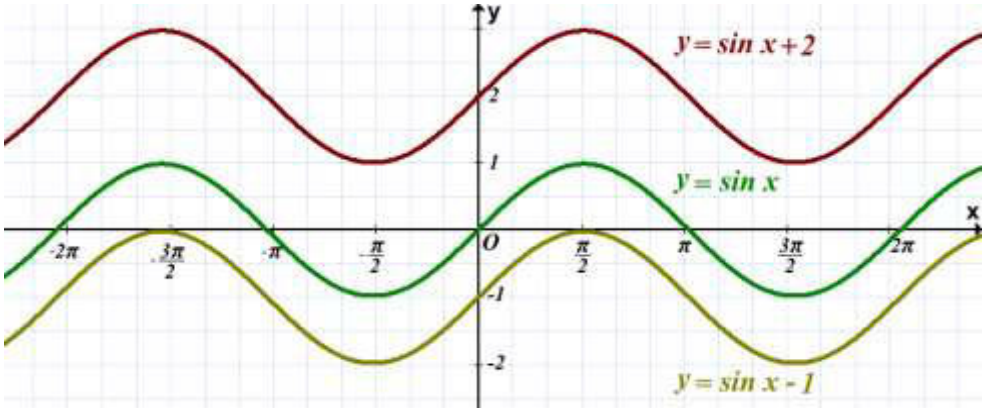
– შეადარეთ ერთმანეთს $y = \sin x$ და $y = \sin x + 2$ ფუნქციათა გრაფიკები. რა განსხვავებასა და რა მსგავსებას ხედავთ ამ გრაფიკებს შორის?

აკვირდებიან ცვლილებებს, ადარებენ გრაფიკებს და ასკვნიან, რომ $y = \sin x + 2$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით 2 ერთეულით ზემოთ.

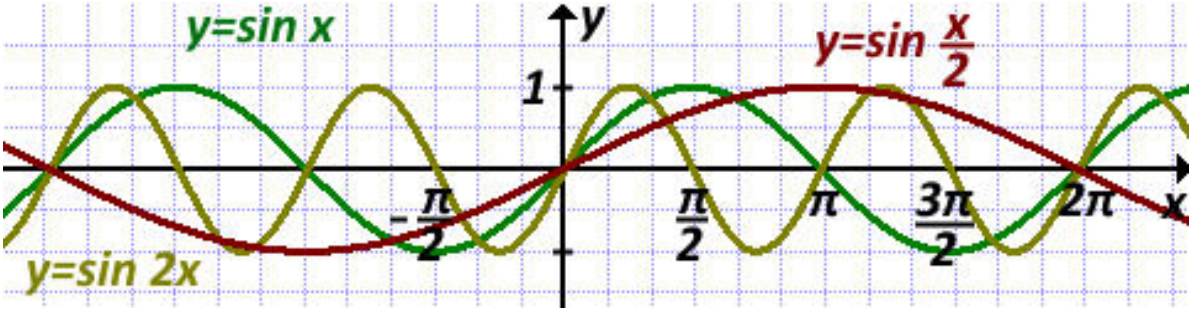
ასევე ადარებენ ერთმანეთს $y = \sin x$ და $y = \sin x - 1$ ფუნქციათა გრაფიკებს და ასკვნიან, რომ $y = \sin x - 1$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით 1 ერთეულით ქვემოთ.

–შეგიძლიათ ზოგადი დასკვნის ჩამოყალიბება იმის შესახებ, თუ როგორ ავაგოთ $y = \sin x + a$ ფუნქციის გრაფიკი $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით?

($y = \sin x + a$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით Oy ღერძის გასწვრივ (ვერტიკალურად) a ერთეულით ზემოთ, თუ $a > 0$ და a ერთეულით ქვემოთ, თუ $a < 0$.)



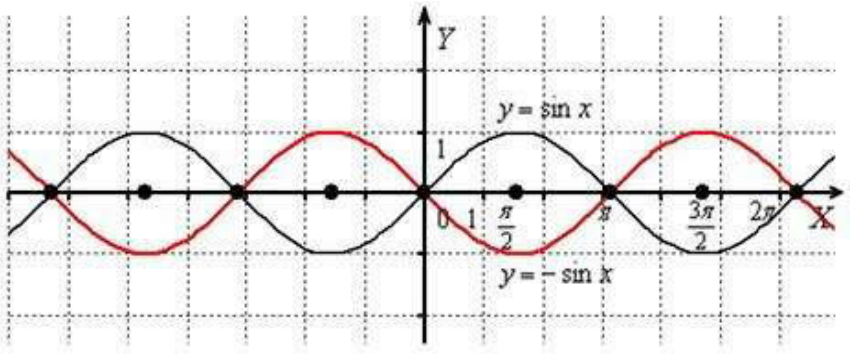
მასწავლებელი: – ახლა ვნახოთ კონტექსტის მე-2 ამოცანა. ამოცანის ტექსტის წაკითხვისა და ამოხსნის გააზრების შემდეგ ასკვნიან, რომ



- $y = \sin\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის 2-ჯერ გაჭიმვით;
- $y = \sin 2x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის Oy ღერძისკენ 2-ჯერ შეკუმშვით.

VI. ჩანმტკიცება

მუშაობენ №8, №10, №12 სავარჯიშოების ამოხსნაზე. მე-8 ამოცანაში მივლენ იმ დასკვნამდე, რომ $y = -\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკის Ox ღერძის მიმართ სიმეტრიით.



VII. დამოუკიდებელი სამუშაო

ამოცანა №9 ორ ვარიანტად, რიგების მიხედვით.

VIII. რეფლექსია, შედეგების შეჯამება

– აჩვენეთ გრაფიკზე სინუსის ნულები, ზრდადობის შუალედები, დადებითობის შუალედები.

– როგორ რწმუნდებით გრაფიკის გამოყენებით, რომ $y = \sin x$ ფუნქცია კენტია?

IX. საშინაო დავალება: №7, №11, №16 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№1. $y_{max} = 3$; $y_{min} = -1$.

სავ.№2. ა) ლუწი; ბ) კენტი; გ) კენტი; დ) არც ლუწი, არც კენტი.

სავ.№3. ა) $\frac{\pi}{6}$; ბ) $-\frac{\pi}{2}$; გ) $\frac{\pi}{2}$.

სავ.№5. ა) $\sin 1 < \sin 2$; ბ) $\sin\frac{\pi}{3} > \sin\frac{\pi}{5}$; გ) $\sin\frac{3\pi}{5} > \sin\frac{4\pi}{5}$; დ) $\sin\frac{5\pi}{6} > \sin\frac{6\pi}{5}$.

სავ.№10. $x_{max} = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; $x_{min} = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

სავ.№ 11. 0; $\pm\frac{\pi}{3}$; $\pm\frac{2\pi}{3}$; $\pm\pi$.

სავ.№12.. $\sin\frac{3\pi}{2};\quad \sin\frac{4\pi}{3};\quad \sin\frac{\pi}{6};\quad \sin\frac{\pi}{4};\quad \sin\frac{\pi}{3};\quad \sin\frac{\pi}{2}.$

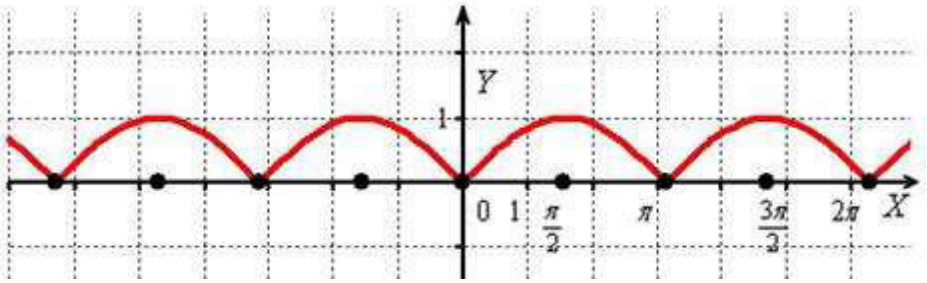
სავ.№13. ა) 3 და 2; ბ) 1 და 0; გ) 1 და $\frac{1}{3}$; დ) 1 და $\frac{1}{2}$.

სავ.№14. $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$

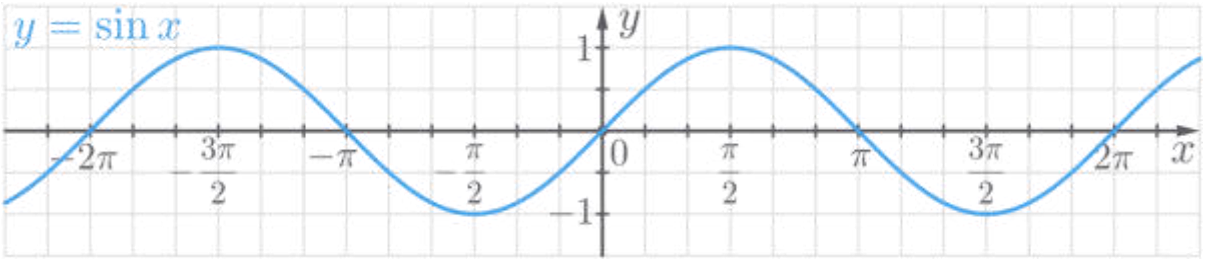
სავ.№ 15. ა) $y=9\sin^2 x-4$, ამიტომ უდიდესია 5, ხოლო უმცირესი -4;

ბ) $x_{max}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_{min}=\pi k,\ k\in Z.$

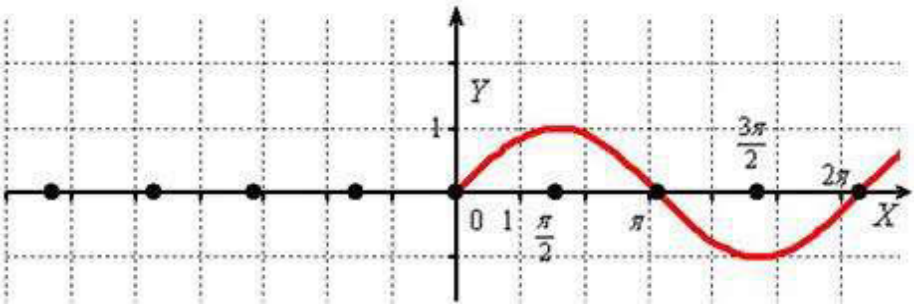
სავ.№16. ა) ჯერ აგებენ სინუსოიდას, ხოლო შემდეგ მის დადებით ნაწილს ტოვებენ უცვლელად, უარყოფით ნაწილს სიმეტრიულად ასახავენ Ox ღერძის მიმართ და მიიღებენ $y=|\sin x|$ ფუნქციის ქვემოთ მოცემულ გრაფიკს.



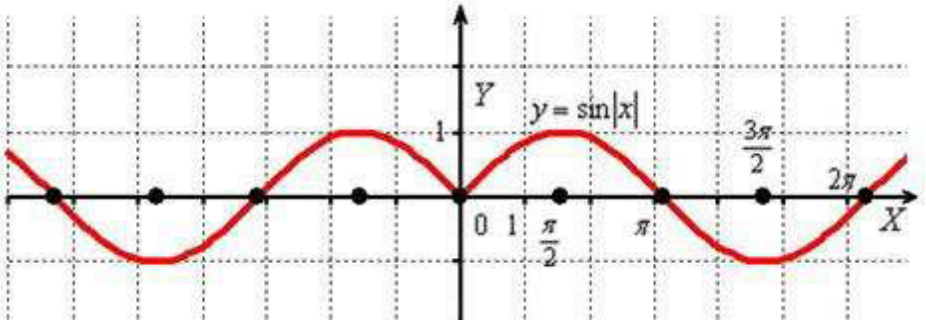
ბ) ისევ ვიყენებთ $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს



რადგან არგუმენტი $|x|\geq 0$, ამიტომ გვრჩება გრაფიკის ნაწილი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $x\geq 0$.



გრაფიკის ეს ნაწილი სიმეტრიულად ავსახოთ Oy ღერძის მიმართ მარცხენა ნახევარსიბრტყეში. მივიღებთ ქვემოთ მოცემულ გრაფიკს.



