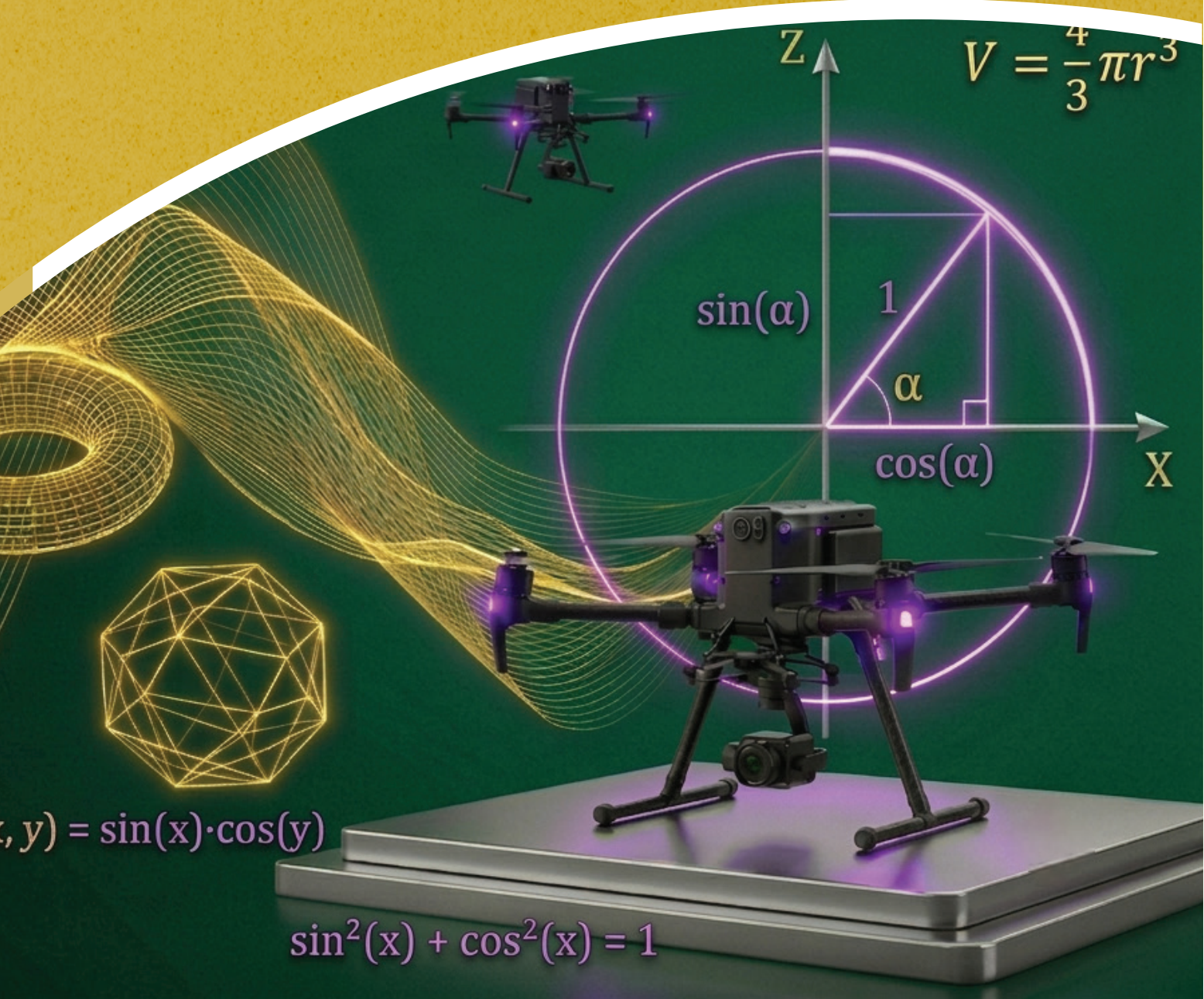
განათლების, მეცნიერებისა და
ახალგაზრდობის სამინისტრო

მათემატიკა 10

მოსწავლის წიგნი
პირველი ნაწილი



თინა ბექაური, ავთანდილ საგინაშვილი,
გიორგი ბექაური, ზაზა გერგაული

მათემატიკა 10

მოსწავლის წიგნი
პირველი ნაწილი

სახელმძღვანელო შექმნილია
საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტროს მიერ

საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტრო
თბილისი
2026

მათემატიკა
X კლასი, I ნაწილი
მოსწავლის წიგნი

საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტრო
პირველი გამოცემა, თბილისი, 2026 წ.

ავტორები:
თინა ბექაური
ავთანდილ საგინაშვილი
თანაავტორები:
გიორგი ბექაური
ზაზა გერგაული

საგნის ექსპერტ-კონსულტანტი: ვახტანგ ჯაოშვილი

სამეცნიერო რეცენზენტები: დავით ნატროშვილი
ფსიქოლოგი-მეთოდისტი: ნუცა საღარაძე
რედაქტორი: თამარ აბულაძე
ილუსტრატორი: ალექსი კახნიაშვილი
დამკაბადონებელი: ალექსი კახნიაშვილი
ყდის დიზაინერი: ნინო ხვინგია

სახელმძღვანელო განკუთვნილია მეათე კლასის მოსწავლეებისთვის და შექმნილია ეროვნული სასწავლო გეგმის მოთხოვნების შესაბამისად. სახელმძღვანელოში გამოყენებულია ციფრული ლიცენზირებული პლატფორმებიდან შეძენილი/მოპოვებული ფოტოილუსტრაციები. ასევე, ცალკეული ფოტოილუსტრაციები შექმნილია/დამუშავებულია ხელოვნური ინტელექტის გამოყენებით.

სახელმძღვანელოს კომპლექტის შემადგენლობა:
მოსწავლის წიგნი I და II ნაწილები;
მასწავლებლის წიგნი I და II ნაწილები.

განათლების, მეცნიერებისა და
ახალგაზრდობის სამინისტრო

© საქართველოს განათლების, მეცნიერებისა და ახალგაზრდობის სამინისტრო
ISBN 978-9941-8-8915-8

საქართველოს სახელმწიფო სიმბოლოები - დროშა, გერბი და ჰიმნი





თავისუფლება

ჩემი ხატია სამშობლო,
სახატე მთელი ქვეყანა,
განათებული მთა-ბარი,
წილნაყარია ღმერთთანა.
თავისუფლება დღეს ჩვენი
მომავალს უმღერს დიდებას,
ცისკრის ვარსკვლავი ამოდის
და ორ ზღვას შუა ბრწყინდება,
დიდება თავისუფლებას,
თავისუფლებას დიდება.

მოუსმინეთ ჰიმნს

ლექსი დავით მაღრაძისა
მუსიკა ზაქარია ფალიაშვილისა
ჰიმნად დაამუშავა იოსებ კეჭაყმაძემ

ძვირფასო მოსწავლეებო!



„მათემატიკა
აზროვნების კულტურაა“

აკადემიკოსი ილია ვეკუა
1907-1977 წ.წ.

ილია ვეკუა ხაზს უსვამდა, რომ ფუნდამენტური კვლევა საბოლოოდ პრაქტიკულ მნიშვნელობას იძენს. მისი აზრით, მეცნიერების ისტორიამ არაერთხელ დაამტკიცა, რომ აბსტრაქტული მათემატიკური იდეები მოგვიანებით ტექნოლოგიური რევოლუციის საფუძველი გახდა.

ილია ვეკუას ერთ-ერთი ყველაზე ხშირად ციტირებული აზრია: „დღეს ძნელია წარმოიდგინო მეცნიერებისა და ტექნიკის ისეთი დარგი, სადაც მათემატიკა არ გამოიყენება.“

წინ საინტერესო და მნიშვნელოვანი წელი გელით.

მე-10 კლასში მათემატიკა კიდევ უფრო მრავალფეროვანი და პრაქტიკული გახდება. თქვენ გაეცნობით ახალ ცნებებს, შეისწავლით ფუნქციებს, განტოლებებს, ალბათობასა და სტატისტიკას, ისწავლით მონაცემების ანალიზს, ლოგიკურ მსჯელობასა და პრობლემების ეფექტიანად გადაჭრას.

მათემატიკა მხოლოდ ფორმულებისა და გამოთვლების ერთობლიობა არ არის. იგი აზროვნების, ლოგიკისა და შემოქმედებითი ძიების ენაა. მათემატიკა გვასწავლის, როგორ ვიპოვოთ კანონზომიერებები, როგორ გავაანალიზოთ ინფორმაცია, როგორ მივიღოთ დასაბუთებული გადაწყვეტილებები და როგორ შევხედოთ სამყაროს კრიტიკული თვალით. სწორედ ამიტომ მათემატიკა მნიშვნელოვან როლს ასრულებს მეცნიერებაში, ინჟინერიაში, მედიცინაში, ეკონომიკაში, ინფორმაციულ ტექნოლოგიებში, ხელოვნურ ინტელექტსა და ყოველდღიურ ცხოვრებაში.

ამ სახელმძღვანელოში შეხვდებით როგორც თეორიულ მასალას, ისე მრავალფეროვან პრაქტიკულ ამოცანებს, რეალური ცხოვრებიდან აღებულ მაგალითებსა და საინტერესო გამოწვევებს. თითოეული თემა დაგეხმარებათ არა მხოლოდ მათემატიკური ცოდნის გაღრმავებაში, არამედ ისეთი უნარების განვითარებაში, რომლებიც წარმატებისთვის აუცილებელია ნებისმიერ სფეროში.

გისურვებთ, ყოველი ახალი ამოცანა საინტერესო აღმოჩენად იქცეს, ყოველი სირთულე — ახალი გამოცდილების წყაროდ, ხოლო ყოველი მიღწევა — საკუთარი შესაძლებლობების რწმენის საფუძვლად.

სარჩევი

თავი 1. ტრიგონომეტრია 7

1.1 ტრიგონომეტრიული იგივეობები 9
1.2 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობების გამოთვლა 14
1.3 კოსინუსებისა და სინუსების თეორემები 19
1.4 ერთეულოვანი წრეწირი 25
1.5 რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები 31
1.6 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები 35
1.7 დაყვანის ფორმულები 40
პირველი თავის დამატებითი სავარჯიშოები 46

თავი 2 სტერეომეტრიის საწყისები 51

2.1 წრფეები და სიბრტყეები სივრცეში 53
2.2 მართობი, დახრილი და გეგმილი. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის 58
2.3 სამი მართობის თეორემა 63
2.4 ორწახნაგა კუთხე 66
მეორე თავის დამატებითი სავარჯიშოები 71

თავი 3 ვექტორები 75

3.1 ვექტორები სიბრტყეზე 77
3.2 ვექტორის კოორდინატები 83
3.3 ვექტორების სკალარული ნამრავლი 88
3.4 მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში 92
3.5 ვექტორები სივრცეში 97
3.6 ვექტორების გამოყენება გეომეტრიაში 103
3.7 სიმეტრია და მობრუნება 106
3.8 ჰომოთეტია და პარალელური გადატანა 111
მესამე თავის დამატებითი სავარჯიშოები 117

თავი 4 ტრიგონომეტრიული ფუნქციები 121

4.1 პერიოდული, ლუწი და კენტი ფუნქციები 123
4.2 y=sinx ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი 128
4.3 y=cosx ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი 134
4.4 y=tanx ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი 138
4.5 უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა 141
მეოთხე თავის დამატებითი სავარჯიშოები 148

პასუხები 151
განმარტებითი ლექსიკონი 160
საცნობარო მასალა 162

სახელმძღვანელოში გამოყენებული ნიშნები



ამ თავში ისწავლი: მოცემულია თავში შესასწავლი საკითხების ჩამონათვალი.



მიზანი. უნდა შეძლო: მიზნებისა და იმ უნარების ჩამონათვალი, რომლებსაც პარაგრაფის დასრულებისას უნდა ფლობდე.



უპასუხე კითხვებს: კითხვები, რომლებიც თემასთანაა დაკავშირებული და მასალის უკეთ გააზრებას ემსახურება.



სავარჯიშოები: ძირითადი პრაქტიკული დავალებები მასალის განსამტკიცებლად.



შესაძლებელია? შეკითხვა, რომელიც პარაგრაფის თემატიკასთანაა დაკავშირებული და რომლის საპასუხოდ შინაარსის ღრმად გააზრება მოგიწევს.



აბა, სცადე! ამოცანა, რომლის გადაწყვეტაც შენგან ცოტა მეტ დაფიქრებას მოითხოვს.



გასამეორებელი სავარჯიშოები: განვლილი მასალის გასამეორებლად განკუთვნილი დავალებები.

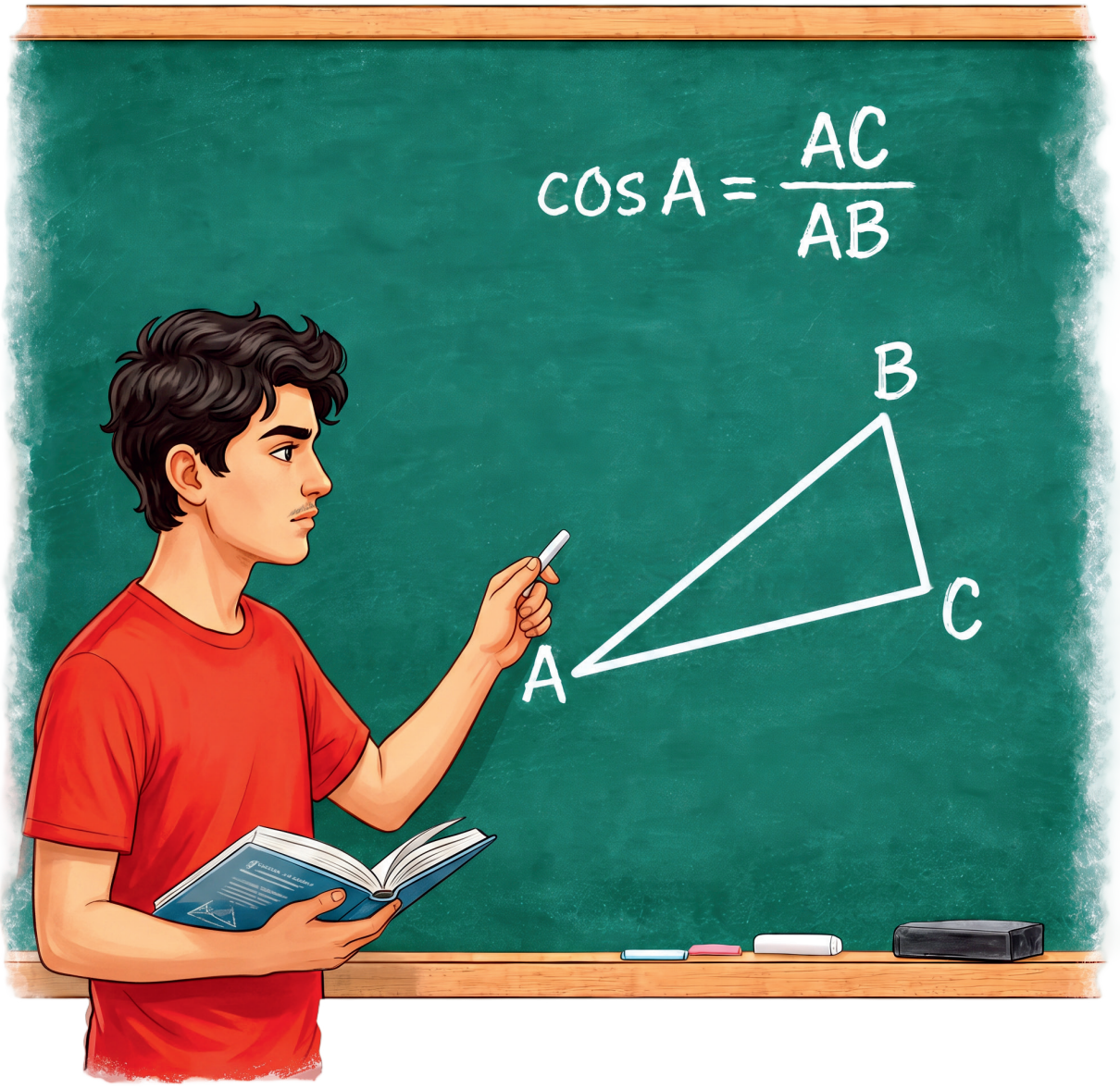
რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში: მოკლედაა აღწერილი პარაგრაფში განვლილი მასალა.