სავ.№17. $-\frac{11\pi}{6}; \quad -\frac{7\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{6}; \quad \frac{5\pi}{6}.$

აბა, სცადე!

დაყვანის ფორმულით $\sin^2(x \pm \pi) = \sin^2 x$. მეორე მხრივ სინუსის ნულები მხოლოდ π-ს ჯერადებია.

4.3 $y = \cos x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი (2 სთ)

მიზანი:

- $y = \sin x$ ფუნქციის თვისებების გამეორება;
- $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება;
- $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით ფუნქციის:

  ა) განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის მითითება;

  ბ) ლუწობის ჩვენება;

  გ) პერიოდის, ზრდადობისა და კლებადობის, ნიშანმუდმივობის შუალედების დადგენა;

  დ) უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების ჩვენება;

- ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნა;
- კვლევითი ჩვევების გამომუშავება.

გაკვეთილის მსვლელობა (პირველი გაკვეთილი)

ორგანიზაციული მომენტი

საშინაო დავალების შემოწმება.

წინარე ცოდნის გააქტიურება

- $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკზე მუშაობა:

(აჩვენებს მზა გრაფიკს) იპოვე $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკზე შესაბამისი წერტილი:

$y = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),\ y = \sin\frac{\pi}{2},\ y = \sin\frac{3\pi}{2},\ y = \sin\frac{\pi}{3},\ y = \sin\frac{\pi}{6}.$

- როგორ ავაგოთ $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი?
- როგორ ავაგოთ $y = \sin x + 1$ ფუნქციის გრაფიკი?
- როგორ ავაგოთ $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ ფუნქციის გრაფიკი?
- რომელი ფუნქციის გრაფიკის სქემაა მოცემული? (აჩვენებს გრაფიკს)

მოსწავლეები მსჯელობენ და თითოეულ თვისებას აჩვენებენ გრაფიკზე.

გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა.

მასწავლებელი: – სინუსის გარდა, კიდევ რომელ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციას ვიცნობთ?

– რა ვისწავლეთ წინა ორ გაკვეთილზე? (სინუსის გრაფიკის აგება და მისი გამოყენებით $y = \sin x$ ფუნქციის თვისებების დადგენა)

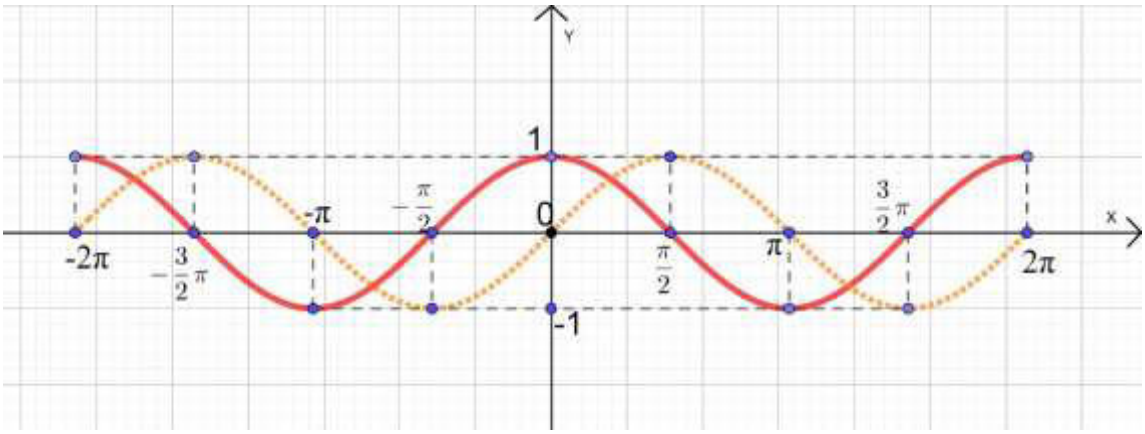
– თუ ხვდებით რა არის ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის თემა?

– დიახ. ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის თემაა $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება, თვისებების დადგენა და მისი გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას.

ახალი მასალის ახსნა

მასწავლებელი: – ააგეთ $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი.

– როგორ ავაგოთ $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკი? (მოსწავლეები გამოთქვამენ თავიანთ მოსაზრებებს.)



დაყვანის ფორმულის გამოყენებით გარდაქმენით $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. რა მიიღეთ?

$\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.\right)$

მასწავლებელი ყურადღებით დაკვირვებას სთხოვს აგებულ გრაფიკზე. სქემების ანალიზის შემდეგ ასკვნიან, რომ აგებული გრაფიკი $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკია და მისი მიღება შეგვიძლია $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის აბსცისათა ღერძზე $\frac{\pi}{2}$ -ით მარცხნივ გადატანით. გრაფიკზე დაკვირვებით ადგენენ $y=\cos x$ ფუნქციის თვისებებს.

განმტკიცება.

მუშაობენ №1, №3, №5, №7 ამოცანების ამოხსნაზე.

დამოუკიდებელი სამუშაო

I ვარიანტი: სახელმძღვანელო, №10 ამოცანა.

II ვარიანტი: გრაფიკის მიხედვით დაადგინე, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზე სრულდება $\cos x>0$ უტოლობა.

რეფლექსია. შედეგების შეჯამება

მასწავლებელი:

– რა ვისწავლეთ დღეს?

– როგორ ავაგოთ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკი? (პასუხს გასცემენ სხვადასხვა გზების დასახელებით)

– რა სახის ამოცანების ამოხსნას შევძლებთ $y=\cos x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით?

საშინაო დავალება: №2, №4, №6, №9 ამოცანები.

მეორე გაკვეთილზე მუშაობენ $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის გარდაქმნაზე და $y = \cos x$ ფუნქციის გრაფიკის შესახებ შეძენილი ცოდნის გაღრმავებასა და გამოყენებაზე.
კლასში მუშაობენ კონტექსტის ორივე მაგალითზე და №11, №12, №13, №15, №16 სავარჯიშოებზე.

დამოუკიდებელი სამუშაო
I ვარიანტი: №14 სავარჯიშო;
II ვარიანტი: №15 სავარჯიშო, რომელშიც შუალედი იქნება $[-\pi; 3\pi]$.

საშინაო დავალება: №8, №17, №18 სავარჯიშოები.
კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები

სავ.№7. ა) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; ბ) $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

სავ.№8. ა) $\cos 1 > \cos 2$;

სავ.№11. ა) 3; -1; ბ) 2; 1.

სავ.№13. ა) 5; -2.

სავ.№17. ა) 5; ბ) -5.

აბა, სცადე!
მტკიცდება დაყვანის ფორმულების გამოყენებით.

4.4 $y=\tan x$ ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი (2 სთ)

მიზანი:

- $y = \tan x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება;
- $y = \tan x$ ფუნქციის ძირითადი თვისებების გამოკვლევა გრაფიკის გამოყენებით;
- $y = \tan x$ ფუნქციის გრაფიკისა და თვისებების გამოყენება ამოცანების ამოსახსნელად.

გაკვეთილის მსვლელობა

ორგანიზაციული მომენტი
წინარე ცოდნის გააქტიურება
მასწავლებელი:

– როგორ განიმარტება ტანგენსი?

– ცვლადის რა მნიშვნელობისთვის არა აქვს აზრი ტანგენსს? (რომლისთვისაც კოსინუსი 0-ის ტოლია)

– რომელია ეს მნიშვნელობები? $\left(x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.\right)$

– რა არის ტანგენსის პერიოდი? $(T = \pi.)$

გაკვეთილის თემისა და მიზნის გაცნობა

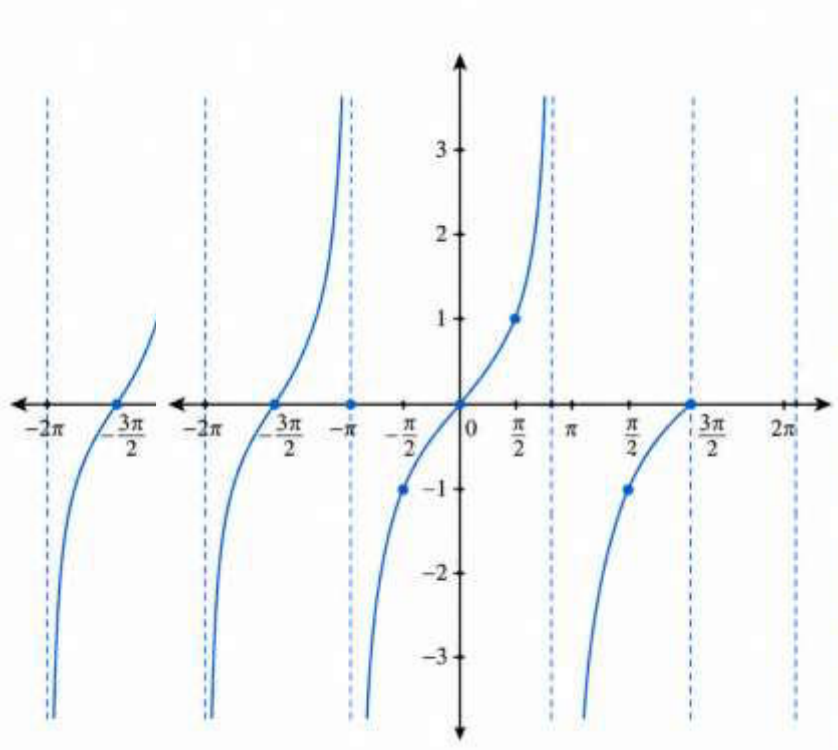
– წინა გაკვეთილებიდან გამომდინარე, ალბათ უკვე მიხვდით, რა არის ჩვენი დღევანდელი გაკვეთილის თემა (ტანგენსის ფუნქცია, მისი გრაფიკი და თვისებები).

– ავაგოთ ტანგენსის ფუნქციის გრაფიკი.

ახალი მასალის ახსნა

–შევადგინოთ ცხრილი (ადგენენ ცხრილს).

–მიღებული მონაცემებით ავაგოთ გრაფიკი (აგებენ გრაფიკს).



$-\frac{3\pi}{2}$	–
$-\pi$	0
$-\frac{\pi}{2}$	–
$-\frac{\pi}{4}$	−1
0	0
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	–
$\frac{3\pi}{4}$	−1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	–
2π	0

მასწავლებელი აცნობს ასიმპტოტებს (წრფეს, რომელსაც გრაფიკი უახლოვდება, მაგრამ არ კვეთს), თან სთხოვს მოსწავლეებს ახსნან, რატომ ხდება ასე.

– ახლა ვაჩვენოთ, რომ π პერიოდით მეორდება გრაფიკი (აგებენ გრაფიკის სხვა ნაწილებსაც).

– აგებული გრაფიკის გამოყენებით გამოვიკვლიოთ $y = \tan x$ ფუნქციის თვისებები. (მუშაობენ დაფაზე და რვეულებში)

გრაფიკის აგებისას გააცნობს ცნებებს — ტანგენსოიდა, ტანგენსოიდის მთავარი შტო, ტანგენსის წრფე.

განმტკიცება

მასწავლებელი: – სანამ სავარჯიშოების ამოხსნაზე გადავალთ, ჩამოვაყალიბოთ

ფუნქციის გრაფიკის აგების ეტაპები.:

1. დავხაზოთ ღერძები;
2. მოვნიშნოთ სკალა;
3. მოვნიშნოთ წერტილები, ცხრილის წყვილები;
4. გავავლოთ მონიშნულ წერტილებზე გლუვი წირი;
5. გადავიტანოთ შტოები π ერთეულით.

სახელმძღვანელოში მოცემული ნახაზის მიხედვით მუშაობენ ტანგენსის გრაფიკზე და №1, №3, №4 სავარჯიშოების ამოხსნაზე.

- **დამოუკიდებელი სამუშაო**

I ვარიანტი: №8- ა სავარჯიშო;

II ვარიანტი: №8 - ბ სავარჯიშო.

დამოუკიდებელი სამუშაოს შესრულების შემდეგ მსჯელობენ აგებული გრაფიკების შესახებ.

რეფლექსია

– რა ვისწავლეთ დღეს?

– განხილული საკითხების გარდა, კიდევ ხომ არ გაინტერესებთ რამე?

– გრაფიკის მიხედვით მიპასუხეთ კითხვაზე: არგუმენტის რა მნიშვნელობებისთვისაა ტანგენსის მნიშვნელობები დადებითი? უარყოფითი? 0-ის ტოლი?

– ჩამოაყალიბეთ $y = \tan x$ ფუნქციის თვისებები.

საშინაო დავალება: №2, №5,№7 სავარჯიშოები.

მეორე საათი

მიზანი:

1) ცოდნის გაღრმავება:
- y=tanx ფუნქციისა და მისი გრაფიკის შესახებ;
- y=tanx ფუნქციის თვისებების შესახებ.

2) შეძენილი ცოდნის გამოყენება ამოცანებისა და მაგალითების ამოსახსნელად.

გაკვეთილის მსვლელობის მოკლე კონსპექტი

ორგანიზაციული მომენტი

წინარე ცოდნის გააქტიურება

მასწავლებელი:

– რა არის ტანგენსი? (ტანგენსი არის რიცხვი, რომელიც დაკავშირებულია ერთეულოვან წრეწირზე მდებარე წერტილის სინუსთან და კოსინუსთან)

– რომელი კუთხეების ტანგენსის მნიშვნელობები იცით?

– გავიხსენოთ y=tanx ფუნქციის თვისებები (გრაფიკი აქვს გამზადებული და აჩვენებს).

კითხვა-პასუხის რეჟიმში.

– რა მნიშვნელობების მიღება შეუძლია ტანგენსს? (ნებისმიერი რიცხვის)

– დაასახელეთ ორი მნიშვნელობა, რომელზეც ტანგენსი არ განისაზღვრება.

– რა არის ტანგენსის პერიოდი?

განმტკიცება.

მასწავლებელი: – გაიხსენეთ რა პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად ვიყენებდით ტანგენსს (ხის სიმაღლის დადგენა, როცა ვიცით ხემდე მანძილი და კუთხე, რომლითაც მოჩანს ეს ხე, ციხე-კოშკის სიმაღლის დადგენა, რომელსაც ვაკვირდებით ორი ადგილიდან)

ტანგენსს ხშირად იყენებენ კიბის დახრის კუთხის გამოთვლაში. აბა, როგორ ამოცანას შეადგენთ ამ ფაქტის გამოყენებით?

მუშაობენ №6, №10 სავარჯიშოების ამოხსნაზე.,

დამოუკიდებელი სამუშაო

I ვარიანტი

რამდენჯერ ხდება ტანგენსის მნიშვნელობა 1-ის ტოლი $[-\pi;2\pi]$ შუალედში? არგუმენტის რომელი მნიშვნელობებისთვისაა ფუნქცია დადებითი მოცემულ შუალედში?

II ვარიანტი

რამდენჯერ ხდება $y=\tan x$ ფუნქციის მნიშვნელობა 0-ის ტოლი $[0;\ 3\pi]$ შუალედში? არგუმენტის რომელი მნიშვნელობებისთვისაა ფუნქცია დადებითი მოცემულ შუალედში?

რეფლექსია

– რა არის ტანგენსის განსაზღვრის არე?

– რა არის ტანგენსის მნიშვნელიბათა სიმრავლე?

– როგორ მიიღება $y=\tan x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით: ა) $y=\tan|x|$; ბ) $y=|\tan x|$ ფუნქციის გრაფიკი?

საშინაო დავალება: №9 და №11 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები:

სავ.№3. ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$..

სავ.№4. $-2\pi; -\pi; 0; 2\pi.$

სავ.№5. $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$..

სავ.№6. ა) $y=f(x)=\tan^2 x+3$ ფუნქცია ლუწია. მართლაც, განსაზღვრის არედან აღებული ნებისმიერი x არგუმენტისათვის $-x$ ეკუთვნის განსაზღვრის არეს, და:

$$f(-x)=\tan^2(-x)+3=(-\tan x)^2+3=\tan^2 x+3=f(x).$$

ბ) კენტი; გ) ლუწი; დ)კენტი; ე) არც კენტი, არც ლუწი.

სავ.№7. $x=\pi k,\ k\in Z.$.

სავ.№9. ა) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2=1.$;

ბ) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha=1.$;

გ) $(\tan\alpha+\tan^{-1}\alpha)(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=\left(\frac{\tan^2\alpha+1}{\tan\alpha}\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$.

სავ.№10. ა) $x=30^\circ$; ბ) $x=-30^\circ$; გ) $x=0^\circ$; დ) $x=0^\circ$; ე) $x=60^\circ$; ვ) $x=-60^\circ$.

სავ.№11. $\tan x=0,75\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{3}{4}\Rightarrow\begin{cases}\sin x=3k\\ \cos x=4k\end{cases}\Rightarrow 9k^2+16k^2=1\Rightarrow k=\pm\frac{1}{5}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{3}{5},\ \cos x=\pm\frac{4}{5}.$

4.5 უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა. (4 სთ)

პირველი გაკვეთილი

მიზანი: მოსწავლემ შეძლოს:

- $\sin x = a,\ \cos x = a$ განტოლებათა ზოგადი ამონახსნის ფორმულების გამოყვანა და ამოხსნა ფორმულებით და გრაფიკულად;
- მითითებულ შუალედში ტრიგონომეტრიული განტოლების ამონახსნის პოვნა;
- მათემატიკური მეტყველების განვითარება.

გაკვეთილის მსვლელობა

ორგანიზაციული მომენტი

წინარე ცოდნის გააქტიურება

მასწავლებელი სვამს კითხვებს:

– რა არის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?

– რას წარმოადგენს ერთეულოვანი წრეწირი?

– კუთხის საზომ რომელ ერთეულებს ვიცნობთ?

– მოცემული გრაფიკებიდან რომელია სინუსოიდა? კოსინუსოიდა? ტანგენსის გრაფიკი? (აჩვენებს გრაფიკებს)

– რა ნიშანი აქვს ტრიგონომეტრიული წრეწირის მეოთხედების მიხედვით სინუსს? კოსინუსს? ტანგენსს?

– ლუწია თუ კენტი სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?

– ჩამოთვალეთ ფუნქციათა მნიშვნელობები პირველი მეოთხედის ძირითად კუთხეებში.

გაკვეთილის თემის გაცნობა

მასწავლებელი აჩვენებს ჩანაწერს :

$$5x + 18 = 0;\ 3x^2 - 2x + 3 = 0;\ \sin 2x = 1;\ 2\cos x = 0;\ \tan x = 3.$$

– რა სახელს დაარქმევთ მოცემულ ჩანაწერს? (განტოლებები)

– რომელია მათგან თქვენთვის ნაცნობი?

– რით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან წარმოდგენილი $3x^2 - 2x + 3 = 0$ და $2\cos x = 0$ განტოლებები?

– მიხვდით რა იქნება დღეს ჩვენი გაკვეთილის თემა?

– დღეს უნდა გავეცნოთ ტრიგონომეტრიულ განტოლებებს და ვისწავლოთ მათი ამოხსნა.

ახალი მასალის შესწავლა

– თქვენი აზრით, შემოთავაზებული განტოლებებიდან რომელია ტრიგონომეტრიული?

$$\frac{x+5}{3x-1}=\frac{2}{5};\quad 3\sin x+2\cos x=3;\quad \tan x+x^2=4.$$

– დაასაბუთეთ პასუხი. (პირველ განტოლებაში ტრიგონომეტრიული ფუნქცია საერთოდ არაა, ამიტომ არაა ტრიგონომეტრიული, მეორე ტრიგონომეტრიულია, ხოლო მესამე – შერეული)

– შეგიძლათ განმარტოთ, თუ როგორ განტოლებას ჰქვია ტრიგონომეტრიული? (ტრიგონომეტრიული განტოლება არის განტოლება, რომელშიც უცნობი მოქცეულია ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ნიშნის ქვეშ)

– ქვემოთ მოცემულია უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებები:

$$\sin x=a,\ \cos x=a,\ \tan x=a$$

სადაც a მოცემული რიცხვია.

–სანამ განტოლებების ამოხსნის გზებს შევისწავლით, მანამ მაინტერესებს პასუხი კითხვაზე: – აქვს თუ არა ამონახსნი მოცემულ განტოლებას:

$$\cos\left(\frac{2}{3}x-\pi\right)=3?\quad \sin(2\pi+3x)=-2?$$

პასუხობენ: – არცერთს არ აქვს ამონახსნი, რადგან სინუსი და კოსინუსი მნიშვნელობებს იღებს $[-1;+1]$ შუალედში.

მასწავლებელი:

– მაშასადამე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\sin x=a$ და $\cos x=a$ განტოლებებს $|a|>1$ შემთხვევაში ფესვები არა აქვს.

– რას ნიშნავს ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა? (ვიპოვოთ მისი ყველა ამონახსნი ან ვაჩვენოთ, რომ არა აქვს ფესვები.)

– $\sin x=a,\ \cos x=a,\ \tan x=a$ განტოლებებს უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებები ჰქვია. ამოვხსნათ $\sin x=0,5$ განტოლება. სახელმძღვანელოს მიხედვით ხსნიან განტოლებას. განტოლებას ამოხსნიან გრაფიკულადაც.

განმტკიცება

$\sin x=a$ განტოლების გრაფიკული ამოხსნა ნიშნავს იმ კვეთის წერტილების აბსცისების პოვნას, რომლებიც მიიღება სინუსოიდას $y=a$ წრფით გადაკვეთისას.

ადგენენ $\sin x=a$ **განტოლების გრაფიკულად ამოხსნის ალგორითმს:**

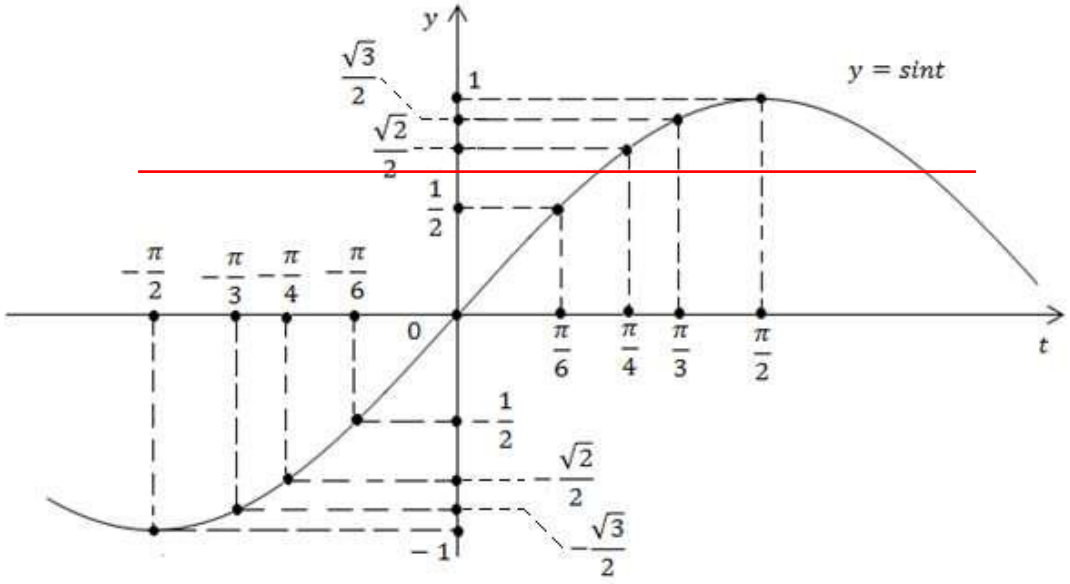
1) ავაგოთ სინუსოიდა. აბსცისათა ღერძზე მოვნიშნავთ არგუმენტებს, ხოლო ორდინატთა ღერძზე – ფუნქციის მნიშვნელობებს -1-იდან 1-მდე.