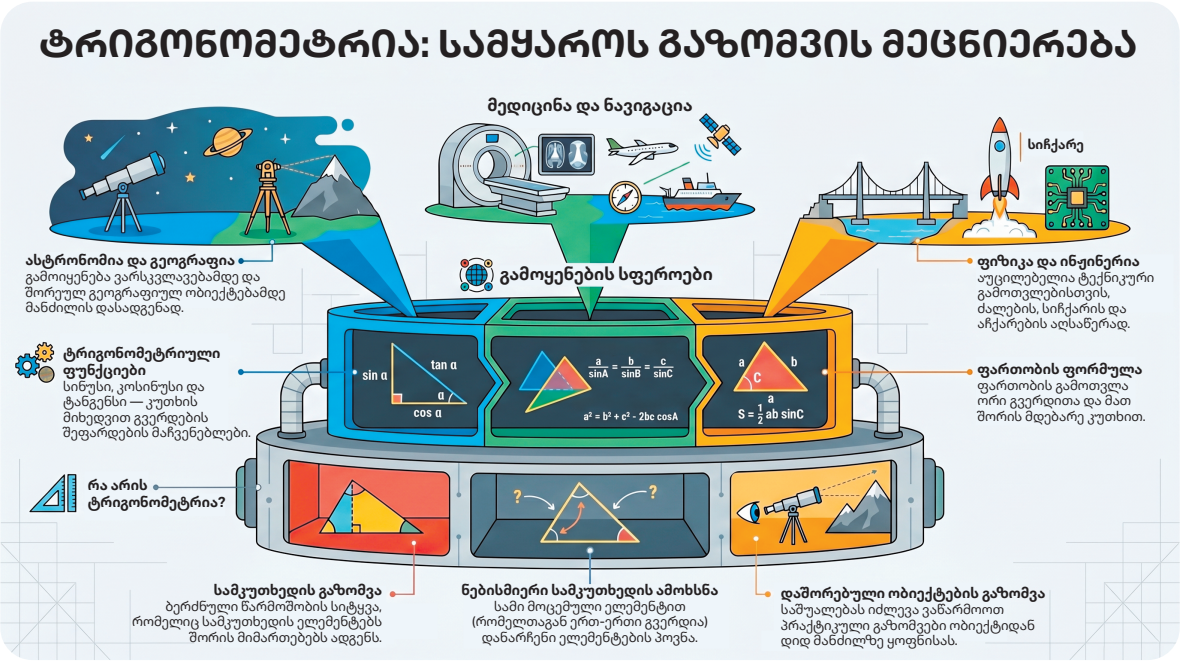
მათბოტი

თავი 1. ტრიგონომეტრია



ამ თავში ისწავლი:

- ფორმულებს, რომლებიც ერთმანეთთან სხვადასხვა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს აკავშირებს;
- კუთხის რადიანულ ზომას და მის კავშირს კუთხის გრადუსულ ზომასთან;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტებას ნებისმიერი არგუმენტისათვის;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების, როგორც რიცხვითი ფუნქციების, თვისებებს;
- ნებისმიერი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მახვილი კუთხის ფუნქციაზე დაყვანის ფორმულებს;
- სინუსებისა და კოსინუსების თეორემებს;
- სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელ ფორმულებს;
- ტრიგონომეტრიის კავშირს რეალურ სამყაროსთან.



ტრიგონომეტრია ქართულად სამკუთხედის გაზომვას ნიშნავს. იგი სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის მიმართებებს ადგენს.

ტრიგონომეტრიული გამოთვლები გამოიყენება მათემატიკის, ფიზიკისა და საინჟინრო საქმის ყველა მიმართულებაში. მას იყენებენ ასტრონომები ვარსკვლავებამდე, ხოლო გეოგრაფები გეოგრაფიულ ობიექტებამდე მანძილის დასადგენად, მედიკოსები კომპიუტერულ ტომოგრაფიაში, ნავიგაციის სპეციალისტები საჰაერო და საზღვაო ნავიგაციაში და სხვ.

ტრიგონომეტრიას გარკვეული გაზომვების ჩასატარებლად წინა წლებშიც ვიყენებდით. ვზომავდით ხის ან შენობის სიმაღლეს, მანძილს ორ წერტილს შორის და ა.შ. მაგრამ ყველა ასეთ გამოთვლაში ვსარგებლობდით მხოლოდ მართკუთხა სამკუთხედში არსებული ტრიგონომეტრიული დამოკიდებულებით.

ამ თავში მოცემული მასალა, რომელიც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების უფრო ღრმა ანალიზს ეთმობა, საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ნებისმიერი სამკუთხედი სამკუთხედის მოცემული სამი ელემენტით, რომელთაგან ერთი მაინცაა გვერდი, ვიპოვოთ სამკუთხედის დანარჩენი ელემენტები.

სამკუთხედის ამოხსნის ამ თავში განხილული მეთოდები საშუალებას იძლევა პრაქტიკული გაზომვები ვაწარმოოთ გასაზომი ობიექტიდან დიდ მანძილზე ყოფნის შემთხვევაშიც. სახელმძღვანელოში ასეთი გაზომვების ბევრი საინტერესო მაგალითია მოცემული.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- დაყვანის ფორმულების გამოყენებას გამოთვლების ჩასატარებლად;
- სამკუთხედის ამოხსნას (სამკუთხედის სამი ელემენტით დანარჩენი ელემენტების პოვნას);
- ხის ჩრდილის სიგრძის მიხედვით ხის სიმაღლის დადგენას;
- მწვერვალის სიმაღლის და მწვერვალამდე მანძილის დადგენას;
- მიუვალ ადგილამდე მანძილის, ორ ობიექტს შორის მანძილის, ობიექტის ზომების დადგენას.

1.1

ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **მსგავსი სამკუთხედების გვერდებს შორის პროპორციის შედგენა;**
- **მახვილი კუთხის სინუსის, კოსინუსისა და ტანგენსის განმარტება;**
- **ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობების დამტკიცება და გამოყენება.**

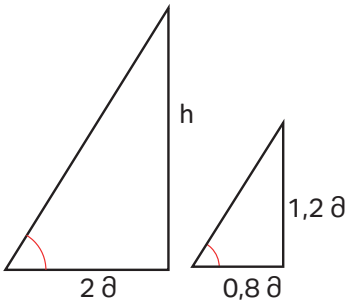


ამოცანა 1. კახას ნაძვის ხის სიმაღლე უნდა გაეზომა. ამისათვის მან ჯოხი დააყენა მიწაზე ვერტიკალურად და გაზომა ჯოხის და მისი ჩრდილის სიგრძე. ჯოხის სიგრძე აღმოჩნდა 1,2 მეტრი, ხოლო მისი ჩრდილის სიგრძე 0,8 მეტრი. შემდეგ გაზომა ხის ჩრდილის სიგრძე, რამაც 2 მეტრი შეადგინა. ამ მონაცემებით მან დაასკვნა, რომ ხის სიმაღლეა $h=2\cdot\frac{1,2}{0,8}=3$ მეტრი. გავარკვიოთ:

ა) რის საფუძველზე გამოიტანა კახამ დასკვნა;

ბ) ჯოხისა და მისი ჩრდილის სიგრძე, შესაბამისად, a მეტრი და b მეტრი, ხოლო ხის ჩრდილის სიგრძე d მეტრი რომ ყოფილიყო, მაშინ რა იქნებოდა ხის სიმაღლე?

ამოხსნა: ა) შევადგინოთ სქემატური ნახაზი (ნახ.1):



ნახ. 1

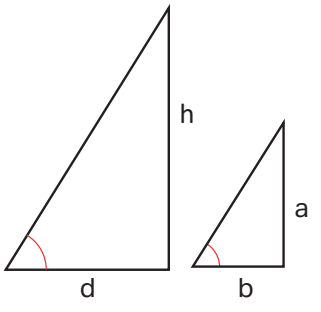
ნახაზზე მოცემულია ორი მართკუთხა სამკუთხედი, რომელთაგან მცირე ზომის სამკუთხედი ჯოხითა და მისი ჩრდილით, ხოლო დიდი ზომის – ნაძვის ხითა და მისი ჩრდილით, როგორც კათეტებით, შედგენილი მართკუთხა სამკუთხედებია. ამ სამკუთხედებს მონიშნული მახვილი კუთხეები ტოლი აქვთ (ეს კუთხეები მზის სხივის დედამიწის ზედაპირზე დაცემის კუთხეს გამოსახავენ).

მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსების ნიშნის თანახმად, მოცემული სამკუთხედები მსგავსია. მსგავსი სამკუთხედების გვერდები პროპორციულია, ამიტომ:

$$\frac{1,2}{0,8}=\frac{h}{2}\Rightarrow h=2\cdot\frac{1,2}{0,8}=3\ (\text{მ}).$$

ბ) ზოგად შემთხვევაში (ნახ. 2) სამკუთხედების მსგავსების იმავე ნიშნის ძალით ვწერთ პროპორციას:

$$\frac{a}{b}=\frac{h}{d}\Rightarrow h=\frac{a\cdot d}{b}.$$



ნახ. 2

განხილულ ამოცანაში ვისარგებლეთ მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსების შემდეგი ნიშნით:

ტოლი მახვილი კუთხის მქონე მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია.

ამ დებულებიდან გამომდინარე, მართკუთხა სამკუთხედში როგორც კათეტების შეფარდება, ისე თითოეული კათეტის

ჰიპოტენუზასთან შეფარდება მხოლოდ მახვილი კუთხის სიდიდეზეა დამოკიდებული. ამ შეფარდებებს მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ეწოდება. გავიხსენოთ მათი განმარტებები.

მე-3 ნახაზზე მოცემულ ABC მართკუთხა სამკუთხედში $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

A კუთხის **სინუსი** (იწერება $\sin\angle A$ ან $\sin\alpha$) ეწოდება A კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებას ჰიპოტენუზასთან:

$$\sin\angle A = \frac{BC}{AB}, \text{ ანუ } \sin\alpha = \frac{a}{c}; \tag{1}$$

A კუთხის **კოსინუსი** (იწერება $\cos\angle A$ ან $\cos\alpha$) ეწოდება A კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდებას ჰიპოტენუზასთან:

$$\cos\angle A = \frac{AC}{AB}, \text{ ანუ } \cos\alpha = \frac{b}{c}; \tag{2}$$

A კუთხის **ტანგენსი** (იწერება $\tan\angle A$ ან $\tan\alpha$) ეწოდება A კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდებას მიმდებარე კათეტთან:

$$\tan\angle A = \frac{BC}{AC}, \text{ ანუ } \tan\alpha = \frac{a}{b}. \tag{3}$$

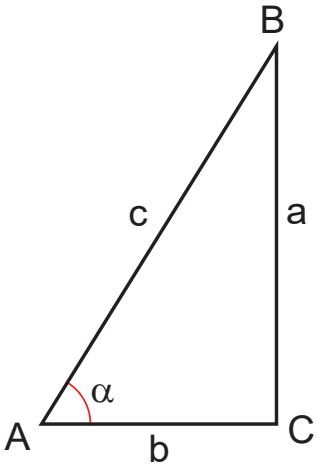
შევნიშნოთ, რომ 1-ელ ამოცანაში ხის სიმაღლის დასათვლელად კახას მზის სხივის დედამიწის ზედაპირთან შედგენილი კუთხის ტანგენსის გამოთვლა დასჭირდა.

მოცემულ განმარტებებზე დაყრდნობით დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი α მახვილი კუთხისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \tag{4}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \tag{5}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{6}$$



ნახ. 3

დამტკიცება: მე-4 ტოლობა უშუალოდ ტანგენსის განმარტებიდან გამომდინარეობს (შეამოწმე დამოუკიდებლად).

მე-5 ტოლობა პითაგორას თეორემის შედეგია. მართლაც, განმარტებით (ნახ. 3)

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB},$$

ამიტომ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1.$$

მე-6 ტოლობა მიიღება მე-5 ტოლობის ორივე მხარის $\cos^2\alpha$-ზე გაყოფით.

მე-4–მე-6 ტოლობებს **ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები** ეწოდება. ეს ტოლობები საშუალებას გვაძლევს რაიმე კუთხისათვის ერთ-ერთი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის რიცხვითი მნიშვნელობის ცოდნის შემთხვევაში გამოვთვალოთ დანარჩენი ორი ფუნქციის რიცხვითი მნიშვნელობა.

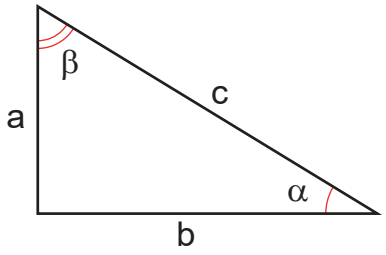
მაგალითი 1. მოცემულია $\tan\alpha=\frac{4}{3}$, სადაც α მახვილი კუთხეა. გამოვთვალოთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$.

ამოხსნა: თუ მე-6 ტოლობაში ჩავსვამთ ტანგენსის მოცემულ მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$1+\frac{16}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{9}{25}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5}.$$

მე-4 ტოლობიდან $\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\tan\alpha=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$.

პასუხი: $\sin\alpha=0,8$, $\cos\alpha=0,6$.



ნახ. 4

მაგალითი 2. α და β მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეებია (ნახ. 4). $\sin\alpha=0,5$. გამოვთვალოთ $\sin\beta$, $\cos\beta$ და $\tan\beta$.

ამოხსნა: პირველ რიგში, შევნიშნოთ, რომ განმარტების თანახმად, $\cos\beta=\frac{a}{c}=\sin\alpha=0,5$.

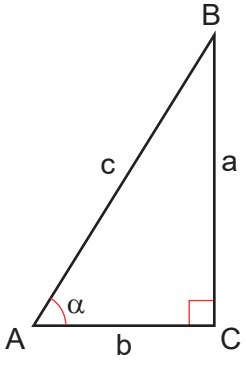
თუ კოსინუსის ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ მე-5 იგივეობაში, მივიღებთ: $\sin^2\beta+0,5^2=1\Rightarrow\sin^2\beta=0,75\Rightarrow\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$. მე-4 იგივეობით $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}$.

პასუხი: $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta=0,5$, $\tan\beta=\sqrt{3}$.

ამოცანა 2. გამოვთვალოთ მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი, თუ ჰიპოტენუზა 13 სანტიმეტრის, ხოლო მახვილი კუთხის კოსინუსი $\frac{5}{13}$-ის ტოლია.

მოც: c=13 სმ, $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ (ნახ. 5)

უ.გ.: P_{ABC}, S_{ABC}



ნახ. 5

ამოხსნა: ვისარგებლოთ 1-ელი და მე-2 ტოლობებით და გამოვსახოთ a და b კათეტები c – ჰიპოტენუზისა და α – მახვილი კუთხის საშუალებით: $a=c\cdot\sin\alpha$, $b=c\cdot\cos\alpha$

ამ ტოლობების გამოყენებით პერიმეტრისა და ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები მიიღებს სახეს:

$$P_{ABC}=a+b+c=c\sin\alpha+c\cos\alpha+c;\qquad S_{ABC}=\frac{ab}{2}=\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2}. \tag{7}$$

მე-5 იგივეობიდან $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$.

მე-7 ტოლობებში რიცხვითი მონაცემების შეტანით მივიღებთ:

$$P_{ABC}=12+5+13=30;\quad S_{ABC}=\frac{12\cdot5}{2}=30.$$

პასუხი: $P_{ABC}=30$ სმ; $S_{ABC}=30$ სმ^2.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\sin\alpha\cos\alpha$, თუ $\sin\alpha+\cos\alpha=1,2$.

ამოხსნა: მოცემული ტოლობა ავიყვანოთ კვადრატში და ვისარგებლოთ მე-5 იგივეობით:

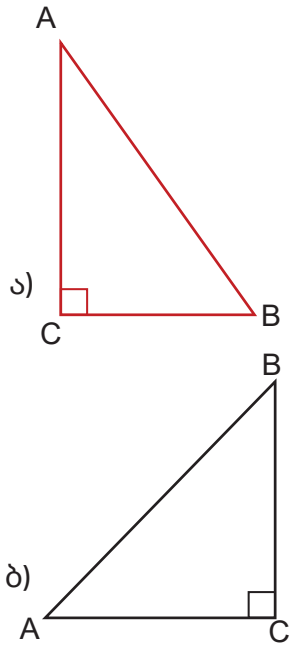
$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1,44\Rightarrow\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1,44\Rightarrow$$
$$\Rightarrow1+2\sin\alpha\cos\alpha=1,44\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=0,22.$$

პასუხი: 0,22.