2) მოვნიშნოთ ორდინატთა ღერძზე a რიცხვი და მასზე გავავლოთ აბსცისათა ღერძის პარალელური წრფე.

3) ვიპოვოთ კვეთის წერტილები მონაკვეთზე.

თუ წრფე გადის:

- 1-ის ზემოთ ან -1-ის ქვემოთ, მაშინ განტოლებას ამოხსნა არა აქვს.
- თუ $-1 \le a \le 1$, მაშინ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი; $\arcsin a$ ჩანაწერით აღვნიშნავთ.
- თუ $-1 \le a \le 1$, მაშინ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ შუალედში განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელსაც $\arcsin a$ ჩანაწერით აღნიშნავენ.



ხსნიან $\sin x = -1$ განტოლებას. ამის შემდეგ ხსნიან განტოლებებს:

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin x = 0$. შემდეგ განაზოგადებენ ამოხსნის ხერხს ნებისმიერი a -თვის, რისთვისაც იყენებენ $arc\sin a$ -ს. მასწავლებელს მოსწავლეებთან ერთად გამოჰყავს ფორმულა $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$, რომელსაც გრადუსებითაც წარმოადგენენ. ამ ფორმულის გამოყვანის შემდეგ მასწავლებელი სვამს კითხვებს:

– რა არის n? (ნებისმიერი მთელი რიცხვია 0, 1, -1, 2, -2, ...)

– რას ნიშნავს ჩანაწერი $\arcsin a$? (რიცხვი, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედიდან, რომლის სინუსი a -ს ტოლია.)

– დაასახელეთ ერთი მაგალითი. $\left(\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\right)$

– რას უდრის $\arcsin(-a)$? (arcsin(−a)=−arcsina)

ანალოგიურად ეცნობიან $y=\cos\alpha$ განტოლების ამოხსნას სახელმძღვანელოში მოცემულ მაგალითზე და გრაფიკზე დაყრდნობით. ხსნიან განტოლებებს:

$\cos x=\frac{1}{2}$, $\cos x=0$, $\cos x=-1$.

კლასში მუშაობენ №1, №3, №5, №7 სავარჯიშოების ამოხსნაზე.

დამოუკიდებელი სამუშაო.

I ვარიანტი: №6 — ა) სავარჯიშო;

II ვარიანტი: №6 — დ) სავარჯიშო.

რეფლექსია

მასწავლებელი:

– რა ვისწავლეთ დღეს?

– ყველაფერი გასაგებია, თუ კიდევ ვიმსჯელოთ რომელიმე საკითხზე?

– რა ამოხსნა ექნება $\cos x=-2$ განტოლებას? $\sin x=1$ განტოლებას?

– a-ს რა მნიშვნელობებისთვის აქვს ამონახსნი $\sin x=a$ განტოლებას?

საშინაო დავალება: №2, №4, №6 (დარჩენილი განტოლებები) სავარჯიშოები.

მეორე გაკვეთილი

მიზანი:

- $y=\tan x$ $y=\tan x$ განტოლების ზოგადი ამონახსნის ფორმულის გამოყვანა;
- $y=\sin x$, $y=\cos x$ განტოლებათა ამონახსნის ხერხების შესახებ შეძენილი ცოდნის განმტკიცება;
- მითითებულ შუალედში ტრიგონომეტრიული განტოლების ამონახსნის პოვნა.

გაკვეთილის მსვლელობა

ორგანიზაციული მომენტი.

საშინაო დავალების შემოწმება. პრობლემური დავალების (უმჯობესია, მსგავსის) ამოხსნა.

წინარე ცოდნის გააქტიურება

1) კითხვებზე პასუხის გაცემა

- როგორ განტოლებებს ვსწავლობდით წინა გაკვეთილებზე?

- როგორ განტოლებას ეწოდება ტრიგონომეტრიული?
- რას ნიშნავს ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება?

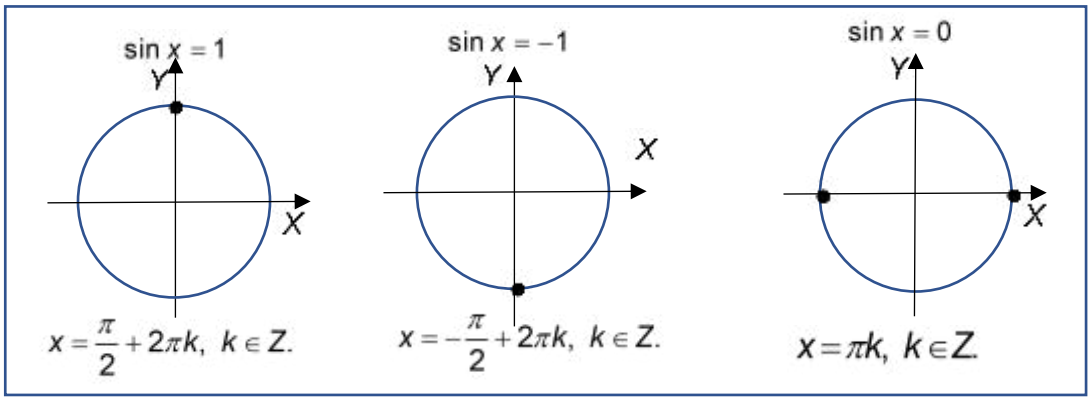
2) მასწავლებელი: – გავიხსენოთ ტრიგონომერტიული განტოლებების კერძო შემთხვევები და მათი ამოხსნა. დავიწყოთ სინუსის შემცველი კერძო სახის განტოლებებით. ჩამოწერილია განტოლებები. მოსწავლეები თითოეულ მათგანს უწერენ პასუხს.

$$\sin x = 0,\ \ x = \pi n,\quad n \in Z;$$

$$\sin x = 1,\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z;$$

$$\sin x = -1,\ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z.$$

– ვნახოთ როგორ გამოიყურება სქემაზე ეს განტოლებები



$\sin x = 0,\ \ x = \pi n,\quad n \in Z;$

$\sin x = 1,\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\quad \sin x = -1,\ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z;$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z;\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k,\quad k \in Z;$

$\sin x = a,\quad a \in [-1; 1].\ \ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\quad n \in Z.$

$$\sin x = \frac{1}{7},\ x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{7} + \pi k,\quad k \in Z.$$

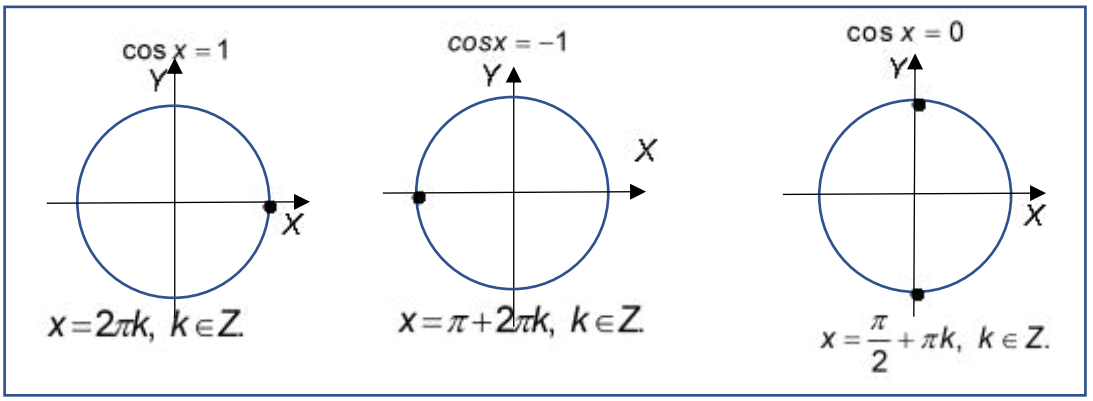
– ახლა გავიხსენოთ ტრიგონომეტრიული განტოლების მარტივი კერძო შემთხვევები კოსინუსის მონაწილეობით:

$$\cos x = 0,\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\quad n \in Z;$$

$$\cos x = 1,\quad x = 2\pi n,\quad n \in Z;$$

$$\cos x = -1,\quad x = \pi + 2\pi n,\quad n \in Z;$$

$$\cos x = a,\quad a \in [-1;1],\ \ x = \pm\arccos a + 2\pi n,\quad n \in Z.$$



3) ამოხსენით განტოლება: $2\cos x = -\sqrt{2}$.

ამოხსნა.

$$2\cos x = -\sqrt{2}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in Z;$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k, \quad k \in Z;$$

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

გაკვეთილის თემის გაცნობა

გაარკვიეთ აქვს თუ არა მოცემულ განტოლებებს ამოხსნა: $\sin x = 1,\ \cos x = 0,\ \tan x = 1$.

– რომელი განტოლების ამოხსნას ვერ შეძლებთ შეძენილი ცოდნით?

– ვინ მიხვდა რა იქნება ჩვენი გაკვეთილის თემა?

– დღეს გავეცნობით $\tan x = a$ განტოლების ამოხსნის ხერხს.

– რა არის ამ განტოლებაში a?

ახალი მასალის ახსნა

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში $\tan x = a$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი $x = \arctan a$. ვინაიდან $y = \tan x$ ფუნქცია პერიოდულია π პერიოდით, ამიტომ ფუნქციის მნიშვნელობები გამეორდება $\pi k,\ keZ$-ით. შესაბამისად, $\tan x = a$ განტოლების ზოგადი ამონახსნია. $x = \arctan a + \pi k,\ keZ$.

ამოვხსნათ განტოლება:

$\tan x = \sqrt{3},$ $x = \arctan\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z,$ $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$	$\tan x = -1,$ $x = \arctan(-1) + \pi k,\ k \in Z,$ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$	$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}},$ $x = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k,\ k \in Z,$ $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

განმტკიცება

ხსნიან : №8, №10 – ე, ზ სავარჯიშოებს.

დამოუკიდებელი სამუშაო

ამოხსენი განტოლება:

I ვარიანტი: $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$

II ვარიანტი: $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1.$

რეფლექსია

– რა იყო ჩვენი გაკვეთილის თემა?

– თქვენი აზრით, მივაღწიეთ მიზანს?

– როგორ შეაფასებთ საკუთარ ნამუშევარს დღევანდელ გაკვეთილზე?

საშინაო დავალება: №9, №11, №12 სავარჯიშოები.

მესამე გაკვეთილი

მიზანი:

- ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნის შესახებ მიღებული ცოდნის გაღრმავება;
- ტრიგონომეტრიული განტოლების სხვადასხვა ხერხით ამოხსნის უნარის განვითარება;
- დამოუკიდებლად მუშაობისა და დასახული მიზნის მისაღწევად საჭირო უნარის განვითარება.

გაკვეთილის მსვლელობა

ორგანიზაციული მომენტი

წინარე ცოდნის გააქტიურება, მიზნის გაცნობა

მასწავლებელი: – ეინშტეინს უთქვამს: „მე მიწევს დროის განაწილება პოლიტიკასა და განტოლებებს შორის. ჩემი აზრით, განტოლება უფრო საჭიროა, ვიდრე პოლიტიკა, რადგან

პოლიტიკა არსებობს მოცემული მომენტისთვის, ხოლო განტოლება იარსებებს სამუდამოდ.“

– ჩვენ დღეს ისევ ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნაზე ვიმუშავებთ. ახლა მე წინადადებებს შემოგთავაზებთ. თქვენ გაარკვიეთ მათი მცდარობა და ჭეშმარიტება:

- 6,5-ის კოსინუსი 0-ზე მეტია.
- ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლე $[-1;1]$ მონაკვეთია.
- $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}$.
- $\tan 90^\circ = 0$.

– გავიხსენოთ უმარტივეს ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ფესვთა ფორმულები (მასწავლებელი ასახელებს განტოლებას, მოსწავლე მისი ფესვების ფორმულას. გამოკითხვა ფრონტალურად მიმდინარეობს).

განმტკიცება.

ხსნიან კონტექსტის მე-3, მე-4, მე-5 მაგალითებს.

დამოუკიდებელი სამუშაო.

რიგების მიხედვით (4 რიგი) აძლევს №13 სავარჯიშოს დავალებად 2-2 განტოლებას. მოსწავლეები განტოლებათა ამოხსნის შემდეგ დაფასთან გამოდიან (რიგიდან თითო განტოლებაზე თითო მოსწავლე). დაფაზე წერენ ამოხსნას და საუბრობენ იმ ხერხზე, რომელიც გამოიყენეს ამოხსნისას. თუ სხვა ხერხითაც ამოხსნა ვინმემ, ის თავის ხერხს წარადგენს. მასწავლებელი სთხოვს მოსწავლეებს, დაარქვან გამოყენებულ ხერხს სახელი.

დაფასთან მუშაობის პარალელურად მოწმდება დავალების შესრულების ხარისხი. ასწორებენ დაშვებულ შეცდომებს.

რეფლექსია

– რა თემაზე ვიმუშავეთ დღეს?

– განტოლების ამოხსნის რომელ ხერხს ვიცნობთ?

პასუხობენ:

1. მარტივი განტოლების ამოხსნა ფესვთა ფორმულებით.
2. ცვლადის შემოტანით.
3. მამრავლებად დაშლით.
4. ტრიგონომეტრიული ფორმულების გამოყენებით.
5. $\cos x$ -ზე ან $\cos^2 x$ -ზე გაყოფით. $\cos x \neq 0$.
6. გრაფიკულად.

საშინაო დავალება: №14, №15, №17 სავარჯიშოები.

მეოთხე გაკვეთილი

მიზანი:

- თეორიული მასალის გამეორება ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნის შესახებ;
- ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნის ხერხის ოპტიმალურად შერჩევის უნარი/ჩვევების გამომუშავება;
- პასუხისმგებლობის გრძნობის განვითარება;
- მასწავლებელთან და თანაკლასელებთან მუშაობის უნარის განვითარება და შესაბამისი ჩვევების ჩამოყალიბება.

გაკვეთილის მსვლელობა

ორგანიზაციული მომენტი.

მიზნისა და ამოცანების გაცნობა.

მოსწავლეთა დასწრებისა და საშინო დავალების შემოწმების შემდეგ მასწავლებელი მიმართავს მოსწავლეებს:

– გავითვალისწინოთ პასკალის ნათქვამი – „მათემატიკა იმდენად სერიოზულია, რომ ხელიდან არ უნდა გავუშვათ მისი გასართობად გამოყენების საშუალება“ . ჩვენც ვცადოთ საინტერესო გაკვეთილის ჩატარება. დღეს ვაგრძელებთ შეძენილი ცოდნის გაღრმავებას ტრიგონომეტრიული განტოლების თემაზე.

– მოვაწყოთ შეჯიბრი ჯგუფებს შორის ამ თემის ირგვლივ.

შეჯიბრში მონაწილეობას მიიღებს სამი ჯგუფი. იმუშავებს ჟიური, რომელიც შეჯიბრს დააკვირდება და შეაფასებს მონაწილეთა ნაშრომებს.

შეჯიბრი რამდენიმე ეტაპად ჩატარდება. სამუშაო იქნება სამი კატეგორიის:

- მსუბუქი – 3 ქულა (თეთრი ბარათები);
- საშუალო – 4 ქულა (ყვითელი ბარათები);
- მძიმე – 5 ქულა (წითელი ბარათები).

ყოველ ეტაპზე ჯგუფის წევრები თვითონ ირჩევენ კატეგორიას. გამარჯვებული იქნება ის გუნდი, რომელიც აიღებს ყველაზე მეტ ქულას. ყველა შედეგი შეგვაქვს ცხრილში.

1-ელი ეტაპი „ვინაა გაბედული?“

ჯერ გამოდიან თითოეული ჯგუფის ის წევრები, რომლებიც თეთრ ბარათებს ირჩევენ. თითოეულ ბარათზე წერია სხვადასხვა სირთულის თითო ტრიგონომეტრიული განტოლება. მოსწავლეს ეძლევა იმის შესაძლებლობა, რომ აირჩიოს რომელიმე ერთი ბარათი – ან თეთრი, ან ყვითელი, ან წითელი. თითოეული წარმომადგენელი გამოდის დაფასთან და აჩვენებს დანარჩენებს შერჩეული ფერის ბარათს და ხსნის განტოლებას.

მასწავლებელი: – უნდა გაითვალისწინოთ, რომ ქულები გეწერებათ ბარათის ფერის მიხედვით. (აცნობს ქულებს ბარათების ფერების მიხედვით)

1-ელი დონე (3 ქულა)	მე-2 დონე (4 ქულა)	მე-3 დონე (5 ქულა)
თეთრი	ყვითელი	წითელი
$2\cos 4x = 1$	$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x \cdot \sin x = 0$
$4\tan 2x = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1 = 0$	$\sin x + \cos x = 0$
$2\sin x = -1$	$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$	$\sin x - \cos x = 0$

გუნდები ყურადღებას აქცევენ ამოხსნის მიმდინარეობას. ვინც ამოხსნის, აბარებს ნაშრომს მასწავლებელს. ჟიური აფასებს მოსწავლის ნამუშევარს.

– ეს იყო მარტივი განტოლებების ამოხსნა. ახლა გადავიდეთ **მეორე ეტაპზე**, ანუ შედარებით რთული განტოლებების ამოხსნაზე.

მასწავლებელი: – თქვენს წინ 8 განტოლებაა:

1	$2\sin^2 x + 5\cos x = 4$
2	$\cos x = \sin^2 x \cdot \cos x$
3	$2\sin x\cos 3x - \cos 3x = 0$
4	$\sin^2 x + 9\cos^2 x = 5$
5	$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
6	$3\sin^2 2x + 0{,}5\sin 2x = 4\cos^2 2x$
7	$\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \sin x = \cos x$
8	$4\sin^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$

ჯგუფები იღებენ ფურცლებს, რომელზეც ქვემოთ მოცემული პასუხების ცხრილია განთავსებული. ამ ცხრილში შეაქვთ შერჩეული პასუხის (განტოლების) ნომერი.

განტოლება, რომელიც კვადრატულზე დაიყვანება	განტოლება, რომელიც მამრავლებად დაშლით ამოიხსნება	განტოლება, რომელიც რომელიმე ტრიგონომეტრიული ფორმულის გამოყენებით ამოიხსნება

მასწავლებელი: – თქვენი ამოცანაა დააკვირდეთ განტოლებებს და გაარკვიოთ, ცხრილში წარმოდგენილი რომელი ხერხით ამოიხსნება განტოლება. თქვენი პასუხი შეიტანეთ ცხრილში ნომრის ჩვენებით.

როგორც კი გუნდებს პასუხები მზად ექნებათ, პასუხის ცხრილების ორიგინალს აბარებთ მასწავლებელს, ხოლო ასლებს იტოვებთ თქვენთვის. პასუხის ჩაბარების თანმიმდევრობით ხდება შემოწმება. ყოველი სწორი პასუხი ფასდება 3 ქულით. ჟიური აჯამებს შედეგებს. მასწავლებელი: – გადავდივართ მომდევნო ეტაპზე.

მესამე ეტაპი – **„აირჩიე სირთულის დონე“** .

– ყოველი გუნდი მიიღებს ბარათს დავალებით. თითოეულ დავალებას მიწერილი აქვს მისი სირთულის შესაბამისი ქულა. ყველა თავისთვის მუშაობს (ფურცელზე წერს გვარ-სახელსა და გუნდის დასახელებას). ყველა განტოლების ამოხსნაზე გეძლევათ 7 წთ. როგორც კი დრო ამოიწურება, გვაბარებთ ფურცლებს. ჟიური გაგვაცნობს შედეგს. რომელი გუნდიც მეტს ამოხსნის სწორად, ის აიღებს მეტ ქულას მოცემულ ეტაპზე. ბოლოს ამოხსნას აჩვენებთ დაფაზე. ერთდროულად შეიძლება წეროს ორმა-სამმა მოსწავლემ და მერე ახსნან, როგორ ამოხსნეს.

1	$2\sin 3x = -1$	10 ქულა
2	$\cos 2x = 1$	10 ქულა
3	$3 - 3\cos x = 2\sin^2 x$	10 ქულა
4	$\tan^2 x - \tan x = 0$	10 ქულა
5	$2\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\sin^2 x + 4\cos x - 4\sqrt{3}\sin x = 0$	15 ქულა
6	$7\sin^2 x + 8\sin x \cdot \cos x = 15\cos^2 x$	15 ქულა
7	$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$	15 ქულა
8	$3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$	15 ქულა

9	$\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0.$	20 ქულა
10	$\frac{1}{\tan^2 x} + \frac{3}{\tan x} - 4 = 0$	20 ქულა

შედეგების შეჯამების, ანუ შეჯიბრის დასრულების შემდეგ აძლევს **საშინაო დავალებას:** N12; 13 ა, ბ, გ, დ; 16 სავარჯიშოები.

კომენტარები სავარჯიშოების შესახებ და პასუხები

სავ.№1. ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $\frac{\pi}{3}$; გ) $-\frac{\pi}{4}$; დ) $-\frac{\pi}{3}$; ე) $\frac{\pi}{2}$; ვ) $-\frac{\pi}{2}$; ზ) 0.

სავ.№2. ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $\frac{\pi}{6}$; გ) $\frac{3\pi}{4}$; დ) $\frac{5\pi}{6}$; ე) 0; ვ) π; ზ) $\frac{\pi}{2}$.

სავ.№3. ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $-\frac{\pi}{4}$; გ) $\frac{\pi}{3}$; დ) $-\frac{\pi}{3}$; ე) $\frac{\pi}{6}$; ვ) $-\frac{\pi}{6}$; ზ) 0.

სავ.№4. დ)

სავ.№5. ა) 1; ბ) 0,13; გ) 7; დ) 0,5.

სავ.№6. ა) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; ბ) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; გ) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;

დ) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; ე) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; ვ) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; ზ) $\pi k,\ k \in Z$.

სავ.№7. ა) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$; გ) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$;

დ) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$; ე) $2\pi k,\ k \in Z$; ვ) $\pi + 2\pi k,\ k \in Z$; ზ) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

სავ.№8. ა) $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; ბ) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; გ) $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$; დ) $-\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$;

ე) $\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; ვ) $-\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$; ზ) $\pi k,\ k \in Z$.

სავ.№9. ა) $\frac{\pi}{2} k,\ k \in Z$; ბ) $(-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k,\ k \in Z$; გ) $-3 \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$;

დ) $-15^\circ \pm 15^\circ + 180^\circ k,\ k \in Z$; ე) $\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \cup Z$.

სავ.№10. $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$.

სავ.№11. $\frac{7\pi}{4}$.

სავ.№12. $-\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$.

სავ.№13. ა) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; გ) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; დ) $\pi k,\ k\in Z$.

სავ.№14. ბ) $\pi k,\ k\in Z$. **სავ.№15.** $-\pi+0+\pi=0$. **სავ.№16.** ა) 0; ბ) 0; გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

სავ.№17. ა) $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \tan x-1=0\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$;

ბ) $\cos^2 x-\sin^2 x=0\Leftrightarrow \tan^2 x-1=0\Leftrightarrow \tan x=\pm 1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$;

გ) $\cos^4 x-\sin^4 x=1\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=1\Leftrightarrow 1-\sin^2 x=1+\sin^2 x\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=\pi k,\ k\in Z$;

დ) $\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=0\Leftrightarrow \tan^2 x+\sqrt{3}\tan x=0\Leftrightarrow \tan x=\left[\begin{array}{l}0\\-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\left[\begin{array}{l}\pi k\\-\frac{\pi}{3}+\pi k\end{array}\right.,\ k\in Z$.

მეოთხე თავის დამატებითი სავარჯიშოები

სავ. №3. F(1) =f(-1)=f(-1+9)=f(8)=11, f(11)=f(8+3)=11. პასუხი: 22.

სავ №4. 3.

სავ. № 5. ა) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; ბ) $2\pi k,\ k\in Z$; გ) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; დ) $\pi k,\ \frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$;

ე) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; ვ) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \arctan\frac{3}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

სავ. № 6. 3π.