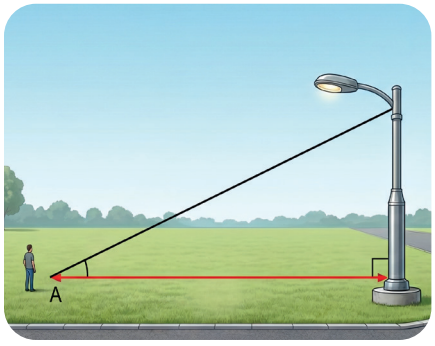
უპასუხე კითხვებს:

1. მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსების რა ნიშანი გამოიყენა კახამ ხის სიმაღლის გასაზომად?
2. მიიღებდა თუ არა კახა იმავე შედეგს, ჯოხი და მისი ჩრდილი დღის 12 საათზე, ხოლო ხის ჩრდილი 15 საათზე რომ გაეზომა?
3. რა თეორემა გამოვიყენეთ მე-5 იგივეობის დასამტკიცებლად?
4. რომელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის ცოდნაა საჭირო ხის სიმაღლის დასათვლელად, თუ ვიცით ხის ჩრდილის სიგრძე და კუთხე, რომლითაც ეს ხე მოჩანს?
5. რას უდრის α მახვილი კუთხე, თუ $\sin\alpha = \cos\alpha$?

სავარჯიშოები



ნახ. 6



ნახ.7

1. გაზომე მე-6 ნახაზზე მოცემული თითოეული სამკუთხედის გვერდები და გამოთვალე A და B კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები.
2. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების შეფარდებაა 8:15. გამოთვალე უმცირესი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.
3. მოცემულია $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. გამოთვალე $\cos\alpha$ და $\tan\alpha$.
4. მოცემულია $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. გამოთვალე $\sin\alpha$ და $\tan\alpha$.
5. მოცემულია $\tan\alpha = 2$. გამოთვალე $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$.
6. მე-7 ნახაზზე მოცემული A წერტილიდან ვერტიკალური ბოძი მოჩანს კუთხით, რომლის ტანგენსი 0,25-ის ტოლია. დაადგინე ბოძის სიმაღლე, თუ A წერტილიდან ბოძამდე მანძილი 24 მ-ის ტოლია.
7. α და β მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეებია. იპოვე:

   ა) $\cos\beta$, თუ $\cos\alpha=0,5$; ბ) $\cos\alpha$, თუ $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

   გ) $\tan\beta$, თუ $\tan\alpha = 7$.
8. α და β მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეებია. $\tan\alpha=m$. იპოვე $\sin\beta$ და $\cos\beta$.
9. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების ჯამი 31-ის, ხოლო ჰიპოტენუზა 25-ის ტოლია. გამოთვალე ამ სამკუთხედის მახვილი კუთხეების სინუსების ჯამი.

შესაძლებელია?

ა) მახვილი კუთხის სინუსის ან კოსინუსის მნიშვნელობა 1-ზე მეტი იყოს? ტანგენსის მნიშვნელობა?
ბ) მახვილი კუთხის სინუსის და კოსინუსის ჯამი 1-ზე ნაკლები ან 1-ის ტოლი იყოს?

აბა, სცადე!

დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი მახვილი კუთხისათვის სრულდება უტოლობა:
ა) $\sin\alpha\cos\alpha\le 0{,}5$;
ბ) $\sin\alpha+\cos\alpha\le \sqrt{2}$.

პრაქტიკული სამუშაო

გაზომე სკოლის შენობის სიმაღლე პარაგრაფში აღწერილი ხერხით და მის გარეშე. მიღებული შედეგები შეადარე ერთმანეთს. აღწერე მათ შორის განსხვავების (თუ ასეთი შედეგი დადგა) მიზეზი.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები და მათი გამოყენება

10. მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრი 30 სმ-ის, ხოლო ჰიპოტენუზა 13 სმ-ის ტოლია. გამოთვალე მახვილი კუთხეების კოსინუსების ჯამი.

11. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა15 სმ-ის, ხოლო მახვილი კუთხის სინუსი 0,8-ის ტოლია. გამოთვალე კათეტები.

12. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის ჰიპოტენუზასთან შეფარდებაა 3:5. გამოთვალე უდიდესი მახვილი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

13. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტია 8 სმ, ხოლო ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხის კოსინუსი 0,6-ის ტოლია. გამოთვალე ჰიპოტენუზა და მეორე კათეტი.

14. მართკუთხა ტრაპეციის დიდი ფერდი მცირე ფერდზე 2-ჯერ მეტია. გამოთვალე ტრაპეციის მახვილი კუთხის სინუსი.

15. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე 12 სმ-ია, ხოლო ფუძესთან მდებარე კუთხის ტანგენსი 1,5. გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი.

16. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი 17 სმ, ხოლო ფუძე 16 სმ-ია. გამოთვალე ფუძესთან მდებარე კუთხის სინუსი.

17. გამოთვალე მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრი და ფართობი, თუ ჰიპოტენუზაა 17 სმ, ხოლო მახვილი კუთხის ტანგენსი $\frac{8}{15}$.

18. რომბის დიაგონალებია 6 სმ და 8 სმ. გამოთვალე დიდი დიაგონალის მიერ რომბის გვერდთან შედგენილი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

19. გამოთვალე:

ა) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, თუ $\tan\alpha=3$;

ბ) $\sin\alpha\cos\alpha$, თუ $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}4$.

20. მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრია 36 მ, ხოლო მახვილი კუთხის ტანგენსი 0,75. გამოთვალე სამკუთხედის გვერდები.

21. დაამტკიცე, რომ თუ $\alpha+\beta=90°$, სადაც α და β მახვილი კუთხეებია, მაშინ $\sin\alpha=\cos\beta$.

1.2 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების რიცხვითი მნიშვნელობების გამოთვლა

მიზანი. უნდა შეძლო:

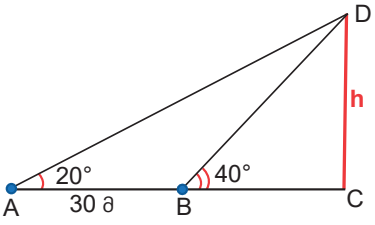
- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მიახლოებითი მნიშვნელობების კალკულატორის დახმარებით გამოთვლა;
- ზოგიერთი კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ზუსტი მნიშვნელობების გამოთვლა;
- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მნიშვნელობების ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება;
- სამკუთხედის ფართობის გამოთვლა ორი გვერდითა და ამ გვერდებს შორის კუთხით.



სნოს ციხე. გვიანი შუა საუკუნეების (XVI-XVII სს.) სათვალთვალო და თავდაცვითი ნაგებობა.

ამოცანა 1. მაკამ მდინარის გაღმა მდგომი ციხე-კოშკის სიმაღლის დადგენა გადაწყვიტა. ამისათვის მან გაზომა კუთხე, რომლითაც ჩანდა ნაგებობა იმ წერტილიდან, სადაც მაკა იდგა. შემდეგ 30 მეტრით მიუახლოვდა ნაგებობას და ისევ გაზომა იმ კუთხის სიდიდე, რომლითაც ნაგებობას ხედავდა. პირველ შემთხვევაში კუთხე აღმოჩნდა 20°, ხოლო მეორე შემთხვევაში – 40°. ამ მონაცემებზე დაყრდნობით, მაკამ ჩაატარა გარკვეული გამოთვლები და დაადგინა ციხე-კოშკის სიმაღლე. რა გამოთვლები ჩაატარა მაკამ და რა პასუხი მიიღო?

ამოხსნა: მაკამ მონაცემების მიხედვით შეადგინა სქემატური ნახაზი, რომელზეც A და B ის წერტილებია, რომლებიდანაც ციხე-კოშკი 20°-იანი და 40°-იანი კუთხეებით ჩანს, C – ნაგებობის ძირი, ხოლო h კოშკის საძიებელი სიმაღლეა. მაკამ ACD და BCD მართკუთხა სამკუთხედებიდან გამოსახა AC და BC კათეტები h-ითა და მოცემული კუთხეების ტანგენსებით და შეიტანა AC–BC=30 ტოლობაში, საიდანაც მიიღო ციხე-კოშკის სიმაღლის გამოსათვლელი გამოსახულება:



ნახ. 1

$$\frac{h}{\tan 20^\circ}-\frac{h}{\tan 40^\circ}=30 \Rightarrow h=\frac{30\tan 20^\circ\cdot\tan 40^\circ}{\tan 40^\circ-\tan 20^\circ}$$

იმისათვის, რომ დაედგინა მიღებული გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა, მაკამ გამოიყენა მის მობილურ ტელეფონში არსებული კალკულატორი. კალკულატორის საშუალებით გამოთვალა tan20°-სა და tan 40°-ის მიახლოებითი მნიშვნელობები. ამ მიზნით კალკულატორის ღილაკებზე აკრიფა tan20 და tan40, დაამრგვალა მეათასედამდე სიზუსტით და მიიღო

$$\tan 20^\circ \approx 0{,}364,\ \ \tan 40^\circ \approx 0{,}839\ .$$

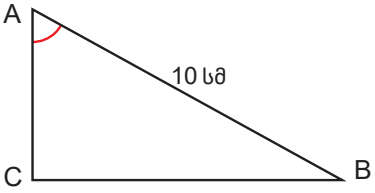


კალკულატორის ეკრანზე ასახულია ტრიგონომეტრიული ფუნქციის გამოთვლის პროცესი – კერძოდ, 45-გრადუსიანი კუთხის სინუსის მნიშვნელობა, რომელიც საკმაოდ მაღალი სიზუსტით (0.7071067811) არის დათვლილი.

h-ის გამოსათვლელ გამოსახულებაში მიღებული რიცხვების ჩასმით და ისევ კალკულატორის დახმარებით მაკამ დაადგინა, რომ ციხე-კოშკის სიმაღლე დაახლოებით 19 მეტრია.
პასუხი: ციხე-კოშკის სიმაღლე დაახლოებით 19 მეტრია.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მიახლოებითი რიცხვითი მნიშვნელობების გამოსათვლელად კალკულატორს აქვს sin, cos და tan ღილაკები. ფუნქციის შესაბამისი ღილაკისა და კუთხის სიდიდის აკრეფისას კალკულატორი რიცხვით მნიშვნელობებს საკმაოდ მაღალი (არანაკლებ 10^{-10} თანრიგამდე) სიზუსტით დაითვლის. პრაქტიკული მიზნებიდან გამომდინარე, ეს მნიშვნელობები საჭირო თანრიგამდე უნდა დავამრგვალოთ.

ამოცანა 2. ABC მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზის სიგრძეა 10 სმ, ხოლო ∠A=50°. გამოვთვალოთ კათეტები.



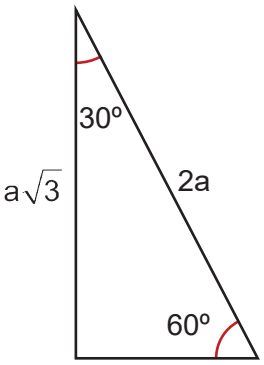
მოც: ∠C=90°, AB =10სმ, ∠A=50°.
უ.გ.: AC და BC.
ამოხსნა.

$$\frac{BC}{AB}=\sin 50°,\quad \frac{AC}{AB}=\cos 50°\Rightarrow BC=10\sin 50°,\quad AC=10\cos 50°.$$

sin50° და cos50° გამოვთვალოთ კალკულატორით და დავამრგვალოთ მეათასედის სიზუსტით: sin50°≈0,766, cos50°≈0,643.
საბოლოოდ გვექნება: BC≈10·0,766=7,66; AC≈10·0,643=6,43.
პასუხი. BC≈7,66 სმ, AC≈6,43 სმ.

ზოგიერთი სიდიდის კუთხისათვის შეგვიძლია დავადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ზუსტი მნიშვნელობები.

ამოცანა 3. გამოვთვალოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობები: ა) 30°; ბ) 60°; გ) 45° კუთხეებისათვის.
ამოხსნა. ა) განვიხილოთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ერთ-ერთი მახვილი კუთხის სიდიდეა 30°, ხოლო მისი მოპირდაპირე კათეტის სიგრძე a (ნახ. 2). მაშინ ჰიპოტენუზის სიგრძე იქნება 2a, ხოლო მეორე კათეტის სიგრძე გამოითვლება პითაგორას თეორემის გამოყენებით: $\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$.



ნახ. 2

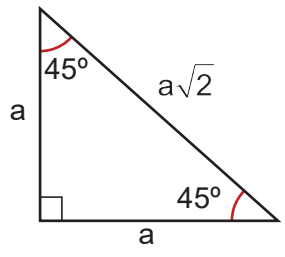
განმარტების თანახმად:

$$\text{ა) } \sin 30°=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2};\quad \cos 30°=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \tan 30°=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

ბ) მე-2 ნახაზის მიხედვით:

$$\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos 60°=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2};\quad \tan 60°=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}.$$

გ) ამ შემთხვევაში გვაქვს ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი (ნახ. 3). თუ კათეტებს a ასოთი აღვნიშნავთ, მაშინ პითაგორას თეორემით ჰიპოტენუზა იქნება $a\sqrt{2}$. ამიტომ,

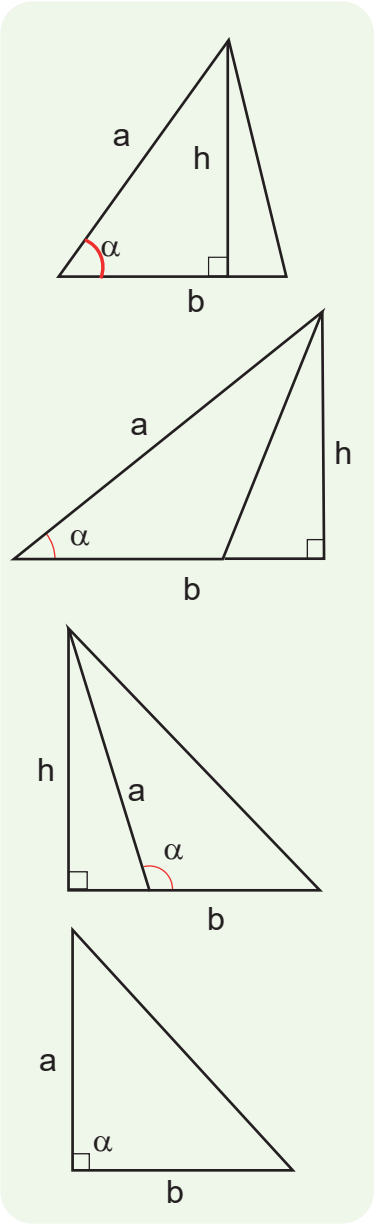


ნახ. 3

$$\sin 45°=\cos 45°=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \tan 45°=\frac{a}{a}=1.$$

ფუნქციათა მნიშვნელობების ცხრილი

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



ნახ. 4

ფუნქციათა მნიშვნელობების ცხრილის საშუალებით შეგვიძლია მოცემული კუთხის მიხედვით ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობები და პირიქით, ფუნქციის მნიშვნელობის მიხედვით ვიპოვოთ კუთხის სიდიდე.

ამოცანა 4. რას უდრის მახვილი კუთხე, თუ ამ კუთხის ტანგენსი $\sqrt{3}$ -ის ტოლია?

ამოხსნა. ცხრილის მიხედვით ვადგენთ, რომ ტანგენსი $\sqrt{3}$ -ის ტოლი 60°-იანი კუთხის შემთხვევაშია.

პასუხი. 60°.

გეომეტრიაში მახვილი კუთხეების გარდა გვხდება მართი, ბლაგვი და გაშლილი კუთხეები. ასეთი კუთხეებისთვის შეგვიძლია შემდეგი ტოლობებით ვისარგებლოთ:

ა) $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$;

ბ) $\sin 180°=0$, $\cos 180°=-1$, $\tan 180°=0$;

გ) თუ $90°<\alpha<180°$, მაშინ

$$\sin\alpha=\sin(180°-\alpha),\ \cos\alpha=-\cos(180°-\alpha),\ \tan\alpha=-\tan(180°-\alpha).$$

ეს ტოლობები გამომდინარეობს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ზოგადი განმარტებიდან, რომელიც 1.4 პარაგრაფშია მოცემული. როგორც ამ ტოლობებიდან ჩანს, მართი კუთხის ტანგენსი არ განიმარტება (ახსენი მიზეზი). ბლაგვი კუთხისათვის ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა მახვილი კუთხის იმავე ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლაზე დაიყვანება. ამასთან, სინუსი რჩება დადებითი, ხოლო კოსინუსი და ტანგენსი ნიშანს იცვლიან.

მაგალითი. გამოვთვალოთ 120°-იანი კუთხის სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

ამოხსნა:

$$\sin 120°=\sin(180°-120°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120°=-\cos(180°-120°)=-\cos 60°=-\frac{1}{2};$$

$$\tan 120°=-\tan(180°-120°)=-\tan 60°=-\sqrt{3}.$$

შევნიშნოთ, რომ წინა პარაგრაფში მახვილი კუთხისათვის მოცემული ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები ძალაშია ბლაგვი კუთხის შემთხვევაშიც (შეამოწმე დამოუკიდებლად).

ამოცანა 5. გამოვთვალოთ სამკუთხედის ფართობი მოცემული a და b გვედებითა და მათ შორის მდებარე α კუთხით.

ამოხსნა. როგორც ვიცით, სამკუთხედის ფართობი გვერდისა და ამ გვერდზე ან მის გაგრძელებაზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია: $S_{\Delta}=\frac{1}{2}bh$ (ნახ.4).

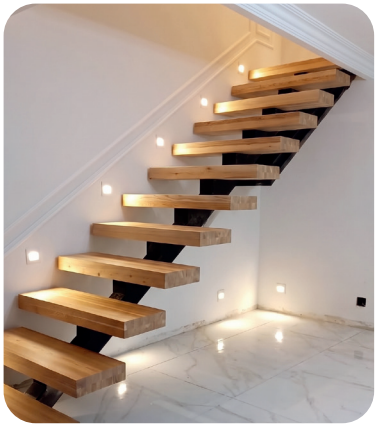
მეორე მხრივ, მოცემული ნახაზებიდან ჩანს, რომ ნებისმიერი სამკუთხედის შემთხვევაში $h=a\cdot\sin\alpha$, ამიტომ:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha. \qquad (1)$$

უპასუხე კითხვებს:

1. რატომ დასჭირდა ამოცანის გადასაწყვეტად მაკას ადგილის მონაცვლეობა?
2. რაში გამოიყენა მაკამ მობილური ტელეფონი?
3. რა სიდიდის კუთხეებისთვის იცი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ზუსტი მნიშვნელობები?
4. დადებითია თუ უარყოფითი ბლაგვი კუთხის სინუსი? კოსინუსი?
5. ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობებიდან რომელი სრულდება მართი კუთხისთვის? გაშლილი კუთხისთვის?

სავარჯიშოები







1. კალკულატორით გამოთვალე და დაამრგვალე მეათასედამდე სიზუსტით:

   ა) $\sin 15°, \cos 15°, \tan 15°$; ბ) $\sin 75°, \cos 75°, \tan 75°$.

2. კალკულატორით გამოთვალე ნამრავლი:
   $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 80°$.
3. გამოთვალე:

   ა) $2\cos 30° - \tan 60°$; ბ) $\sin 60° \cdot \tan 30° + \sin 30°$;

   გ) $\tan^2 45° - 2\sin^2 45°$; დ) $\sin^2 30° + \cos^2 60° - \tan^2 60°$.

4. კიბე, რომლის სიგრძეა 6 მეტრი, იატაკთან ადგენს 30°-იან კუთხეს. რა სიმაღლეზე ადის კიბე?
5. სკვერში ბავშვებისათვის უნდა დაამონტაჟონ სასრიალო. როგორი უნდა იყოს მისი სიმაღლე, თუ სასრიალო ნაწილის სიგრძე იქნება 4 მ, ხოლო მიწის ზედაპირთან დახრის კუთხე 35°?
6. კიბე, რომელიც კედელზე 7 მეტრის სიმაღლეზეა მიყუდებული, კედელთან 20°-იან კუთხეს ადგენს. რა სიგრძისაა კიბე?
7. გამოთვალე:

   ა) $\dfrac{3+\tan^2 45° - 4\cos^2 60°}{1+2\sin^2 30°}$; ბ) $\dfrac{2+4\sin^2 60° - 4\cos^2 45°}{1+3\tan^2 30°}$.

8. ალპინისტმა, რომელიც დილით ზღვის დონიდან 3700 მ სიმაღლეზე იმყოფებოდა, დღის განმავლობაში გაიარა 1500 მ აღმართი, რომლის დახრილობა 60° იყო. რა სიმაღლეს მიაღწია მთამსვლელმა საღამოს?



არაგვის ხეობა. თეთრი და შავი არაგვის შესართავი.

შესაძლებელია?

შესრულდეს ორივე ტოლობა:

ა) $\sin\alpha=0,6$ და $\cos\alpha=0,8$?

ბ) $\sin\alpha=0,4$ და $\cos\alpha=0,9$?

აბა, სცადე!

გამოსახე სამკუთხედის ფართობი a გვერდითა და მასთან მდებარე α და β მახვილი კუთხეებით.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების რიცხვითი მნიშვნელობების გამოთვლა და მისი გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად.
- სამკუთხედის ფართობის გამოთვლა ტრიგონომეტრიის გამოყენებით.

9. A წერტილიდან თეთრი არაგვის მეორე ნაპირზე მდგარი ხე 30°-იანი კუთხით ჩანს, ხოლო A წერტილიდან ხის მიმართულებით მდებარე B წერტილიდან – 45°-იანი კუთხით. გამოთვალე ხის სიმაღლე, თუ A წერტილიდან B წერტილამდე მანძილია 20 მ.

10. გამოთვალე: ა) $\sin 135°$, $\cos 135°$ და $\tan 135°$;
ბ) $\sin 150°$, $\cos 150°$ და $\tan 150°$.

11. გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია 8 დმ და 10 დმ, ხოლო მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსი 0,25.

12. გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია $3\sqrt{2}$ მ და 6 მ, ხოლო მათ შორის კუთხე 135°

13. გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია 4 სმ და 5 სმ, ხოლო ამ გვერდებს შორის კუთხე 135°.

14. მართკუთხა ტრაპეციის ბლაგვი კუთხე 150°-ის ტოლია. დიდი ფერდის სიგრძეა 10 სმ. გამოთვალე ტრაპეციის სიმაღლე.

15. გამოსახე პარალელოგრამის ფართობი მისი a და b გვერდებითა და α კუთხით.

16. გამოთვალე პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია $4\sqrt{3}$ მ და 5 მ, ხოლო კუთხის სიდიდე – 60°.

17. პარალელოგრამის ერთ-ერთი კუთხის სიდიდეა 150°. გამოთვალე პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდის სიგრძეა 10 სმ და 12 სმ.

18. გამოთვალე ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი, თუ ფერდი 14 სმ-ია, წვეროსთან მდებარე კუთხე – 120°.

19. გამოთვალე რომბის ფართობი, თუ მისი გვერდის სიგრძეა $2\sqrt{3}$ სმ, ხოლო ბლაგვი კუთხის სიდიდე – 150°.

20. დაამტკიცე a გვერდის მქონე ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

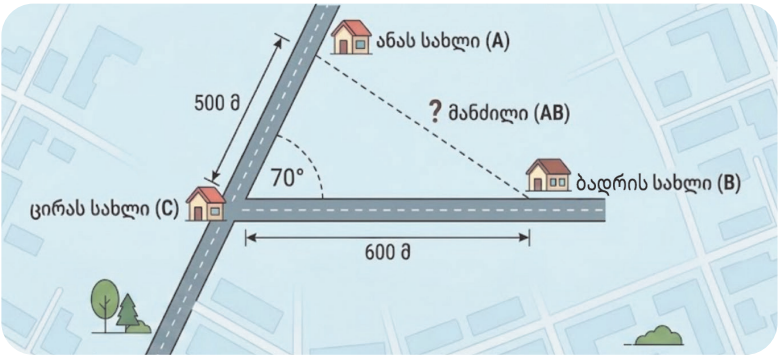
21. ტოლგვერდა სამკუთხედის ფორმის ყვავილნარის პერიმეტრი 18 მ-ის ტოლია. გამოთვალე ყვავილნარის ფართობი.

22. გამოთვალე ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი, თუ სამკუთხედის ფუძე 24 სმ-ია, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე 120°.

1.3 კოსინუსებისა და სინუსების თეორემები

მიზანი. უნდა შეძლო:

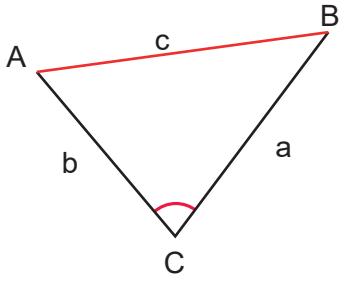
- **კოსინუსებისა და სინუსების თეორემების ჩამოყალიბება;**
- **სამკუთხედის კუთხეების პოვნა მოცემული სამი გვერდით;**
- **სამკუთხედის სახის დადგენა;**
- **პარალელოგრამის თვისების ჩამოყალიბება და დამტკიცება;**
- **სამკუთხედის მედიანის პოვნა მოცემული სამი გვერდით;**
- **გვერდითა და მასთან მდებარე ორი კუთხით დანარჩენი გვერდების პოვნა;**
- **სინუსებისა და კოსინუსების თეორემების ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება.**



ამოცანა 1. ცირას სახლი ორი ქუჩის გადაკვეთაზე მდებარეობს. ეს ქუჩები 70°-იანი კუთხით იკვეთება. ერთ ქუჩაზე, ცირას სახლიდან 500 მეტრში, ცხოვრობს ანა, ხოლო მეორე ქუჩაზე, ცირას სახლიდან 600 მეტრში – ბადრი. დავადგინოთ, რა მანძილია ანას სახლიდან ბადრის სახლამდე.

როგორც სქემატური ნახაზიდან ჩანს, ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა ვიცოდეთ, როგორ გამოვთვალოთ მოცემული ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით სამკუთხედის მესამე გვერდი. ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა **კოსინუსების თეორემა:**

სამკუთხედის ყოველი გვერდის კვადრატი უდრის დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამავე გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორკეცებული ნამრავლი.



ნახ.1

ჩამოყალიბებული თეორემა 1-ელი ნახაზის მიხედვით ასე ჩაიწერება:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C\,. \qquad (1)$$

დავუბრუნდეთ 1-ელ ამოცანას. კალკულატორის დახმარებით ვადგენთ, რომ $\cos 70°\approx 0{,}342$.

ამოცანის მონაცემების 1-ელ ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ:

$$\sqrt{500^2+600^2-2\cdot 500\cdot 600\cdot 0{,}342}\approx 636.$$

პასუხი. ანას სახლიდან ბადრის სახლამდე მანძილი დაახლოებით 636 მეტრია.

1-ელი ტოლობიდან მივიღებთ C კუთხის კოსინუსის გამოსათვლელ ფორმულას:

$$\cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\,. \qquad (2)$$

მიღებული ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ სამკუთხედის კუთხეები მოცემული სამი გვერდის მიხედვით.

ამოცანა 2. სამკუთხედის გვერდებია:
ა) 8 სმ, 15 სმ, 17 სმ; ბ) 1 სმ, 2 სმ, $\sqrt{7}$ სმ.
გამოვთვალოთ სამკუთხედის უდიდესი კუთხის სიდიდე.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ სამკუთხედის ყოველი კუთხე (0°; 180°) შუალედს ეკუთვნის. ამ შუალედში კი კუთხე ცალსახად განისაზღვრება მისი კოსინუსის მნიშვნელობით (ახსენი, რატომ). მაშასადამე, საკმარისია გამოვთვალოთ მოცემული სამკუთხედის უდიდესი კუთხის კოსინუსი და მისი საშუალებით ვიპოვოთ კუთხის მნიშვნელობა.

სამკუთხედის უდიდესი კუთხე უდიდესი გვერდის მოპირდაპირეა, ამიტომ საძიებელი კუთხის კოსინუსის მნიშვნელობა მე-2 ფორმულის ძალით იქნება:

ა) $\frac{8^2+15^2-17^2}{2\cdot 8\cdot 15}=0$, ე.ი. საძიებელი კუთხის სიდიდეა 90°, რადგან (0°; 180°) შუალედში კოსინუსი 0-ის ტოლი მხოლოდ 90°-ზე ხდება.

ბ) $\frac{1^2+2^2-7}{2\cdot 1\cdot 2}=-\frac{1}{2}$, ე.ი. საძიებელი კუთხის სიდიდეა 120°, რადგან (0°; 180°) შუალედში კოსინუსი $-\frac{1}{2}$-ის ტოლი მხოლოდ 120°-ზე ხდება.

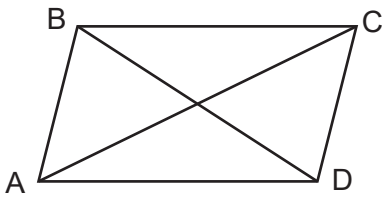
პასუხი: ა) 90°; ბ)120°.

კოსინუსების თეორემიდან გამომდინარეობს პარალელოგრამის შემდეგი თვისება:

პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი ოთხივე გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია.

ჩამოყალიბებული თვისება მე-2 ნახაზის მიხედვით ასე ჩაიწერება:

$$AC^2+BD^2= AB^2+BC^2 +CD^2+AD^2. \qquad (3)$$



ნახ. 2

დამტკიცება. გამოვიყენოთ კოსინუსების თეორემა ABD და ADC სამკუთხედებში:

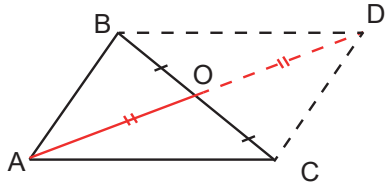
$$BD^2= AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle A. \qquad (4)$$

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle D. \qquad (5)$$

თუ მე-5 ტოლობაში გავითვალისწინებთ, რომ CD=AB, ხოლო $\cos\angle D=\cos(180°-\angle A)=-\cos\angle A$, მივიღებთ:

$$AC^2=AD^2+AB^2+2AD\cdot AB\cdot\cos\angle A \qquad (6)$$

მე-4 და მე-6 ტოლობების შეკრებით მივიღებთ მე-3 ტოლობას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 3

ამოცანა 3. სამკუთხედის გვერდებია a, b და c. გამოვთვალოთ a გვერდისადმი გავლებული სამკუთხედის მედიანა.

ამოხსნა: მე-3 ნახაზზე AO მედიანაა. AO სხივზე გადავდოთ AO მონაკვეთის ტოლი OD მონაკვეთი და D წერტილი შევაერთოთ B და C წერტილებთან. მიღებული ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, რადგან O წერტილი მის AD და BC დიაგონალებს შუაზე ყოფს.

მე-3 ტოლობაზე დაყრდნობით ვწერთ:

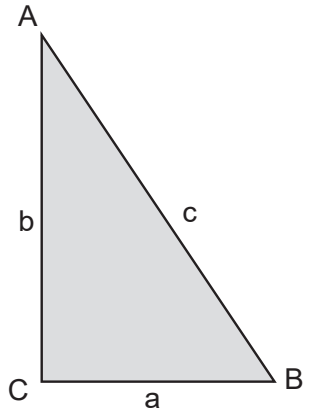
$$(2AO)^2 + BC^2=2(AB^2+AC^2).\ \text{ანუ}\ (2AO)^2 = 2(c^2+b^2)- a^2.$$

თუ a გვერდზე დაშვებულ მედიანას m_a-თი აღვნიშნავთ, უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$m_a = \frac{\sqrt{2\left(c^2+b^2\right)-a^2}}{2}.$$

როგორც ვიცით, სამკუთხედში დიდი გვერდის მოპირდაპირედ დიდი კუთხე ძევს. ნიშნავს თუ არა ეს, რომ რამდენჯერაც სამკუთხედის a გვერდი მეტია b გვერდზე, იმდენჯერ A კუთხე მეტი იქნება B კუთხეზე? ანუ, არის თუ არა სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება?

რა თქმა უნდა, არა. მაგალითად, განვიხილოთ მართკუთხა ABC სამკუთხედი, რომლის $\angle A=30°$, $\angle B=60°$, $\angle C=90°$. ამ სამკუთხედში c=2a, b=a $\sqrt{3}$. გამოდის, რომ კუთხეები 1-ის, 2-ის და 3-ის პროპორციულია, ხოლო გვერდები 1-ის, $\sqrt{3}$-ის და 2-ის პროპორციული.



მაგრამ, თუ კუთხეების ნაცვლად ამ კუთხეების სინუსებს შორის პროპორციას განვიხილავთ, მივიღებთ:

$$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2,$$

ანუ მოცემული სამკუთხედის გვერდები მოპირდაპირე კუთხეთა სინუსების პროპორციულია.

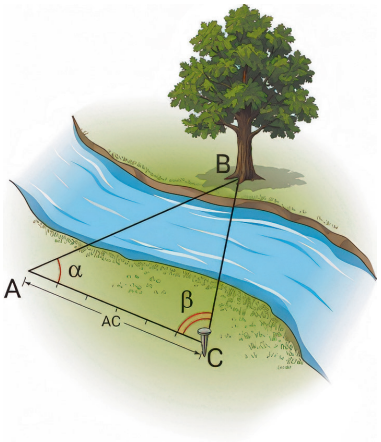
ეს თვისება ნებისმიერი სამკუთხედისთვისაა დამახასიათებელი. კერძოდ, მართებულია:

სინუსების თეორემა. ნებისმიერ სამკუთხედში გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პირდაპირპროპორციულია და მათი შეფარდება ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის ტოლია, ანუ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

სადაც a, b, c სამკუთხედის გვერდები, ხოლო A, B, C ამ გვერდების მოპირდაპირე კუთხეებია.