სავ. № 7. $-\frac{5\pi}{4}$.

სავ. № 8. $\sin^2\left(\arccos(-1)\right)+\cos^2\left(\arcsin(-1)\right)=\sin^2\pi+\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$.

სავ. № 9. ა) $\pi k, k\in Z$; ბ) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$; გ) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

აბა, სცადე!

arccos(cos4)=arccos(cos(2π-4))= 2π-4, რადგან $2\pi-4\in[0;\pi]$.

ეს საინტერესოა!

დირიხლეს ფუნქციის პერიოდია ნებისმიერი არანულოვანი რაციონალური რიცხვი, რადგან რაციონალური რიცხვის დამატება არ ცვლის შესაკრების რაციონალურობას და ირაციონალურობას. უმცირესი დადებითი რაციონალური რიცხვი არ არსებობს.

აბა, სცადე!

ყოველი ნატურალური რიცხვი 9-ზე გაყოფისას იძლევა ნაშთს 0-დან 8-ის ჩათვლით. ამიტომ 10 რიცხვიდან ორს მაინც ექნება ტოლი ნაშთი. მათი სხვაობა კი იქნება 9-ის ჯერადი.

წყვილებში სამუშაო (პროექტი)

„რა სიმაღლეზე არიან?“

მიზანი:

პროექტის განმავლობაში მოსწავლემ უნდა შეძლოს:

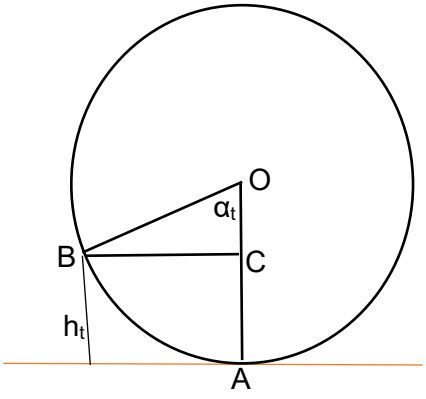
- ამოცანის პირობის დამოუკიდებლად გააზრება;
- მოცემული და საძიებელი სიდიდეების გამოყოფა;
- შესაბამისი ფორმულის/მეთოდის შერჩევა;
- ნახაზის ან სქემის გამოყენება;
- გამოთვლების სწორად შესრულება;
- მიღებული პასუხის საზომი ერთეულით ჩაწერა;
- მიღებული შედეგის რეალურ სიტუაციასთან დაკავშირება;
- საკუთარი ნაშრომ/ნააზრევის ახსნა და დასაბუთება.

კომენტარები პროექტის ამოცანების შესახებ

1. ა) ბორბალი 15 წუთში შემოტრიალდება: ა) მეოთხედით, ბ) 30 წუთში – ნახევრით, გ) 3/4-ით, ამიტომ სიმაღლე იქნება: ა) 30მ, ბ) 60მ, გ) 30მ.

2. ვთქვათ, t დროში ბორბალის მობრუნების კუთხეა α_t გრადუსი. ცხადია, $\alpha_t = \frac{360°t}{T}$.

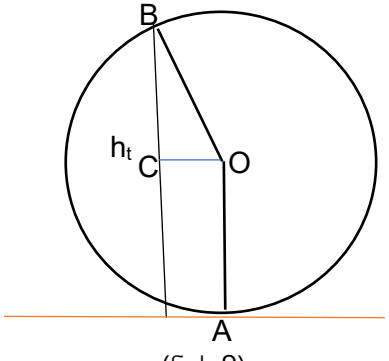
განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევა:



(ნახ.1)

ა) $0° \le \alpha_t \le 90°$ (ნახ.1).

$h_t = AO - OC = R - R\cos\alpha_t$;



(ნახ.2)

ბ) $90° \le \alpha_t \le 180°$

(ნახ.2).

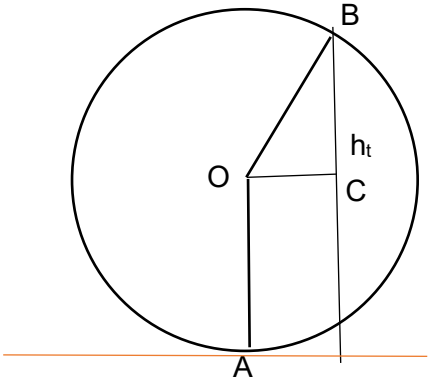
BCO სამკუთხედიდან

$BC = BO\sin(\alpha_t - 90°) = -BO\cos\alpha_t$

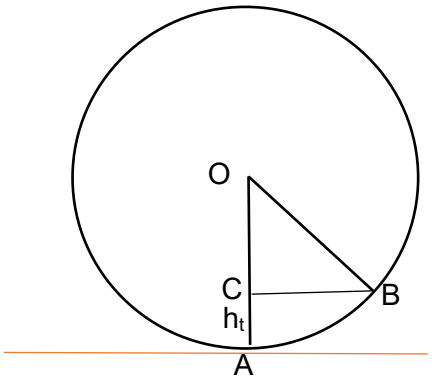
$h_t = AO + BC = R + R\sin(\alpha_t - 90°) = R - R\cos\alpha_t$;

გ) $180° \le \alpha_t \le 270°$ (ნახ.3)

$h_t = AO + BC = R + R\cos(\alpha_t - 180°) = R - R\cos\alpha_t;$



(ნახ.3)



(ნახ.4)

დ) $270° \le \alpha_t \le 360°$ (ნახ.4).

$h_t = AO - OC = R - R \cdot \cos(360° - \alpha_t) = R - R \cdot \cos\alpha_t.$

ყველა განხილულ შემთხვევაში

$$h_t = R\left(1 - \cos\frac{360°t}{T}\right).$$

3. უნდა ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება.

$$R\left(1 - \cos\frac{360°t}{T}\right) = \frac{R}{2} \Rightarrow \cos\frac{360°t}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{360°t}{T} = \pm 60° + 360° \cdot k,\ k \in Z \Rightarrow t = \pm\frac{T}{6} + kT, k \in Z.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $0 \le t \le T$,

გვექნება ორი პასუხი: $t_1 = \frac{T}{6}$, $t_2 = \frac{5T}{6}$.

პროექტის შეფასების ნიმუში

მაქსიმალური ქულა – 20

№	კრიტერიუმი	მაქს. ქულა	მიღებული ქულა
1	ამოცანის პირობის გააზრება და მონაცემების სწორად გამოყოფა	4	
2	შესაბამისი მათემატიკური მოდელისა და ფორმულების შერჩევა	4	
3	გამოთვლების სისწორე და მსჯელობის თანმიმდევრობა	4	
4	ნახაზის/სქემის სწორად გამოყენება	4	
5	პასუხის სწორად ჩამოყალიბება, საზომი ერთეული და დასკვნა	4	

ქულის მინიჭების ზოგადი პრინციპი

4 ქულა – დავალება სრულად, სწორად და დამოუკიდებლად არის შესრულებული.

3 ქულა – დავალება ძირითადად სწორადაა შესრულებული, თუმცა მცირე ხარვეზია.

2 ქულა – დავალება შესრულებულია ნაწილობრივ, ჩანს ძირითადი იდეის გაგება, მაგრამ არის მნიშვნელოვანი შეცდომა.

1 ქულა – შესრულებულია დავალების მცირე ნაწილი ან შესრულებულია მნიშვნელოვანი დახმარების შედეგად.

0 ქულა – დავალება არ არის შესრულებული ან შერჩეული გზა არ შეესაბამება ამოცანას.

ქულების ინტერპრეტაცია

შესანიშნავი შედეგი	ძალიან კარგი შედეგი	კარგი შედეგი	დამაკმაყ. შედეგი	უჭირს
18 – 20 ქულა	15 – 17 ქულა	11 – 14 ქულა	7 – 10 ქულა	0 – 6 ქულა
მოსწავლე დამოუკიდებლად აანალიზებს სიტუაციას, ქმნის მათემატიკურ მოდელს და სწორად იყენებს მას.	მასალა კარგად აქვს ათვისებული. დაშვებული აქვს მხოლოდ მცირე ხასიათის შეცდომა.	ძირითადი იდეა და მეთოდი გააზრებულია, თუმცა საჭიროა ცალკეული უნარების გაუმჯობესება.	მოსწავლეს ნაწილობრივ აქვს საკითხი გაგებული და სჭირდება დამატებითი მუშაობა.	მოსწავლეს უჭირს როგორც ამოცანის გააზრება, ისე შესაბამისი მათემატიკური მოდელის გამოყენება.

მოსწავლის თვითშეფასება

1) რა გამომივიდა ყველაზე კარგად?
2) რა გამიჭირდა?
3) რა ვისწავლე ამ პროექტის შესრულებისას?
4) კიდევ ერთხელ რომ ვაკეთებდეთ ამ პროექტს, რას შევცვლიდით ან როგორ გავაუმჯობესებდით?

შემაჯამებელი სამუშაო N 4

I ვარიანტი

1. იპოვე $y = 4\sin^2 x - \cos^2 x$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.
2. გამოთვალე $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. იპოვე $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ განტოლების $[0;\pi]$ შუალედში მოთავსებული ყველა ამონახსნი.
4. ამოხსენი განტოლება $\sin^2 x - 3\sin x = 0$.
5. ვთქვათ, f კენტი ფუნქციაა 3-ის ტოლი პერიოდით, ამასთან f(4)=5. გამოთვალე f(1) - f(2).

II ვარიანტი

1. იპოვე $y = 4\cos^2 x - \sin^2 x$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.
2. გამოთვალე $\arccos\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. იპოვე $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ განტოლების $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში მოთავსებული ყველა ამონახსნი.
4. ამოხსენი განტოლება $\cos^2 x - 4\cos x = 0$.
5. ვთქვათ, f ლუწი ფუნქციაა 3-ის ტოლი პერიოდით, ამასთან f(4)=5. გამოთვალე f(1) + f(2).

I ვარიანტის განმსაზღვრელი შეფასების ნიმუში

1. შეასრულა გარდაქმნა $y = 5\sin^2 x - 1$ ან იპოვა ერთ-ერთი მნიშვნელობა – 1 ქულა;
   იპოვა ორივე მნიშვნელობა (4 და -1) ------ 2 ქულა.
   სულ 2 ქულა.

2. დაწერა ერთ-ერთი შესაკრების მნიშვნელობა (რიცხვებში ან გრადუსებში) ---1ქულა;
   გამოთვალა ჯამი ($\frac{5\pi}{12}$ ან $75°$)------ 2 ქულა.
   სულ 2 ქულა.

3. იპოვა ერთ-ერთი ამონახსნი ------ 1 ქულა.
   იპოვა ორივე ამონახსნი $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$----- 2 ქულა .
   სულ 2 ქულა.

4. იპოვა შესაბამისი კვადრატული განტოლების ფესვები (0 და 3)------- 1 ქულა;
დაწერა ზოგადი ამონახსნი ($x = \pi k, k \in Z$) -------- 2 ქულა.
სულ 2 ქულა.

5. იპოვა ერთ-ერთი შესაკრები ----- 1 ქულა;
   იპოვა ორივე შესაკრები და დაწერა პასუხი (10) ---- 2 ქულა.
   სულ 2 ქულა.