სინუსებისა და კოსინუსების თეორემებს დიდი გამოყენება აქვს პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნაში. მოვიყვანოთ სინუსების თეორემის პრაქტიკული გამოყენების ერთი მაგალითი.

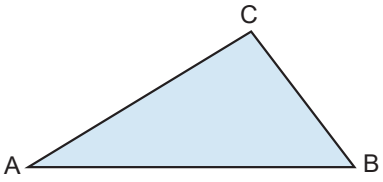


ნახ. 4

ვთქვათ, იმყოფები მდინარის ერთ მხარეს A წერტილში და გინდა გაიგო მდინარის მეორე მხარეს B წერტილში მდგომ ხემდე AB მანძილი (ნახ. 4).

ამ მიზნის მისაღწევად შეგიძლია ასე იმოქმედო:

1. გადაზომე შენსავე ნაპირზე მანძილი A წერტილიდან რაიმე C წერტილამდე;
2. დაადგინე α და β კუთხეთა ზომები;
3. დაწერე სინუსების თეორემიდან გამომდინარე პროპორცია:



$$\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)},$$

საიდანაც, $\sin(180^\circ-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)$ ტოლობის გათვალისწინებით მიიღება საძიებელი მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$AB=\frac{AC\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ თუ ვიცით სამკუთხედის ერთი გვერდი და ორი კუთხე, სინუსების თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია გავიგოთ დანარჩენი გვერდები.

მაგალითი. ABC სამკუთხედში AB=10 სმ, ∠A=30°, ∠B=50°. ვიპოვოთ AC და BC.

ამოხსნა. სინუსების თეორემის გამოყენებით ვწერთ:

$$\frac{AC}{\sin 50^\circ}=\frac{AB}{\sin 100^\circ}\Rightarrow AC=\frac{10\sin 50^\circ}{\sin 100^\circ}\approx\frac{10\cdot 0,766}{0,9848}\approx 7,778;$$

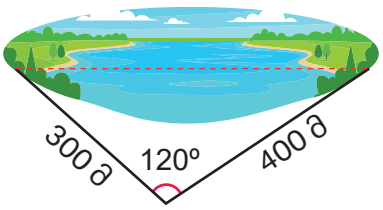
$$\frac{BC}{\sin 30^\circ}=\frac{AB}{\sin 100^\circ}\Rightarrow BC=\frac{10\sin 30^\circ}{\sin 100^\circ}\approx\frac{10\cdot 0,5}{0,9848}\approx 5,077.$$

შევნიშნოთ, რომ 50° და 100°არგუმენტებისათვის სინუსის მნიშვნელობის დასადგენად და გამოთვლების საწარმოებლად გამოვიყენეთ კალკულატორი.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის გვერდს მისი მოპირდაპირე კუთხითა და ამ კუთხის მიმდებარე გვერდებით?
2. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის კუთხეებს მოცემული სამი გვერდით?
3. რა სახისაა სამკუთხედი, თუ მისი უდიდესი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამზე: ა) მეტია? ბ) ნაკლებია?
4. რა სახისაა სამკუთხედი, თუ მისი ერთ-ერთი გვერდის კვადრატი დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია?
5. როგორ გამოთვლი სამკუთხედის მედიანას მოცემული სამი გვერდის მიხედვით?
6. არის თუ არა სამკუთხედის გვერდები შესაბამისი კუთხეების პროპორციული? შესაბამის კუთხეთა სინუსების პროპორციული?
7. როგორ გამოთვლი სამკუთხედზე შემოხაზული წრის რადიუსს მოცემული გვერდითა და მოპირდაპირე კუთხით?
8. როგორ გამოთვლი მიუვალ ადგილამდე მანძილს სინუსების თეორემის გამოყენებით?
9. საკმარისია თუ არა სამკუთხედის კუთხეებისა და შემოხაზული წრის რადიუსის ცოდნა სამკუთხედის გვერდების საპოვნელად?

სავარჯიშოები



ნახ. 5

1. გამოთვალე სამკუთხედის c გვერდი, თუ a=3 სმ, b=4 სმ, ხოლო a და b გვერდებს შორის კუთხეა:
ა) 90°; ბ) 120°; გ) 60°.

2. გამოთვალე ABC სამკუთხედის AC გვერდი, თუ AB=5 სმ, BC=12 სმ, ხოლო B კუთხის სიდიდეა:
ა) 30°; ბ) 90°; გ) 150°.

3. გამოთვალე ტბის სიგრძე მე-5 ნახაზის მიხედვით.

4. გამოთვალე ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე, თუ ფერდი 6 სმ-ის, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე 30°-ის ტოლია.

5. მანძილი A ქალაქიდან B ქალაქამდე 100 კმ-ია, ხოლო C ქალაქამდე – 120 კმ. იპოვე მანძილი B და C ქალაქებს შორის, თუ AB და AC მიმართულებები ერთმანეთთან 60°-იან კუთხეს ქმნიან.

6. გამოთვალე სამკუთხედის კუთხეები, თუ მისი გვერდებია:
ა) 3 სმ, 3 სმ და $3\sqrt{2}$ სმ; ბ) 3 სმ, 3 სმ და $3\sqrt{3}$ სმ.

7. გამოთვალე სამკუთხედის უდიდესი კუთხის სიდიდე, თუ სამკუთხედის გვერდებია:
ა) 5 სმ, 6 სმ და $\sqrt{61}$ სმ; ბ) 1 მ, $\sqrt{3}$ მ და $\sqrt{7}$ მ.

8. დაადგინე, მოცემული გვერდების მიხედვით რომელი სამკუთხედია მახვილკუთხა, რომელი მართკუთხა და რომელი ბლაგვკუთხა:
ა) 7 სმ, 10 სმ, 14 სმ; ბ) 7 მ, 24 მ, 25 მ; გ) 10 დმ, 11 დმ, 13 დმ.

9. ABCD პარალელოგრამში AB=9 სმ, BC=7 სმ, AC=14 სმ. იპოვე BD.

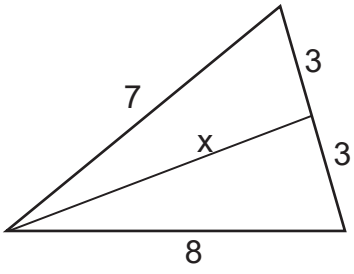
10. პარალელოგრამის დიაგონალებია 6 სმ და 10 სმ, ხოლო ერთი გვერდი 4 სმ. იპოვე პარალელოგრამის დანარჩენი გვერდები.

11. ყვავილნარს პარალელოგრამის ფორმა აქვს, რომელიც დიაგონალებზე გაკეთებული ბილიკებით ოთხ ნაწილად იყოფა. ბილიკების სიგრძეა 8 მ და 12 მ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 60°. გამოთვალე ყვავილნარის პერიმეტრი.

12. იპოვე პარალელოგრამის გვერდები, თუ დიაგონალებია 4 სმ და 6 სმ, ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხის კოსინუსი – $\frac{1}{3}$.

13. სამკუთხედის გვერდებია 7 სმ, 8 სმ და 9 სმ. იპოვე სამკუთხედის სამივე მედიანის სიგრძე.

14. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი 8 სმ-ის, ხოლო ფერდისადმი გავლებული მედიანა 5 სმ-ის ტოლია. იპოვე სამკუთხედის ფუძე.



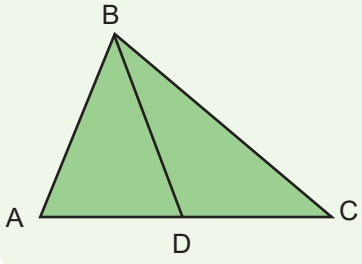
ნახ. 6

შესაძლებელია?

სამკუთხედის ბლაგვი კუთხის სინუსი იმავე სამკუთხედის მახვილი კუთხის სინუსის ტოლი იყოს?

აბა, სცადე!

ABC სამკუთხედში გავლებულია BD ბისექტრისა.
დაამტკიცე ტოლობები:
ა) AB:BC=AD:DC;
ბ) $BD^2=AB\cdot BC - AD\cdot DC$.



რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- სინუსებისა და კოსინუსების თეორემები და მათი გამოყენება

15. მე-6 ნახაზის მიხედვით იპოვე x.

16. სამკუთხედის ერთი მედიანა 9 სმ-ია, მეორე – 12 სმ, ხოლო ამ მედიანებს შორის კუთხე – 60°. იპოვე სამკუთხედის გვერდები.

17. გამოთვალე ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრის დიამეტრი, თუ:

ა) AB=5 სმ და ∠C=30°; ბ) BC=8 დმ და ∠A=45°;

გ) AC=6 მ და ∠B=60°.

18. იპოვე ABC სამკუთხედის AB გვერდი, თუ შემოხაზული წრის რადიუსია 6 სმ, ხოლო:

ა) ∠C=30°; ბ) ∠C=45°; გ) ∠C=60°;

დ) ∠C=90°; ე) ∠C=120°.

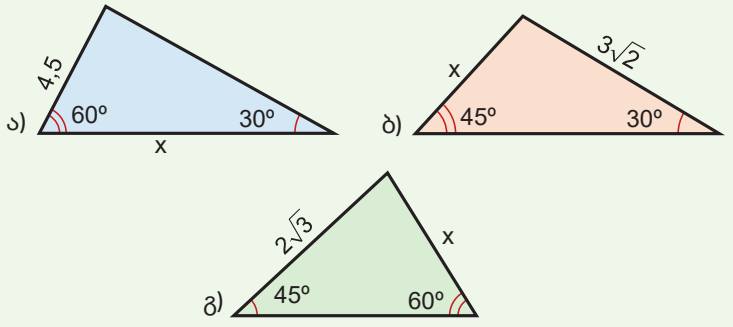
19. გამოთვალე ABC სამკუთხედის A კუთხის სინუსი, თუ შემოხაზული წრის რადიუსი 6 სმ-ის, ხოლო BC გვერდი:
ა)12 სმ-ის; ბ) 6 სმ-ის; გ) 5 სმ-ის ტოლია.

20. გამოთვალე A წერტილიდან ხემდე მანძილი პარაგრაფში მოცემული მაგალითის მიხედვით (ნახ. 4), თუ $\alpha=15°$, $\beta=45°$, AC=6 მ.

21. იპოვე ABC სამკუთხედის A კუთხის გრადუსული ზომა, თუ შემოხაზული წრის რადიუსი 8 სმ-ის, ხოლო BC გვერდი $8\sqrt{3}$ სმ-ის ტოლია. რამდენი ამონახსნი აქვს ამოცანას?

22. ABC სამკუთხედში AB=10 სმ, ∠A=55°, ∠B=95°. გამოთვალე შემოხაზული წრის რადიუსი.

23. ნახაზის მიხედვით იპოვე x:



24. მოცემულია a=3 სმ, b=5 სმ, ხოლო ∠C=120°. იპოვე შემოხაზული წრის რადიუსი.

25. ABC სამკუთხედში AB=2 , AC= $2\sqrt{3}$, ∠B=60°. იპოვე მესამე გვერდი.

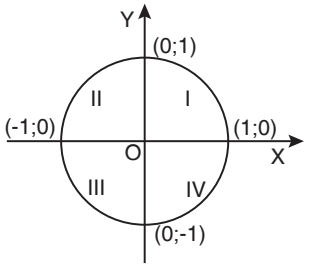
1.4 ერთეულოვანი წრეწირი

მიზანი. უნდა შეძლო:

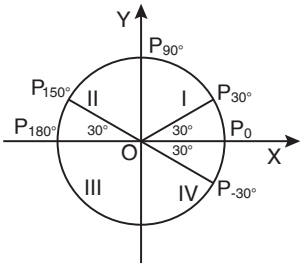
- **ერთეულოვან წრეწირზე მდებარე ზოგიერთი წერტილის კოორდინატების დადგენა;**
- **გრადუსული არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით;**
- **ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლუწ-კენტობისა და პერიოდულობის დასაბუთება ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით.**

წინა პარაგრაფში ვიხილავდით (0°; 180°) შუალედში მოთავსებული არგუმენტის მქონე ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს. ამ პარაგრაფში ჩვენი მიზანია ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განვმარტოთ ნებისმიერი გრადუსული ზომის არგუმენტისათვის.

საკოორდინატო სიბრტყეზე დავხაზოთ 1-ის ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 1). ასეთ წრეწირს **ერთეულოვანი წრეწირი** ეწოდება. ეს წრეწირი საკოორდინატო ღერძებს გადაკვეთს (1; 0), (0; 1), (–1; 0) და (0; –1) კოორდინატების მქონე წერტილებში და ამ წერტილებით იყოფა 4 ღია რკალად, რომლებიც გადანომრილია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



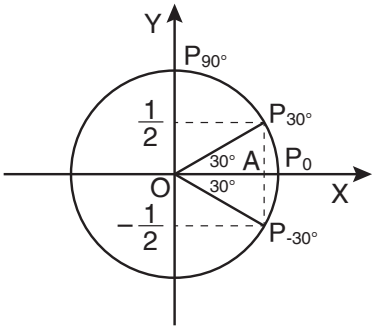
ნახ. 1



ნახ. 2

(1; 0) კოორდინატების მქონე წერტილი აღვნიშნოთ P_0-ით (ნახ.2).

ნებისმიერი α გრადუსისათვის P_α-თი აღვნიშნოთ ერთეულოვანი წრეწირის ის წერტილი, რომელიც მიიღება P_0 წერტილის α გრადუსით მობრუნებით კოორდინატთა სათავის მიმართ. ამასთან, გავითვალისწინოთ, რომ დადებითი α-სათვის მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო უარყოფითი α-სათვის – საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. მე-2 ნახაზზე ნაჩვენებია P_α წერტილის მდებარეობა, როცა α=30°, 90°, 150° და –30°.



ნახ. 3

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ P_α წერტილის კოორდინატები, როცა: ა) α=30°; ბ) α=–30°; გ) α=390°.

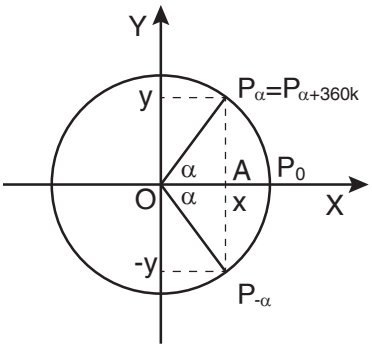
ამოხსნა. ა) იმის გამო, რომ OAP_{30° მართკუთხა სამკუთხედში OP_{30° ჰიპოტენუზა (ნახ. 3) 1-ის ტოლია, AP_{30° კათეტი იქნება $\frac{1}{2}$-ის, ხოლო OA კათეტი $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ის ტოლი. მაშასადამე, P_{30° წერტილის კოორდინატებია $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$;

ბ) P_{-30° წერტილი P_{30° წერტილის სიმეტრიულია აბსცისათა ღერძის მიმართ, ამიტომ მისი პირველი კოორდინატი იგივეა,

რაც $P_{30°}$-ის პირველი კოორდინატი, ანუ $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ხოლო მეორე კოორდინატი – მხოლოდ ნიშნით განსხვავებული, ანუ $-\frac{1}{2}$.

გ) 390°=30°+360°, ე.ი. $P_{390°}$ წერტილი მიიღება P_0 წერტილის ჯერ 30 გარადუსით, ხოლო შემდეგ 360 გრადუსით მობრუნებისას. მაგრამ 360 გრადუსით მობრუნება ერთი სრული ბრუნია, ანუ $P_{390°}=P_{30°}$.

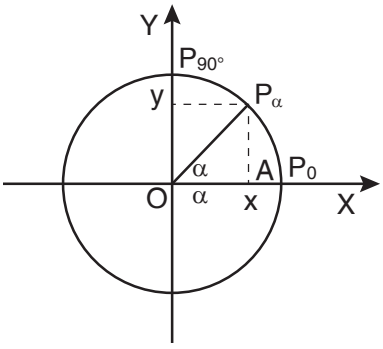
პასუხი: ა) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; ბ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$; გ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.



ნახ. 4

ანალოგიური მსჯელობით ადვილად დარწმუნდები ქვემოთ მოცემული თეორემის მართებულობაში (იმსჯელე მე-4 ნახაზის მიხედვით).

თეორემა 1. თუ P_α წერტილის კოორდინატებია (x; y), მაშინ $P_{-\alpha}$ წერტილის კოორდინატები იქნება (x; –y), ხოლო $P_{\alpha+360\cdot k}$ წერტილის კოორდინატები, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია – ისევ (x;y).



ნახ. 5

ვთქვათ, $0°<\alpha<90°$ და P_α წერტილის კოორდინატებია (x;y) (ნახ. 5). თუ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტებებს დავწერთ OAP_α მართკუთხა სამკუთხედის შემთხვევაში, მივიღებთ:

$$\sin\alpha=\frac{AP_\alpha}{OP_\alpha}=\frac{y}{1}=y;\ \cos\alpha=\frac{AO}{OP_\alpha}=\frac{x}{1}=x;\ \tan\alpha=\frac{AP_\alpha}{OA}=\frac{y}{x}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

მივიღეთ, რომ თუ α მახვილი კუთხის ზომაა, მაშინ P_α წერტილის პირველი კოორდინატია cosα, მეორე კოორდინატია sinα, ხოლო მეორე კოორდინატის პირველ კოორდინატთან ფარდობაა tanα. ამ გარემოებაზე დაყრდნობით შეგვიძლია განვმარტოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ნებისმიერი α-სთვის:

განმარტება. ნებისმიერი α გრადუსისათვის ერთეულოვან წრეწირზე შესაბამისი P_α წერტილის აბსცისას ეწოდება cosα, ხოლო ორდინატას – sinα. იმ შემთხვევაში, როცა აბსცისა განსხვავდება 0-ისგან, ორდინატის აბსცისასთან ფარდობას ეწოდება tanα.

მაშასადამე: ნებისმიერი α გრადუსისათვის P_α წერტილის კოორდინატებია (cosα; sinα).

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ:

ა) sin0°, cos0°, tan 0°; ბ) sin90°, cos90°, tan90°.

ამოხსნა:

ა) მე-5 ნახაზზე P_0 წერტილის კოორდინატებია (1;0), რაც, განმარტების თანახმად, ნიშნავს:

$$\sin0°=0,\ \cos0°=1,\ \tan0°=\frac{0}{1}=0;$$

ბ) მე-5 ნახაზზე P_{90° წერტილის კოორდინატებია (0;1), რაც, განმარტების თანახმად ნიშნავს: $\sin 90^\circ=1$, $\cos 90^\circ=0$, ხოლო $\tan 90^\circ$ არ არსებობს, რადგან 0-ზე გაყოფა არ შეიძლება.

1-ელი თეორემიდან და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მოცემული განმარტებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. ნებისმიერი α არგუმენტისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$; (1)

$\sin(\alpha+360^\circ\cdot k)=\sin\alpha$, $\cos(\alpha+360^\circ\cdot k)=\cos\alpha$, (2)

სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $\sin(-750^\circ)$ და $\cos(-750^\circ)$.

ამოხსნა. 1-ელი ტოლობების ძალით, $\sin(-750^\circ)=-\sin 750^\circ$ და $\cos(-750^\circ)=\cos 750^\circ$, ხოლო მე-2 ტოლობების ძალით:

$$\sin 750^\circ=\sin(30^\circ+2\cdot 360^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\cos 750^\circ=\cos(30^\circ+2\cdot 360^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

პასუხი. $\sin(-750^\circ)=-\frac{1}{2}$, $\cos(-750^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?
2. რას ეწოდება ერთეულოვანი წრეწირი?
3. რა კოორდინატების მქონე წერტილში კვეთს ერთეულოვანი წრეწირი აბსცისათა ღერძს? ორდინატთა ღერძს?
4. რა კოორდინატები აქვს: ა) P_{0°; ბ) P_{180°; გ) P_{270°; დ) P_{-90° წერტილს?
5. $P\alpha$ წერტილის რომელი კოორდინატია $\sin\alpha$? $\cos\alpha$?
6. რომელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა არ იცვლება არგუმენტის ნიშნის შეცვლით?
7. რა ნიშანი ექნება: ა) $\sin\alpha$-ს; ბ) $\cos\alpha$-ს, როცა $90^\circ<\alpha<180^\circ$?

სავარჯიშოები

1. დახაზე ერთეულოვანი წრეწირი და მონიშნე მასზე P_α წერტილი, სადაც:
   ა) $\alpha=10^\circ$; ბ) $\alpha=45^\circ$; გ) $\alpha=90^\circ$;
   დ) $\alpha=300^\circ$; ე) $\alpha=120^\circ$; ვ) $\alpha=270^\circ$.
2. გაარკვიე, რომელ მეოთხედშია P_α წერტილი, თუ α არის: 285°; -376°; 204°; -172°; -12°; 730°; -90°; $800.^\circ$

3. ვთქვათ, P_α წერტილის კოორდინატებია (x;y). იპოვე P_β წერტილის კოორდინატები, თუ:

ა) $\beta=\alpha-360°$; ბ) $\beta=\alpha+720°$; გ) $\beta=\alpha+180°$.

4. დაადგინე, დადებითია თუ უარყოფითი:

ა) sin65°; sin105°; sin161°; sin179°; sin200°; sin250°; sin365°; sin380°.

ბ) cos40°; cos87°; cos100°; cos192°; cos200°; cos250°; cos339°; cos380°.

გ) tan40°; tan80°; tan100°; tan102°; tan185°; tan250°; tan286°; tan320°; tan368°.

5. დაადგინე, რომელ მეოთხედებშია დადებითი:

ა) სინუსი; ბ) კოსინუსი; გ) ტანგენსი.

6. რა ნიშანი აქვს ქვემოთ მოცემულ გამოსახულებას?

ა) sin145°; ბ) sin(–92°); გ) cos145°;

დ) cos(–45°); ე) tan96°; ვ) tan182°.

7. რა ნიშანი აქვს ნამრავლს?

ა) $\sin85°\cdot\sin102°$; ბ) $\cos184°\cdot\cos172°$;

გ) $\sin142°\cdot\sin142°\cdot\tan142°$;

დ) $\tan111°\cdot\tan172°$; ე) $\cos192°\cdot\tan255°$;

ვ) $\sin80°\cdot\tan290°\cdot\cos170°$.

8. რომელია მეტი:

ა) sin20° თუ sin40°? ბ) cos20° თუ cos40°?

გ) tan20° თუ tan40°?

9. განსაზღვრე სხვაობის ნიშანი:

ა) $\sin25°-\sin26°$; ბ) $\sin130°-\sin240°$;

გ) $\cos25°-\cos26°$; დ) $\sin45°-\sin40°$;

ე) $\sin62°-\sin70°$; ვ) $\cos40°-\cos42°$.

10. ჩაწერე ზრდის მიხედვით:

ა) sin 60°, sin 20°, sin 70°, sin 30°, sin 45°, sin 80°;

ბ) cos50°; cos60°; cos40°; cos30°; cos90°; cos45°.

11. იპოვე:

ა) sin180°, cos180°, tan180°; ბ) sin270°, cos270°, tan270°;

გ) sin360°, cos360°, tan360°.

12. გამოთვალე:

ა) sin 405°, cos405°, tan405°;

ბ) sin (–405°), cos(–405°), tan(–405°);

გ) sin 420°, cos420°, tan420°;

დ) sin (–420°), cos(–420°), tan(–420°);

ე) sin 720°, cos720°, tan720°;

ვ) sin (–720°), cos(–720°), tan(–720°).

13. წარმოადგინე ტრიგონომეტრიული ფუნქცია 0°-სა და 360°-ს შორის მოთავსებული არგუმენტით:

ა) $\sin 585°$; ბ) $\cos(-860°)$; გ) $\tan 506°$;

დ) $\sin(-576°)$; ე) $\cos 770°$; ვ) $\tan(1810°)$.

14. იპოვე:

ა) $\sin 13°$, თუ $\sin 733°=a$;

ბ) $\cos 55°$, თუ $\cos 415°=b$;

გ) $\tan 380°$, თუ $\tan 20°=c$.

15. იპოვე:

ა) $\sin\alpha$, თუ $\sin(720°-\alpha)=a$;

ბ) $\cos\alpha$, თუ $\cos(720°-\alpha)=b$;

გ) $\tan\alpha$, თუ $\tan(720°-\alpha)=c$.

16. დაასახელე ორი განსხვავებული არგუმენტი, რომელთაგან თითოეულზე სინუსი $\frac{\sqrt{3}}{2}$-ის ტოლია.

17. დაასახელე ორი განსხვავებული არგუმენტი, რომელთაგან თითოეულზე ტანგენსი 1-ის ტოლია.

18. დაასახელე 0°-სა და 360°-ს შორის მოთავსებული ორი განსხვავებული არგუმენტი, რომელთაგან თითოეულზე კოსინუსი 0-ის ტოლია.

19. გამოთვალე $\sin\alpha+\cos\alpha$ გამოსახულების მნიშვნელობა, როცა:

ა) $\alpha=0°$; ბ) $\alpha=45°$; გ) $\alpha=60°$;

დ) $\alpha=90°$; ე) $\alpha=180°$; ვ) $\alpha=270°$.

20. გამოთვალე:

ა) $5\sin 90°+2\cos 0°-2\sin 270°+10\cos 180°$;

ბ) $13\sin 0°+12\cos 90°-3\tan 30°$;

გ) $3\tan 0°+2\cos 90°+3\sin 270°-3\cos 180°$;

დ) $\sqrt{2}\cos 45°-\sqrt{3}\tan 60°+2\tan 45°$.

21. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $4a\sin^2 45°-3(a\tan 45°)^2-(2a\cos 45°)^2$;

ბ) $\dfrac{(a\sin 90°)^2-(b\tan 45°)^2}{2a^2\sin 30°-2ab\cos 0°+(b\tan 45°)^2}$;

გ) $\dfrac{(2a\cos 60°)^2-\left(\dfrac{b}{\tan 45°}\right)^2+(3ab\sin 0°)^2}{2a\sin 30°-2b\cos^2 45°+(5a\cos 0°\cdot\tan 0°)^3}$;

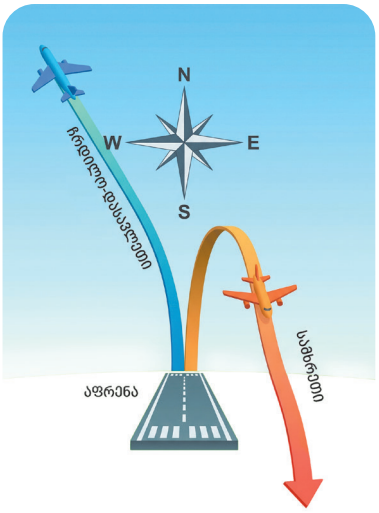
დ) $\dfrac{4-2\tan 45°+\tan^2 60°}{3\sin 90°-4\cos^2 30°+\tan^2 30°}$.

შესაძლებელია?

შესრულდეს ტოლობა: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1$.

აბა, სცადე!

დაამტკიცე რომ, P_α მაშინ და მხოლოდ მაშინ ეკუთვნის პირველ მეოთხედს, როცა $\sin\alpha+\cos\alpha>1$



22. რა სიგრძის რკალს შემოწერს ერთეულოვან წრეწირზე P_α წერტილი:

ა) P_0 წერტილიდან $P_{90°}$ წერტილამდე მოძრაობისას?
ბ) P_0 წერტილიდან $P_{180°}$ წერტილამდე მოძრაობისას?
გ) $P_{45°}$ წერტილიდან $P_{60°}$ წერტილამდე მოძრაობისას?

23. გამოთვალე:
ა) sin 120°, cos120°, tan120°; ბ) sin 150°, cos150°, tan150°;
გ) sin 300°, cos300°, tan300°.

24. ვთქვათ, sin 20° =a. იპოვე α, რომლისთვისაც:
ა) $\sin\alpha=a$ და $90°<\alpha<180°$; ბ) $\sin\alpha=-a$ და $180°<\alpha<270°$.

25. ვთქვათ, cos 20°=a. იპოვე α, რომლისთვისაც:
ა) $\cos\alpha=-a$ და $90°<\alpha<180°$; ბ) $\cos\alpha=a$ და $0°<\alpha<360°$.

26. იპოვე ყველა α, რომლისთვისაც: ა) $\sin\alpha=0$; ბ) $\cos\alpha=0$.

27. რამდენჯერ აღემატება წრეწირის სიგრძე მის დიამეტრს? რადიუსს?

28. რა სიგრძისაა 1 სმ რადიუსის მქონე წრეწირის რკალი, თუ მისი გრადუსული ზომაა:

ა) 180°; ბ) 90°; გ) 60°; დ) 45°; ე) 30°; ვ) 15°.

29. გამოთვალე მანძილი საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე P(x; y) წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე, თუ:

ა) x=3, y=4; ბ) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$; გ) $x=-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

30. საკოორდინატო სიბრტყის მეორე მეოთხედში მდებარე A წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილი 1-ის ტოლია. A წერტილის აბსცისა – 0,3-ის ტოლია. იპოვე A წერტილის ორდინატი.

31. აეროდრომიდან ერთდროულად ორი თვითმფრინავი აფრინდა. ერთი თვითმფრინავი v_1 კმ/სთ სიჩქარით გაფრინდა სამხრეთით, ხოლო მეორე v_2 კმ/სთ სიჩქარით – ჩრდილო-დასავლეთით. რა მანძილი იქნება თვითმფრინავებს შორის აფრენიდან 1 სთ-ის შემდეგ?

32. სკოლის ეზოში სამ ხეს შორის მანძილია 4მ, 5მ და 6მ. ეზოში უნდა დაამონტაჟონ სოკო, რომელიც თანაბრად იქნება დაშორებული თითოეული ხიდან. ა) როგორ მოვძებნოთ სოკოს დასამონტაჟებელი ადგილი? ბ) რა მანძილი იქნება სოკოდან თითოეულ ხემდე?

33. წრეწირზე, რომლის რადიუსი 1 კმ-ია, 60კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობს მოტოციკლი. რამდენი გრადუსია რკალი, რომელსაც მოტოციკლი 1 წთ-ში გადის?

27-33

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განმარტება;
- ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა თვისებების დასაბუთება ერთეულოვანი წრეწირის გამოყენებით.

1.5 რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **კუთხის რადიანული ზომის განმარტება;**
- **კუთხის რადიანული ზომის გრადუსულ ზომასთან დაკავშირება;**
- **ტრიგონომეტრიული ფუნქციების, როგორც რიცხვითი ფუნქციების, განმარტება.**

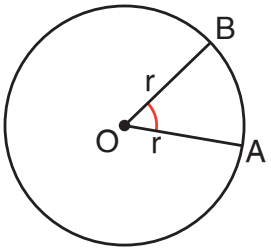
წინა პარაგრაფში ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განვმარტეთ, როგორც გრადუსებში მოცემული არგუმენტის ფუნქციები. ჩვენი მიზანია იგივე ფუნქციები **რიცხვითი არგუმენტის ფუნქციებად**, ანუ ისეთ ფუნქციებად ვაქციოთ, რომელთა განსაზღვრის არე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე იქნება.

როგორც ვიცით, ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა განისაზღვრება მისი შესაბამისი რკალის გრადუსული ზომით. წრეწირი იყოფა 360 ტოლ ნაწილად, რომელთაგან თითოეულს 1-გრადუსიანი რკალი ეწოდება. ყოველი რკალი იმდენ გრადუსიანად ითვლება, რამდენ 1-გრადუსიან რკალსაც შეიცავს.

გავეცნოთ კუთხის ახალ საზომ ერთეულს – რადიანს.

კუთხის რადიანული ზომაც წრეწირთან არის დაკავშირებული.

განმარტება. 1 რადიანის ტოლი კუთხე ეწოდება ცენტრალურ კუთხეს, რომლის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის ტოლია.



ნახ. 1

1-ელ ნახაზზე $\angle AOB = 1$რად, რადგან $\overset{\smile}{AB} = AO = OB = r$.

დავადგინოთ კავშირი კუთხის რადიანულ და გრადუსულ ზომებს შორის. ვიცით, რომ r-რადიუსიანი წრეწირის სიგრძე $2\pi r$-ის ტოლია, ანუ წრეწირის სიგრძე რადიუსს 2π-ჯერ აღემატება. ეს ნიშნავს, რომ სრული კუთხის გრადუსული ზომა, ანუ 360 გრადუსი, 2π რადიანის ტოლია. აქედან ვასკვნით, რომ π რადიანი 180 გრადუსის ტოლია, ე.ი.

$$1\text{რად} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ. \qquad (1)$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი α ნამდვილი რიცხვისთვის

$$\alpha \text{ რად} = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi}. \qquad (2)$$

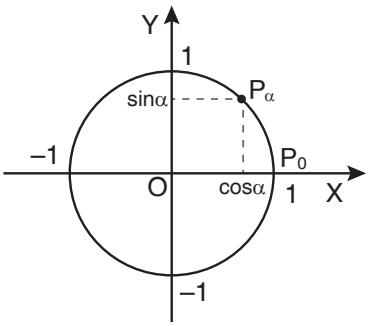
მაგალითად,

$$\frac{\pi}{2}\text{ რად} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 90^\circ, \quad \frac{\pi}{6}\text{ რად} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ,$$

ხოლო

$$5\text{ რად} = 5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 5 \cdot 57^\circ = 285^\circ.$$

ისევე, როგორც გრადუსული ზომის არგუმენტისთვის, რიცხვითი არგუმენტისთვისაც ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით განიმარტება. კერძოდ, ნებისმიერი α ნამდვილი რიცხვისთვის P_α წერტილი მიიღება P_0



ნახ. 2

წერტილისგან კოორდინატთა სათავის მიმართ α რადიანით მობრუნებით, ხოლო sinα და cosα შესაბამისად, P_α წერტილის ორდინატას და აბსცისას წარმოადგენენ (ნახ. 2).