შემაჯამებელი წერის განმავითარებელი შეფასების ნიმუში

სულ 10 ქულა

№	შეფასების კრიტერიუმი	სრულყოფილად 2 ქულა	ნაწილობრივ 1 ქულა	ვერ ასრულებს 0 ქულა
1	**ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების პოვნა**	სწორად გარდაქმნის ფუნქციას, იყენებს ტრიგონომეტრიულ თვისებებს და სწორად ადგენს უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს	სწორად იწყებს გარდაქმნას ან იყენებს შესაბამის თვისებას, მაგრამ აქვს ერთი მნიშვნელოვანი გამოთვლითი/ლოგიკური შეცდომა	ვერ იყენებს შესაბამის ტრიგონომეტრიულ გარდაქმნას ან პასუხი არსებითად მცდარია
2	**ტრიგონომეტრიული შექცეული**	სწორად განსაზღვრავს $\arccos\frac{1}{2}$-ისა და	სწორად პოულობს ერთ-ერთ მნიშვნელობას, მაგრამ საბოლოო პასუხში	ვერ განსაზღვრავს შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნ-

	ფუნქციების მნიშვნელობების გამოთვლა	$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ის მნიშვნელობებს და სწორად ასრულებს შეკრებას	უშვებს შეცდომას	ქციების მნიშვნელობებს
3	**ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა მოცემულ ჩაკეტილ შუალედში**	სწორად იყენებს $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ განტოლების ზოგად ამონახნს და ზუსტად არჩევს მოცემულ შუალედში მოთავსებულ ყველა ამონახნს	იცის ამოხსნის პრინციპი, მაგრამ გამოტოვებს ერთ ამონახსნს ან უშვებს ერთ შეცდომას შუალედის გათვალისწინებისას	ვერ ადგენს განტოლების ამონახსნებს მოცემულ შუალედში
4	**კვადრატული ტრიგონომეტრი ული განტოლების ამოხსნა**	სწორად იყენებს დაშლას, იღებს შესაბამის მარტივ ტრიგონომეტრიულ განტოლებებს და წერს ყველა ზოგად ამონახსნს	სწორად იყენებს დაშლას, მაგრამ ერთ ეტაპზე უშვებს შეცდომას ან სრულად არ წერს ამონახსნებს	ვერ იყენებს განტოლების დაშლის/ჩანაცვლების მეთოდს და ვერ იღებს სწორ ამონახსნს
5	**ლუწი ფუნქციისა და პერიოდულობის თვისებების გამოყენება**	სწორად იყენებს ლუწობისა და პერიოდულობის თვისებებს, აკავშირებს მოცემულ მნიშვნელობებს $f(4)=5$-თან და სწორად ითვლის $f(1)+f(2)$-ს	სწორად იყენებს ერთ-ერთ თვისებას, მაგრამ მეორე თვისების გამოყენებისას უშვებს შეცდომას	ვერ იყენებს ლუწი ფუნქციის ან პერიოდულობის თვისებას ამოცანის ამოსახსნელად

ქულების ინტერპრეტაცია

9 — 10 ქულა – მოსწავლე ძალიან კარგად ფლობს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებებს, შექცეულ ფუნქციებსა და განტოლებების ამოხსნის მეთოდებს. შეუძლია ცოდნის დამოუკიდებლად და სწორად გამოყენება.

7 - 8 ქულა – მოსწავლე ძირითადად კარგად ფლობს საკითხს და შეუძლია ცოდნის გამოყენება, თუმცა ზოგჯერ უშვებს გამოთვლით ან მსჯელობის შეცდომებს.

5 –6ქულა – მოსწავლეს აქვს ძირითადი ცოდნა, მაგრამ უჭირს რამდენიმე თვისების ერთმანეთთან დაკავშირება და ამოცანის ბოლომდე სწორად შესრულება. საჭიროა დამატებითი ვარჯიში.

3 – 4 ქულა – მოსწავლეს უჭირს ტრიგონომეტრიული თვისებებისა და განტოლებების ამოხსნიდ მეთოდების გამოყენება. საჭიროა საკითხების ეტაპობრივად განმტკიცება.

0 – 2 ქულა – მოსწავლეს სჭირდება დახმარება ძირითადი ცნებებისა და მეთოდების ათვისებაში. რეკომენდებულია მასალის თავიდან, მარტივი მაგალითებიდან დაწყება.

45-წუთიანი გაკვეთილის გეგმის ნიმუში

ეტაპები წუთების მიხედვით

ეტაპი	მასწავლებლისა და მოსწავლის საქმიანობა	დრო (წთ.)
1. ორგანიზაციული მომენტი	მისალმება, დასწრების აღრიცხვა, მოსწავლეთა მომზადება სამუშაოდ.	2
2.მოტივაცია	რეალურ ცხოვრებასთან დაკავშირებული მოკლე კითხვა, სიტუაცია ან ამოცანა, რომელიც მოსწავლეებს ახალი საკითხის მიმართ ინტერესს გაუღვიძებს.	5
3. წინარე ცოდნის გააქტიურება	წინა მასალის გახსენება მოკლე კითხვებით, ზეპირი სავარჯიშოებით ან 1 – 2 ამოცანით.	5
4. ახალი მასალის გაცნობა	ახალი ცნების, ფორმულის ან მეთოდის ახსნა; შესაბამისი მაგალითის განხილვა.	10
5. პრაქტიკული მუშაობა მასწავლებელთან ერთად	ერთი ტიპიური ამოცანის ეტაპობრივი ამოხსნა; მოსწავლეები მონაწილეობენ მსჯელობაში და ასაბუთებენ მოქმედებებს.	8
6.დამოუკიდებელი / წყვილებში მუშაობა	მოსწავლეები ასრულებენ სხვადასხვა სირთულის დავალებებს. მასწავლებელი აკვირდება, ეხმარება საჭიროების შემთხვევაში და აძლევს განმავითარებელ უკუკავშირს.	8
7.შეჯამება და განმტკიცება	მოსწავლეები აყალიბებენ რა ისწავლეს; განიხილება მნიშვნელოვანი დასკვნები და ტიპური შეცდომები.	4
8.რეფლექსია	„რა ვისწავლე?“, „რა გამიჭირდა?“, „რა შემიძლია უკვე დამოუკიდებლად?“	2
9.საშინაო დავალება	საშინაო დავალების განმარტება.	1

შეცდომების ანალიზის რუბრიკა

შეცდომების ანალიზის რუბრიკის მიზანია მოსწავლის მიერ შესრულებულ დავალებაში დაშვებული შეცდომების არა მხოლოდ გამოვლენა, არამედ მათი **მიზეზების გააზრება, გამოსწორება და შემდგომში მსგავსი შეცდომების თავიდან აცილების გზების განსაზღვრა**.

რუბრიკის მთავარი მიზანია, შეცდომა აღქმულ იქნეს არა მხოლოდ როგორც შედეგის ნაკლი, არამედ როგორც სწავლისა და განვითარების შესაძლებლობა.

შეცდომები ს ანალიზის მთავარი მიმართულებები

№	შეცდომის ტიპი	რას ვაკვირდებით?	განმავითარებელი კომენტარი მოსწავლისათვის
1	**თეორიული ცოდნის შეცდომა**	არასწორად იყენებს განსაზღვრებას, თვისებებს ან ფორმულას	„გაიმეორე შესაბამისი წესი/ფორმულა და დააკავშირე იგი ამოცანის პირობასთან.“
2	**ფორმულის შერჩევის შეცდომა**	სწორად ვერ ირჩევს საჭირო ფორმულას	„ყურადღებით განსაზღვრე , რა არის მოცემული და რას ეძებ, შემდეგ შეარჩიე ფორმულა“.
3	**გამოთვლითი შეცდომა**	არასწორად ასრულებს მოქმედებას	„ამოხსნის გზა წორად გაქვს დაწყებული, თუმცა გამოთვლაში დაშვებულმა შეცდომამ საბოლოო პასუხი შეცვალა.“
4	**ალგებრული გარდაქმნის შეცდომა**	შეცდომაა ფრჩხილების გახსნაში, წევრების გადატანაში, შეკვეცაში და ა. შ.	„ყოველი გარდაქმნის შემდეგ გადაამოწმე ნიშნები და მოქმედების თანმიმდევრობა.“
5	**ნიშნის შეცდომა**	ერევა „+“ და „–“	„განსაკუთრებული ყურადღება მიაქციე უარყოფით რიცხვებსა და წევრების ნიშნის ცვლილებას.“
6	**ლოგიკური შეცდომა**	მსჯელობა არ გამომდინარეობს წინა ნაბიჯიდან	„დაასაბუთე, რატომ გადადიხარ ამ ნაბიჯიდან შემდეგ ნაბიჯზე.“
7	**პირობის არასწორი გაგება**	ვერ გამოყოფს მოცემულსა და საძიებელს	„თავდაპირველად გამოყავი მოცემული სიდიდეები და ურთიერთკავშირი.“
8	**გრაფიკული/-გეომეტრიული შეცდომა**	ნახაზი ან გრაფიკი არ შეესაბამება პირობას	„ნახაზზე სწორად მონიშნე მოცემული სიდიდეები და ურთიერთკავშირები.“
9	**ერთეულების შეცდომა**	არ ითვალისწინებს საზომ ერთეულებს	„ამოხსნის დაწყებამდე შეამოწმე, ერთსა და იმავე ერთეულებშია თუ არა მოცემული სიდიდეები.“
10	**პასუხის არგუმენტაციის ნაკლებობა**	წერს მხოლოდ პასუხს ან არასრულად ასაბუთებს	„მიუთითე ამოხსნის ძირითადი ნაბიჯები და დაასაბუთე მიღებული პასუხი.“
11	**პასუხის შემოწმების უგულებელყოფა**	არ ამოწმებს მიღებულ შედეგს	„საბოლოო პასუხი გადაამოწმე საწყის პირობებთან მიმართებით.“
12	**უყურადღებობით გამოწვეული შეცდომა**	იცის წესი, მაგრამ მექანიკურად უშვებს შეცდომას	„ცოდნა გაქვს, თუმცა საჭიროა მეტი ყურადღება და ეტაპობრივი გადამოწმება.“

რეკომენდაციები ტიპური ხარვეზების აღმოსაფხვრელად

მათემატიკის სწავლა-სწავლების პროცესში გამოვლენილი ტიპური ხარვეზების დროული იდენტიფიცირება და მათი მიზანმიმართული აღმოფხვრა მნიშვნელოვანია მოსწავლეთა მათემატიკური ცოდნის, ლოგიკური და კრიტიკული აზროვნების, პრობლემის გადაჭრისა და მათემატიკური მსჯელობის უნარების განვითარებისთვის.

ხარვეზების ანალიზი საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ არა მხოლოდ რა ვერ გაიგო ან ვერ შეასრულა მოსწავლემ, არამედ **რა არის შეცდომის გამომწვევი მიზეზი და რა გზით შეიძლება მისი გამოსწორება.**

რეკომენდაციების მიზანია, თითოეულმა მოსწავლემ შეძლოს აღმოჩენილი ხარვეზის გააზრება, მისი გამოსწორება და მიღებული ცოდნის შემდგომ საქმიანობაში დამოუკიდებლად გამოყენება.