მაგალითი. გამოვთვალოთ: ა) $\sin\frac{\pi}{6}$; ბ) $\cos\frac{3\pi}{2}$; გ) $\tan\pi$.

ამოხსნა: ა) $\frac{\pi}{6}$ რად=30°, ამიტომ $\sin\frac{\pi}{6}=\sin30°=\frac{1}{2}$;

ბ) $\frac{3\pi}{2}$ რად=270°, ამიტომ $\cos\frac{3\pi}{2}=\cos270°=0$;

გ) $\tan\pi=\frac{\sin\pi}{\cos\pi}=\frac{\sin180°}{\cos180°}=\frac{0}{1}=0$.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა სიდიდის ცენტრალურ კუთხეს ეწოდება 1 რადიანის ტოლი?
2. წრეწირის რა ნაწილია 1 რადიანის ტოლი რკალი?
3. რამდენ გრადუსს უდრის ერთი რადიანი?
4. რას ეწოდება რიცხვითი არგუმენტის სინუსი? კოსინუსი? ტანგენსი?
5. დაახლოებით, რამდენ გრადუსს უდრის 2 რადიანი? 0,5 რადიანი?
6. რომელ მეოთხედშია P_3 წერტილი? P_5 წერტილი?

სავარჯიშოები



1. წრეწირი 15 ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი. იპოვე თითოეული რკალის რადიანული ზომა.
2. ზღვის კომპასის წრეწირი 32 ტოლ ნაწილადაა დაყოფილი, თითოეულს რუმბი ეწოდება. გამოთვალე რუმბის რადიანული ზომა.
3. რამდენი რადიანით შემობრუნდება საათის წუთების მაჩვენებელი ისარი: ა) ნახევარ საათში? ბ) 2 სთ-ში?
4. რომელ მეოთხედშია P_α, თუ ა) $\alpha=1$; ბ) $\alpha=2$; გ) $\alpha=3$; დ) $\alpha=4$; ე) $\alpha=1{,}8\pi$.
5. დადებითია თუ უარყოფითი: sin4? cos1,5? tan0,3?
6. სამკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3:4. სამკუთხედის კუთხეები გამოსახე რადიანებში.

7. დაადგინე მოცემული რიცხვის ნიშანი:

ა) $\sin\frac{4}{5}\pi;\ \sin\frac{3}{4}\pi;\ \sin\frac{2}{3}\pi;\ \sin\frac{2}{5}\pi;\ \sin\frac{2}{45}\pi;\ \sin\frac{5}{36}\pi;\ \sin\frac{14}{45}\pi.$

ბ) $\cos\frac{4}{5}\pi;\ \cos\frac{3}{4}\pi;\ \cos\frac{2}{3}\pi;\ \cos\frac{2}{5}\pi;\ \cos\frac{2}{45}\pi;\ \cos\frac{5}{36}\pi;\ \cos\frac{14}{45}\pi.$

გ) $\tan\frac{4}{5}\pi;\ \tan\frac{3}{4}\pi;\ \tan\frac{2}{3}\pi;\ \tan\frac{2}{5}\pi;\ \tan\frac{2}{45}\pi;\ \tan\frac{5}{36}\pi;\ \tan\frac{14}{45}\pi.$

8. განსაზღვრე მოცემული რიცხვის ნიშანი, თუ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$:

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right);\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right);$

$\cos(\pi-\alpha);\ \tan(\pi+\alpha);\ \tan(2\pi-\alpha).$

9. სამკუთხედის ორი კუთხის ზომებია $\frac{\pi}{15}$ და $\frac{\pi}{5}$. გამოთვალე სამკუთხედის სამივე კუთხის გრადუსული ზომები.

10. ოთხკუთხედის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:3:5:6. ოთხკუთხედის თითოეული კუთხე გამოსახე რადიანებში.

11. გამოსახე რადიანებში წესიერი:

ა) სამკუთხედის;

ბ) ოთხკუთხედის;

გ) ექვსკუთხედის კუთხეები.

12. გამოთვალე:

ა) $3\sin 2\pi-2\cos 1{,}5\pi+4\sin\pi-\tan\pi;$

ბ) $8-2\sin 2\pi-3\cos\pi+2\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos 2\pi;$

გ) $2\sin\frac{\pi}{4}+3\cos 2\pi+5\tan 2\pi;$

დ) $4\tan 2\pi-2\sin\frac{1}{2}\pi+3\cos\frac{3\pi}{2}-4\tan\pi.$

13. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $4a\sin^2\frac{\pi}{4}+\left(2a\cos\frac{\pi}{4}\right)^2-3\left(a\tan\frac{\pi}{4}\right)^2;$

ბ) $2b\sin\frac{\pi}{4}-3a\tan 0+a\tan\frac{\pi}{4};$

გ) $2b\cos\frac{\pi}{4}-3a\tan\frac{\pi}{3}+a\tan\frac{\pi}{4};$

დ) $\dfrac{\left(a\sin\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(b\tan\frac{\pi}{4}\right)^2}{2a^2\sin\frac{\pi}{6}-2ab\cos 0+\left(b\tan\frac{\pi}{4}\right)^2}.$

აბა, სცადე!

დაამტკიცე, რომ „ალფა“ რადიანი კუთხის მქონე სექტორის ფართობი ალფას რადიუსის კვადრატზე ნამრავლის ნახევრის ტოლია.



14. რომელია მეტი:

ა) $\sin 1°$ თუ $\sin 1$? ბ) $\sin 0{,}5$ თუ $\sin 0{,}6$?

გ) $\sin 6°$ თუ $\sin 6$? დ) $\cos 0{,}8$ თუ $\cos 0{,}9$?

ე) $\cos 60°$ თუ $\cos\frac{\pi}{6}$? ვ) $\cos 30°$ თუ $\cos 3$?

15. იპოვე ყველა α, რომლისთვისაც:
ა) $\sin\alpha = 1$; ბ) $\cos\alpha = 1$; გ) $\tan\alpha = 0$.

16. მარიამმა და ანიმ მოცემული α არგუმენტისათვის გამოთვალეს ტანგენსისა და კოსინუსის მნიშვნელობები. მათგან ერთ-ერთმა დაუშვა შეცდომა. რომელმა დაუშვა შეცდომა, თუ მარიამმა მიიღო: $\cos\alpha = 0{,}8$ და $\tan\alpha = -0{,}75$, ხოლო ანიმ მიიღო: $\cos\alpha = -0{,}8$ და $\tan\alpha = 1{,}25$?

17. რომელია მეტი:
ა) $\sin 0{,}5$ თუ $0{,}5$? ბ) $\cos 0{,}5$ თუ $0{,}5$? გ) $\tan 1$ თუ 1?

18. წრიული სექტორის ფართობი 36 კვ. სმ-ია, ხოლო ამ სექტორის რკალის შესაბამისი კუთხე – 0,5 რად. იპოვე წრის რადიუსი.

19. დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისათვის $P_{-\alpha}$ წერტილი P_α წერტილის სიმეტრიულია აბსცისათა ღერძის მიმართ.

20. დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის $P_{\pi-\alpha}$ წერტილი P_α წერტილის სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ.

21. დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის $P_{\pi+\alpha}$ წერტილი P_α წერტილის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

22. დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის მართებულია ტოლობები:
ა) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; ბ) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

გ) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$; დ) $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$;

ე) $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$; ვ) $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$.

23. დაამტკიცე, რომ ნებისმიერი α არგუმენტისთვის სრულდება ტოლობა: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

24. ვთქვათ, $\sin 27° = a$. იპოვე:
ა) $\sin 387°$; ბ) $\sin(-27°)$; გ) $\sin 207°$; დ) $\sin(-207°)$.

25. როგორ გავზომოთ ქარხნის მილის სიგრძე, თუ მის ფუძესთან მისვლა შეუძლებელია?

24-25

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- კუთხის რადიანული ზომა
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების, როგორც რიცხვითი ფუნქციების, განმარტება

1.6 ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების ჩამოყალიბება და დასაბუთება;**
- **ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებების ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება.**

წინა პარაგრაფში სინუსი და კოსინუსი განვმარტეთ ნებისმიერი რიცხვითი არგუმენტისათვის. ეს ნიშნავს, რომ სინუსისა და კოსინუსის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე: $R=(-\infty; +\infty)$. ამ ფუნქციების განმარტებიდანვე გამომდინარეობს, რომ თითოეული მათგანის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[-1; 1]$ ჩაკეტილი შუალედი (ახსენი, რატომ). ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin: R \to [-1;1],\ \cos: R \to [-1;1].$$

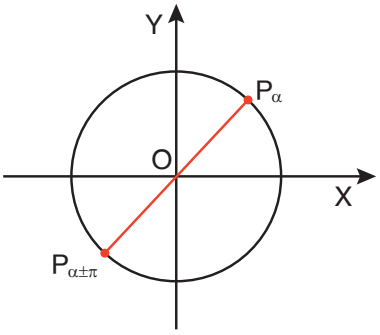
იმის გამო, რომ ნებისმიერი ნამდვილი α რიცხვისთვის P_α და $P_{-\alpha}$ წერტილები აბსცისათა ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილებია (იხ. 1.4 პარაგრაფის ნახ. 4), შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha. \qquad (1)$$

ეს ტოლობები ნიშნავს, რომ სინუსი კენტი, ხოლო კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა.

თუ 1.4 პარაგრაფში მოცემულ მე-2 ტოლობას ჩავწერთ რიცხვითი არგუმენტის შემთხვევაში და გავითვალისწინებთ, რომ $360°=2\pi$ რად, მივიღებთ:

$$\sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha,\ \cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha,\ k\in Z. \qquad (2)$$



ეს ტოლობები ნიშნავს, რომ სინუსი და კოსინუსი **პერიოდული ფუნქციებია** და მათი პერიოდი 2π-ს ჯერადი რიცხვებია.

დავამტკიცოთ, რომ 2π სინუსისა და კოსინუსის უმცირესი დადებითი პერიოდია.

ის, რომ 2π ამ ფუნქციების პერიოდია, უკვე ვიცით. ვაჩვენოთ, რომ 2π-ზე მცირე დადებითი რიცხვი არ შეიძლება იყოს სინუსის პერიოდი. მართლაც, დავუშვათ, არსებობს ისეთი $0<T<2\pi$ რიცხვი, რომ ყოველი α არგუმენტისთვის $\sin(\alpha+T)=\sin\alpha$. თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $\alpha=\frac{\pi}{2}$, მივიღებთ $\sin(\frac{\pi}{2}+T)=\sin\frac{\pi}{2}=1$. მაგრამ სინუსი 1-ის ტოლი მხოლოდ $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ სახის არგუმენტისათვის ხდება (ახსენი, რატომ), რაც გამორიცხავს $0<T<2\pi$ პირობას.

ანალოგიური მსჯელობით დამტკიცდება, რომ 2π-ზე მცირე დადებითი რიცხვი არ შეიძლება იყოს კოსინუსის პერიოდი. ამ შემთხვევაში $\cos(\alpha+T)=\cos\alpha$ ტოლობაში უნდა ჩავსვათ $\alpha=0$. მივიღებთ $\cos T=\cos 0=1$, ეს ტოლობა კი მხოლოდ მაშინ შესრულდება, როცა $T=2\pi k$, $k\in Z$.

განმარტების თანახმად $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. ამასთან, იმისათვის, რომ წილადს აზრი ჰქონდეს, უნდა მოვითხოვოთ $\cos\alpha\neq 0$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, სახის რიცხვები არ ეკუთვნის ტანგენსის განსაზღვრის არეს.

ცხადია, 2π და მისი ჯერადები ტანგენსისთვისაც იქნება პერიოდი. მაგრამ ტანგენსს აქვს უფრო მცირე პერიოდიც. კერძოდ, ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდია π.

მართლაც, იმის გამო, რომ $P_{\alpha+\pi} = P_{\alpha-\pi}$ და ეს წერტილი P_α წერტილის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha, \qquad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha .$$

ე.ი. $\tan(\alpha \pm \pi) = \dfrac{\sin(\alpha \pm \pi)}{\cos(\alpha \pm \pi)} = \dfrac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha$.

ტანგენსი 0-ის ტოლი მხოლოდ π-ის ჯერად რიცხვებზე ხდება. ამიტომ, π ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდია.

შევნიშნოთ, რომ ტანგენსი ნებისმიერ რიცხვით მნიშვნელობას იღებს.

P_α წერტილი კოორდინატთა სათავიდან 1-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. ეს კი ნიშნავს, რომ ყოველი α არგუმენტისათვის პითაგორას თეორემიდან გამომდინარე, სრულდება ტოლობა:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (3)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\cos\alpha \neq 0$ და მე-3 ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $\cos^2\alpha$-ზე, მივიღებთ:

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \; k \in Z . \qquad (4)$$

მე-3 და მე-4 ფორმულები საშუალებას გვაძლევს ერთ-ერთი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მოცემული მნიშვნელობით გამოვთვალოთ დანარჩენი ორი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობა.

მაგალითი 1. ა) ვიპოვოთ $\cos\alpha$ და $\tan\alpha$, თუ $\sin\alpha = 0{,}6$;

ბ) ვიპოვოთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$.

ამოხსნა. ა) მე-3 ფორმულით $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 0{,}64$, აქედან $\cos\alpha = \pm 0{,}8$; $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm 0{,}75$;

ბ) მე-4 ფორმულით $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{9}$, აქედან $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{3}$;

$\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

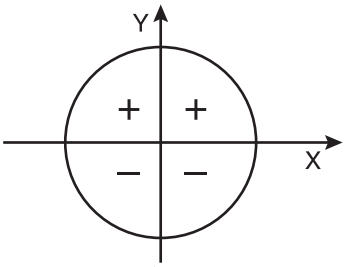
პასუხი. ა) $\cos\alpha = \pm 0{,}8$, $\tan\alpha = \pm 0{,}75$; ბ) $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{3}$, $\sin\alpha = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

ამ მაგალითით დავრწმუნდით, რომ როგორც ა), ისე ბ) შემთხვევაში ნიშნით განსხვავებული ორ-ორი პასუხი მიიღება.

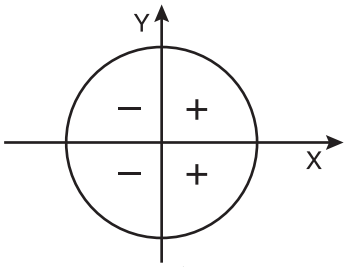
იმისათვის, რომ ასეთ მაგალითებში ცალსახა პასუხები მივიღოთ, უნდა გვქონდეს დამატებითი ინფორმაცია, რომლის საშუალებითაც დავასკვნით ფუნქციის საძიებელი მნიშვნელობის ნიშანს.

მაგალითად, თუ ა) შემთხვევაში მოცემულ პირობასთან ერთად გვეცოდინება, რომ P_α წერტილი ეკუთვნის მე-2 მეოთხედს, იმის გამო, რომ მეორე მეოთხედში cosα უარყოფითია, ±0,8 ნაცვლად პასუხი იქნებოდა –0,8.

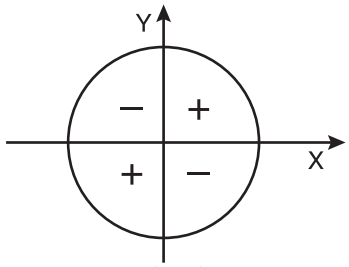
მსგავსი მაგალითების ამოსახსნელად სასარგებლოა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნების ცოდნა. ეს ნიშნები მოცემულია სქემებზე.



სინუსი



კოსინუსი



ტანგენსი

მაგალითი 2. ვიპოვოთ y= f(x) ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი, თუ:

ა) f(x)=sin2x; ბ) f(x)=sin2x+cos3x.

ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ თუ y= f(x) ფუნქციის პერიოდია T, მაშინ y= f(ax+b) ფუნქციის პერიოდი, სადაც a და b მოცემული რიცხვებია, ამასთან a≠0, იქნება $\frac{T}{a}$.

მართლაც,

$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f\left(ax+b+T\right)=f\left(ax+b\right).$$

ა) როგორც ვიცით, y=sinx ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ამიტომ y=sin2x ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი იქნება 2π:2=π.