№	ტიპური ხარვეზი	რეკომენდაცია ხარვეზის აღმოსაფხვრელად
1	**მათემატიკური ტერმინებისა და განსაზღვრებების არასათანადო ცოდნა**	რეგულარულად განმეორდეს ძირითადი ცნებები; მოსწავლემ თითოეული ახალი ტერმინი ახსნას საკუთარი სიტყვებით და მოიყვანოს შესაბამისი მაგალითი.
2	**ფორმულების მექანიკურად დამახსოვრება**	ფორმულების გაზეპირების ნაცვლად განიხილოს მისი მნიშვნელობა, შემადგენელი სიდიდეები და გამოყენების პირობები.
3	**ფორმულის არასწორად შერჩევა**	ამოცანის ამოხსნამდე მოსწავლემ გამოყოს მოცემული, საძიებელი და მათ შორის კავშირი. ამის შემდეგ შეარჩიოს შესაბამისი ფორმულა.
4	**ალგებრული გარდაქმნების დროს დაშვებული შეცდომები**	სისტემატურად ივარჯიშოს ფრჩხილების გახსნაში, მსგავსი წევრების გაერთიანებაში, ხარისხებსა და წილადებზე მოქმედებაში. სასარგებლოა თითოეული გარდაქმნის შემდეგ შუალედური შედეგის გადამოწმება.
5	**დადებითი და უარყოფითი რიცხვების აღრევა**	გამოიყენოს რიცხვითი ღერძი და მცირე, მიზანმიმართული სავარჯიშოები ნიშნებთან დაკავშირებული მოქმედებების გასამყარებლად. განსაკუთრებული ყურადღება მიექცეს წევრის ერთი მხრიდან ტოლობის მეორე მხარეზე გადატანისას ნიშნის ცვლილებას.
6	**შეცდომები კვადრატული განტოლების ამოხსნისას**	განმეორდეს დისკრიმინანტის, ფესვთა ფორმულებისა და ვიეტის თეორემების გამოყენება. საწყის განტოლებაში ყოველთვის შემოწმდეს მიღებული ფესვები.
7	**ფუნქციისა და მისი მნიშვნელობების აღრევა**	გამოიყენოს სქემა: $x \to$ ფუნქციის წესი $\to f(x)$. პრაქტიკაში შეივსოს მნიშვნელობათა ცხრილები და შემდეგ აიგოს გრაფიკი.
8	**ფუნქციის გრაფიკის არასწორად აგება**	გრაფიკის აგებამდე განისაზღვროს საკვანძო წერტილები, ღერძებთან გადაკვეთა, სიმეტრიის ღერძი და საჭიროების შემთხვევაში წვერო. მიღებული გრაფიკი შედარდეს ფუნქციის ფორმულასთან.
9	**კვადრატული ფუნქციის ძირითადი მახასიათებლების**	ცალ-ცალკე დამუშავდეს: ფესვები, წვერო, სიმეტრიის ღერძი, უდიდესი/უმცირესი მნიშვნელობა და ღერძებთან

	აღრევა	გადაკვეთა. სასურველია მათი ერთ გრაფიკთან დაკავშირება.
10	**ტრიგონომეტრიული ფორმულების არასწორი გამოყენება**	ფორმულის გამოყენებამდე განსაზღვროს, რა არის მოცემული და რას ეძებს. განსაკუთრებული ყურადღება მიექცეს დაყვანის ფორმულებსა და ნიშანს მეოთხედების მიხედვით.
11	**განსაკუთრებული კუთხეების არასათანადო ცოდნა**	შეიქმნას მოკლე ყოველდღიური სავარჯიშოები $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$ -ის მნიშვნელობებზე და მათი გამოყენება სხვადასხვა გამოსახულებებში.
12	**გეომეტრიული ნახაზის არასწორად აღქმა**	ამოცანის ამოხსნამდე მოსწავლემ თავად შეასრულოს სქემატური ნახაზი, მიუთითოს მოცემული სიდიდეები და გამოყოს საძიებელი.
13	**თეორემის ცოდნა, მაგრამ მისი ამოცანაში ვერ გამოყენება**	თითოეული თეორემა დამუშავდეს სამ ეტაპად: რა ვიცით → რას გვაძლევს თეორემა → სად შეიძლება მისი გამოყენება.
14	**ტექსტური ამოცანის მათემატიკურ მოდელად გადაქცევის სირთულე**	ამოცანის პირობაში გამოიყოს მონაცემები, შემოიღოს უცნობი და სიტყვიერი კავშირები გადაიწეროს მათემატიკური გამოსახულების ან განტოლების სახით.
15	**ამოცანის ამოხსნის მხოლოდ ერთი ნაბიჯის შესრულება**	მოსწავლემ გამოიყენოს თანმიმდევრული ალგორითმი: პირობის გააზრება → მოდელი → ფორმული/განტოლება → ამოხსნა → პასუხი → შემოწმება.
16	**მიღებული პასუხის შეუმოწმებლობა**	ყოველი მნიშვნელოვანი ამოცანის ბოლოს მოსწავლემ უპასუხოს კითხვას: „შეესაბამება თუ არა ჩემი პასუხი პირობას?“
17	**საზომი ერთეულების უგულებელყოფა**	ამოცანის ამოხსნამდე ყველა სიდიდე მოყვანილ იქნეს ერთსა და იმავე საზომ ერთეულში. საბოლოო პასუხშიც აუცილებლად მიეთითოს ერთეული.
18	**მათემატიკური მსჯელობის არასაკმარისი დასაბუთება**	მოსწავლემ პასუხთან ერთად მიუთითოს რომელი წესი, თვისება ან თეორემა გამოიყენა და რატომ.
19	**გამოჭვლითი შეცდომები**	მოსწავლემ ისწავლოს შუალედური შედეგების გადამოწმება
20	**ამოცანის ამოხსნის სტრატეგიის დამოუკიდებლად შერჩევის სირთულე**	ერთსა და იმავე ამოცანაზე განიხილოს ამოხსნის რამდენიმე გზა და შეადაროს ისინი: რომელი უფრო მოკლეა, რომელი უფრო მარტივი და რატომ.
21	**წინა კლასებში მიღებული ცოდნის ხარვეზები**	ახალი თემის დაწყებამდე ჩატარდეს 5-10 წუთიანი დიაგნოსტიკური გამეორება იმ წინარე ცოდნაზე, რომელსაც ახალი მასალა ეყრდნობა.
22	**დამოუკიდებელი მუშაობის სირთულე**	დავალებები დაიყოს სამ დონედ: საბაზისო → საშუალო → მაღალი სირთულის. მოსწავლემ თანდათან უნდა გადაინაცვლოს უფრო რთულ დონეზე.
23	**მათემატიკური კომუნიკაციის სირთულე**	მოსწავლემ პერიოდულად სიტყვიერად ახსნას ამოხსნის თითოეული ნაბიჯი. გამოიყენოს ფრაზები: „რადგან...“, „აქედან მივიღებთ ...“, „ამიტომ...“.
24	**ცოდნის პრაქტიკაში გამოყენების სირთულე**	შეირჩეს რეალურ ცხოვრებასთან დაკავშირებული ამოცანები: მოძრაობა, ფინანსები, მშენებლობა, ეკოლოგია, ტექნოლოგიები, გაზომვები და სხვა.

რეკომენდაცია მასწავლებლისათვის

მე-10 კლასში ხარვეზების აღმოფხვრა ყველაზე ეფექტურია მაშინ, როდესაც მუშაობა მიმდინარეობს ციკლის მიხედვით:

დიაგნოსტიკა → შეცდომის გამოვლენა → მიზეზის დადგენა → მიზანმიმართული სავარჯიშო → ხელახალი შესრულება →თვითშეფასება.

დიფერენცირებული სწავლების სტრატეგიები

მეთოდური რჩევები

გაკვეთილზე მასწავლებელს ჰყავს განსხვავებული მზაობის, სწავლის ტემპის, ინტერესებისა და საჭიროებების მქონე მოსწავლეები. მათემატიკის მასწავლებელმა ერთი და იგივე სასწავლო მიზნის მისაღწევად მოსწავლეებს უნდა შესთავაზოს განსხვავებული სირთულის, ფორმისა და მხარდაჭერის მქონე აქტივობები.

სირთულის დიფერენცირება – ერთი სასწავლო მიზნის ფარგლებში შეირჩეს საბაზისო, საშუალო და მაღალი სირთულის ამოცანები. მოსწავლემ შეძლოს შესაბამისი დავალების არჩევა ან მასწავლებლის რეკომენდაციის შესრულება.

დავალების ეტაპობრივი გართულება – ახალი ცნების ათვისებისას დავალებები დაიწყოს მარტივი მაგალითებით და თანდათან გადავიდეს მრავალსაფეხურიან და პრობლემურ ამოცანებზე.

დამხმარე მინიშნებების გამოყენება – სირთულის მქონე მოსწავლეებს მივცეთ ფორმულა, ნახაზი, ამოხსნის ალგორითმი ან მიმართულების მიმცემი შეკითხვები, ხოლო მზაობის მაღალი დონის მოსწავლეებს – ნაკლები მხარდაჭერა.

ერთი ამოცანის სხვადასხვა გზით ამოხსნა – მოსწავლეებს მიეცეთ შესაძლებლობა, ერთი და იგივე პრობლემა ამოხსნან ალგებრული, გრაფიკული, გეომეტრიული ან ლოგიკური მეთოდით.

ტემპის გათვალისწინება – სწრაფად მომუშავე მოსწავლეებს შესთავაზეთ დამატებითი კვლევითი ან შემოქმედებითი დავალება, ხოლო მათ, ვისაც მეტი დრო სჭირდება, მიეცით დავალების შესრულების დამატებითი დრო.

წყვილებსა და მცირე ჯგუფებში მუშაობა – ჯგუფები დაკომპლექტდეს მიზნის შესაბამისად; საჭიროების შემთხვევაში ძლიერი მოსწავლე დაეხმაროს თანაკლასელს, თუმცა არ შეასრულოს დავალება მის ნაცვლად.

ვიზუალური და პრაქტიკული მხარდაჭერა – აბსტრაქტული სწავლებისას გამოიყენეთ სქემები, გრაფიკები, ცხრილები, მოდელები და რეალურ ცხოვრებასთან დაკავშირებული მაგალითები.

შედეგის დიფერენცირება – მოსწავლეს შეიძლება მოეთხოვოს არა მხოლოდ ამოცანის პასუხის მიღება, არამედ ამოხსნის ახსნა, არგუმენტირება, სხვასდასხვა მეთოდის შედარება ან საკუთარი ამოცანის შექმნა.

ფორმატიული შეფასება და უკუკავშირი – გაკვეთილის განმავლობაში მოკლე კითხვებითა და მინი-დავალებებით გამოავლინეთ მოსწავლის პრობლემა და ამის მიხედვით შეცვალეთ მხარდაჭერის დონე.

ტიპური შეცდომების მიზნობრივი კორექცია – შეცდომის მხოლოდ დაფიქსირების ნაცვლად განისაზღვროს მისი მიზეზი და მოსწავლეს მიეცეს შესაბამისი მაკორექტირებელი დავალება.

არჩევანის მიცემა – ერთი სასწავლო მიზნის მისაღწევად მოსწავლეებს შესთავაზეთ რამდენიმე ტიპის დავალება: გამოთვლითი, ტექსტური, გრაფიკული, კვლევითი ან პრაქტიკული.

მაღალი მზაობის მოსწავლეების გამოწვევა – შესთავაზეთ ამოცანები, რომელიც მოითხოვს დასკვნის გამოტანას, კანონზომიერების აღმოჩენას, დამტკიცებას ან რეალური პრობლემის მათემატიკურ მოდელირებას.

მეთოდური პრინციპი: დიფერენცირება არ გულისხმობს მოსწავლეების „ძლიერ“ და „სუსტ“ ჯგუფებად მუდმივ დაყოფას. სასურველია, მხარდაჭერისა და დავალების სირთულის დონე იცვლებოდეს კონკრეტული თემის, მოსწავლის პროგრესისა და სასწავლო მიზნის შესაბამისად.

მოსწავლეს უჭირს როგორც ამოცანის გააზრება, ისე შესაბამისი მათემატიკრი მოდელის გამოყენება.

საქართველო მრავალი გამოჩენილი მეცნიერის სამშობლოა. მათ შორის განსაკუთრებული ადგილი უკავია ილია ვეკუას (1907–1977) — მსოფლიოში აღიარებულ მათემატიკოსს, რომლის კვლევებმა დიფერენციალურ განტოლებებსა და მათემატიკურ ფიზიკაში უდიდესი წვლილი შეიტანა თანამედროვე მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარებაში.

ვეკუას ბრწყინვალე მათემატიკური იდეები დღესაც გამოიყენება ინჟინერიაში, მშენებლობაში, აერონავტიკასა და ბუნებრივი პროცესების მოდელირებაში. მისი ნაშრომები განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ისეთ სფეროებში, რომლებშიც საჭიროა ფიზიკური პროცესების მათემატიკური აღწერა: სითხის მოძრაობა, ელასტიკურობა და აეროდინამიკა. ეს მიმართულებები თვითმფრინავების, რაკეტებისა და სხვა საფრენი სისტემების შექმნის საფუძველია.

ილია ვეკუას მოღვაწეობა ნათელი მაგალითია იმისა, რომ დიდი მიღწევები ღრმა ცოდნას, დაუღალავ კვლევასა და შემოქმედებით აზროვნებას ეფუძნება. თუკი ცოდნას მუდმივად გაიღრმავებ, შენც შეძლებ გახდე წარმატებული ინჟინერი, პროგრამისტი ან მეცნიერი; გადაჭრა რეალური პრობლემები და ამით შენი წვლილი შეიტანო როგორც საქართველოს, ისე მსოფლიოს მეცნიერების განვითარებაში.