ბ) y=sin2x ფუნქციის პერიოდია π და მისი ჯერადი რიცხვები, ხოლო y=cos3x ფუნქციის პერიოდია $\frac{2\pi}{3}$ და მისი ჯერადი რიცხვები. sin2x-ისა და cos3x-ის პერიოდის უმცირესი საერთო ჯერადი, ანუ უმცირესი დადებითი რიცხვი იქნება 2π. ე.ი. 2π არის როგორც y=sin2x ფუნქციის, ისე y=cos3x ფუნქციის პერიოდი, ამიტომ 2π იქნება მათი ჯამის უმცირესი დადებითი პერიოდი.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ ფუნქციას ეწოდება ლუწი ფუნქცია? კენტი ფუნქცია?
2. რა სიმრავლეა სინუსის განსაზღვრის არე? ტანგენსის განსაზღვრის არე?
3. რა სიმრავლეა სინუსის მნიშვნელობათა სიმრავლე? ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლე?
4. რომელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია კენტი? ლუწი?
5. რა არის კოსინუსის უმცირესი დადებითი პერიოდი? ტანგენსის?
6. რომელ მეოთხედებშია ტანგენსი დადებითი? კოსინუსი?

სავარჯიშოები

1. იპოვე:

ა) $\sin 2{,}5\pi$; ბ) $\sin 5\pi$; გ) $\sin(-2{,}5\pi)$;

დ) $\sin 20\pi$; ე) $\sin\frac{7\pi}{3}$; ვ) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$;

ზ) $\cos 4{,}5\pi$; თ) $\cos(-4{,}5\pi)$; ი) $\cos\frac{13\pi}{6}$;

კ) $\cos\frac{11\pi}{6}$; ლ) $\cos\frac{5\pi}{3}$; მ) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$;

ნ) $\tan 3\pi$; ო) $\tan\frac{5\pi}{4}$; პ) $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$;

ჟ) $\tan\frac{4\pi}{3}$; რ) $\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; ს) $\tan\frac{19\pi}{6}$.

2. მოცემული ფუნქციებიდან რომელია კენტი? ლუწი? არც კენტი და არც ლუწი?

ა) $y=x^3+\sin x$; ბ) $y=2\cos x+\sin^2 x$;

გ) $y=\frac{\cos x}{\sin^3 x}$; დ) $y=\frac{1+2\sin x}{1-2\cos x}$.

3. პერიოდულია თუ არა ფუნქცია:

ა) $y=x-\sin x$? ბ) $y=2\cos x+\sin x$?

გ) $y=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$? დ) $y=\frac{2-\sin x}{1+2\cos x}$?

4. იპოვე მოცემული ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $y=\sin 5x$; ბ) $y=\cos 4x$; გ) $y=\tan 3x$;

დ) $y=\sin 0{,}5x$; ე) $y=\tan(2x+3)$; ვ) $y=\sin x+\tan x$.

5. იპოვე მოცემული ფუნქციის პერიოდი:

ა) $f(x)=\sin(5-7x)$; ბ) $f(x)=5\sin\frac{1-4x}{3}$;

გ) $f(x)=\cos\left(5-\frac{x}{3}\right)$.

6. იპოვე $\cos\alpha$ და $\tan\alpha$, თუ $\sin\alpha=-\frac{5}{13}$ და $\pi<\alpha<1{,}5\pi$.

7. იპოვე $\sin\alpha$ და $\tan\alpha$, თუ $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ და $1{,}5\pi<\alpha<2\pi$.

8. იპოვე $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$, თუ $\tan\alpha=-1$ და $0{,}5\pi<\alpha<\pi$.

9. იპოვე $\cos\alpha$, თუ $\sin\alpha=-0{,}4$ და $\tan\alpha>0$.

10. იპოვე $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, თუ $\tan\alpha=\sqrt{15}$.

11. დაადგინე $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, თუ:

ა) $f(x)=2\sin x-1$; ბ) $f(x)=\sin^2x-1$;

გ) $f(x)=2\sin^2x-\cos^2x$; დ) $f(x)=\tan^2x$.

12. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; ბ) $\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\tan\alpha$;

გ) $(1-\sin^2\alpha)\tan^2\alpha$; დ) $(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$;

ე) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; ვ) $\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$;

ზ) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$; თ) $\frac{2\cos^2\alpha-1}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

13. იპოვე ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

ა) $y=\sin5x+\cos4x$; ბ) $y=\cos2x$; გ) $y=|\sin x|$;

დ) $y=\sin2x+\tan4x$; ე) $y=\sin3x$; ვ) $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{3}$;

ზ) $f(x)=\frac{2}{\operatorname{tg}3x}+4\operatorname{tg}2x$; თ) $f(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{2}$.

14. დაადგინე $y=\sin^2x-2\sin x+1$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

15. რომელი ტრიგონომეტრიული ფუნქციაა დადებითი მოცემულ მეოთხედში: ა) მე-2? ბ) მე-3? გ) მე-4?

16. იპოვე:

ა) $\sin400°$, თუ $\sin40°=a$;

ბ) $\cos380°$, თუ $\cos20°=b$;

გ) $\tan230°$, თუ $\tan40°=c$.

შესაძლებელია?

რაიმე α არგუმენტისათვის შესრულდეს უტოლობა $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha>1$?

15-16

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- რიცხვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები

1.7 დაყვანის ფორმულები

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **დაყვანის ფორმულების ჩამოყალიბება და დასაბუთება;**
- **დაყვანის ფორმულების გამოთვლების ჩასატარებლად გამოყენება.**

შევისწავლოთ ფორმულები, რომელთა გამოყენებით ნებისმიერი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლა შეიძლება $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში მოთავსებული არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლაზე დავიყვანოთ. ამ ფორმულებს **დაყვანის ფორმულები** ეწოდება. ეს ფორმულებია:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\tan\alpha};$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha};$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\ \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha;$$

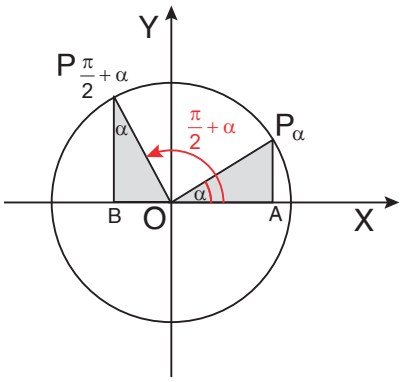
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\ \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{\tan\alpha};$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}.$$

დავამტკიცოთ, მაგალითად 1-ელი სტრიქონის ფორმულები იმ შემთხვევში, როცა α არგუმენტი აკმაყოფილებს $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ პირობას.

განმარტების თანახმად, ნახაზზე მოცემული P_α წერტილის კოორდინატებია $\cos\alpha$ და $\sin\alpha$, ხოლო $P_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ წერტილის კოორდინატებია $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ და $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.



$P_\alpha AO$ და $OBP_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$ სამკუთხედების ტოლობიდან მივიღებთ:

$OB=AP_{\alpha'}$, ანუ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ და $BP_{\frac{\pi}{2}+\alpha}=AO$, ანუ

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\frac{1}{\tan\alpha}.$$

დაყვანის ფორმულაში ტოლობის მარცხენა ნაწილს დასაყვანი ფუნქცია ვუწოდოთ, ხოლო მარჯვენას – დაყვანილი. პირველ ექვს ტოლობებზე დაკვირვების შედეგად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი დასკვნა:

- თუ დასაყვანი ფუნქციის არგუმენტი $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ -ს ან $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ -ს შეიცავს (ანუ $\frac{\pi}{2}$ კენტჯერ არის აღებული), მაშინ დასაყვანი ფუნქცია იცვლება: კოსინუსი იცვლება სინუსით, სინუსი – კოსინუსით, ხოლო ტანგენსი –1-ის ტანგენსთან შეფარდებით.
- თუ დასაყვანი ფუნქციის არგუმენტია $\pi\pm\alpha$, მაშინ დასაყვანი ფუნქცია არ იცვლის სახელწოდებას;
- დაყვანილი ფუნქციის ნიშნის დასადგენად უნდა ჩავთვალოთ, რომ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ და დაყვანილ ფუნქციას დავუწეროთ დასაყვანი ფუნქციის ის ნიშანი, რომელიც მას აქვს მოცემული არგუმენტისთვის.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ:

ა) $\cos\frac{7\pi}{6}$; ბ) $\sin 10,75\pi$; გ) $\tan 23\frac{2}{3}\pi$.

ამოხსნა.

ა) $\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ბ) $\sin 10,75\pi=\sin\left(10\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

გ) $\tan 23\frac{2}{3}\pi=\tan\left(23\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=-\sqrt{3}.$

დაყვანის ფორმულებით გრადუსებში მოცემული არგუმენტის შემთხვევაშიც შეგვიძლია ვისარგებლოთ. ამ დროს უნდა გავითვალისწინოთ, რომ π რადიანი =180°.

მაგალითი 2. დავიყვანოთ მახვილი კუთხის ფუნქციაზე:

ა) $\cos 1640°$; ბ) $\sin 140°$; გ) $\tan 280°$.

ამოხსნა.

ა) კოსინუსის პერიოდულობის თვისების თანახმად:

$\cos 1640°=\cos(360°\cdot 4+200°)=\cos 200°.$

დაყვანის ფორმულის გამოყენებით ვწერთ:

$\cos 200°=\cos(180°+20°)=-\cos 20°.$

ბ) $\sin 140°=\sin(180°-40°)=\sin 40°.$

გ) $\tan 500°=\tan(2\cdot 180°+140°)=$

$=\tan 140°=\tan(180°-40°)=-\tan 40°.$

როცა დასაყვანი ფუნქცია ლუწ ხარისხშია, მის ნიშანზე ზრუნვა აღარ გვიწევს.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ: ა) $\sin^2 240°$; ბ) $\sin^4(-1320°)$.

ამოხსნა.

ა) $\sin^2 240° = \sin^2(180°+60°) = \sin^2 60° = \frac{3}{4}$.

ბ) $\sin^4(-1320°) = \sin^4 1320° = \sin^4(360°\cdot 3+240°) =$

$= \sin^4 240° = \sin^4(180°+60°) = \sin^4 60° = \frac{9}{16}$.

მაგალითი 4. გავამარტივოთ გამოსახულება:

$$\frac{\tan(180°-\alpha)\cos(180°-\alpha)\tan(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)}.$$

ამოხსნა.

$$\frac{\tan(180°-\alpha)\cos(180°-\alpha)\tan(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)} = \frac{-\tan\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot\frac{1}{\tan\alpha}}{\cos\alpha} = 1.$$

პასუხი: 1.

უპასუხე კითხვებს:

1. რაში ვიყენებთ დაყვანის ფორმულებს?
2. რა შემთხვევაში არ შეიცვლება დასაყვანი ფუნქცია დაყვანის შემდეგ?
3. როგორ უნდა დავადგინოთ დაყვანის ფორმულების გამოყენებისას ფუნქციის ნიშანი?

სავარჯიშოები

1. დაიყვანე α არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე:

ა) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; ბ) $\sin(\pi-\alpha)$;

გ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; დ) $\cos(3\pi+\alpha)$;

ე) $\tan(3{,}5\pi+\alpha)$; ვ) $\tan(3\pi-\alpha)$.

2. დაიყვანე α არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე:

ა) $\sin(360°-\alpha)$; ბ) $\sin(270°-\alpha)$;

გ) $\cos(180°-\alpha)$; დ) $\cos(90°+\alpha)$;

ე) $\tan(360°-\alpha)$.

3. დაიყვანე α არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციაზე:

ა) $\sin(\alpha+90°)$; ბ) $\cos(\alpha-\pi)$; გ) $\tan(\alpha-360°)$;

დ) $\sin^2(\alpha-\pi)$; ე) $\tan^2(\alpha-270°)$.

4. გაამარტივე გამოსახულება:

$\sin(\alpha-90°)-\cos(180°-\alpha)+\tan(180°-\alpha)$.

5. მოცემული ფუნქცია დაიყვანე $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ შუალედში მოთავსებული არგუმენტის ფუნქციაზე:

ა) $\sin 0,8\pi$; ბ) $\cos 3,1\pi$; გ) $\tan 4,7\pi$; დ) $\tan 2,8\pi$.

6. დაიყვანე ფუნქცია 45°-ზე ნაკლები დადებითი კუთხის ფუნქციაზე:

ა) $\sin 485°$; $\sin 875°$; $\sin(-5108°)$;

ბ) $\cos 1025°$; $\cos(-1694°)$; $\cos(-815°)$;

გ) $\tan 869°$; $\tan(-1759)°$; $\tan(-917°)$.

7. იპოვე [0; 360°) შუალედში მოთავსებული ის არგუმენტები, რომელთა სინუსია:

ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) -1.

8. იპოვე $[0;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ის არგუმენტები, რომელთა კოსინუსია:

ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) -1.

9. იპოვე $[0;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ის არგუმენტები, რომელთა ტანგენსია:

ა) $\sqrt{3}$; ბ) 0; გ) -1.

10. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\sin(180°-\alpha)\cdot\tan(90°-\alpha)$; ბ) $\frac{\tan(180°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)}$;

გ) $\frac{\tan(180°-\alpha)}{\cos(180°+\alpha)}$; დ) $\frac{\cos^2(90°-\alpha)-1}{\cos(180°-\alpha)}$;

ე) $\sin(90°-\alpha)+\sin(90°+\alpha)+2\cos(180°-\alpha)$;

ვ) $\cos(90°-\alpha)+\cos(90°+\alpha)+\cos(180°+\alpha)$;

ზ) $\sin(180°-\alpha)+\sin(270°+\alpha)+2\cos(360°-\alpha)$;

თ) $\cos(180°-\alpha)\cdot\sin(90°+\alpha)\cdot\tan(180°-\alpha)\cdot\frac{1}{\tan(90°+\alpha)}$.

11. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha-3\pi)}{\tan\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}$;

ბ) $\sin(\alpha-15\pi)\cos(\alpha+\pi)\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

გ) $\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\tan(\pi-\alpha)}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\cdot\sin(\pi-\alpha)}$; დ) $\dfrac{2\sin(-3825^\circ)-\sin 1215^\circ}{\cos(-1260^\circ)}$.

12. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $4\sin 120^\circ\cdot\tan 300^\circ$; ბ) $8\sin 510^\circ\cdot\cos(-300^\circ)\cdot\tan 240^\circ$;

გ) $2\sin^2 225^\circ-\dfrac{\tan 405^\circ}{\tan 330^\circ}$; დ) $\dfrac{10}{\tan 315^\circ}\cdot\sin(-150^\circ)\cdot\cos 225^\circ$;

ე) $\dfrac{\cos(-120^\circ)}{\cos 300^\circ}-\dfrac{\tan 210^\circ\cdot\sin 315^\circ}{\cos 180^\circ}$.

13. გამოთვალე გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა:

ა) $\dfrac{\tan(-150^\circ)\cdot\cos(-210^\circ)\cdot\cos(-60^\circ)}{\frac{1}{\tan(-240^\circ)}\cdot\sin(-330^\circ)}$; ბ) $\dfrac{2\sin 660^\circ-\sin 630^\circ}{\frac{3}{\tan 1020^\circ}+2\cos(-660^\circ)}$;

გ) $\sin(450^\circ+\beta)-\sin(270^\circ-\beta)-\sin(450^\circ-\beta)+\sin(270^\circ+\beta)$.

14. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\dfrac{\cos(180^\circ-\alpha)\cdot\tan(90^\circ-\alpha)\cdot\tan(180^\circ-\alpha)}{\tan\alpha\cdot\sin(90^\circ+\alpha)\cdot\tan(90^\circ+\alpha)}$; ბ) $\dfrac{2\sin 3290^\circ-\sin 1490^\circ}{2\tan 585^\circ}$.

15. დაამტკიცე ტოლობა:

ა) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(3\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\sin(3\pi+\alpha)=0$;

ბ) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\dfrac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\tan\alpha$;

გ) $\dfrac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\tan(180^\circ+\alpha)}\cdot\dfrac{1}{\tan(90^\circ+\alpha)}\cdot\dfrac{1}{\tan(90^\circ-\alpha)}\cdot\dfrac{\cos(360^\circ-\alpha)}{\sin(-\alpha)}=\sin\alpha$;

დ) $\sin(\alpha-\pi)+\tan(\alpha-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\tan\alpha$;

ე) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{\tan(\pi-\alpha)}}=-1$.

16. გამოთვალე:

ა) $\cos^2\dfrac{77\pi}{4}$; ბ) $\sin^2\left(7\pi+\frac{\pi}{6}\right)$; გ) $\tan^2\left(3{,}5\pi-\frac{\pi}{3}\right)$.

17. მოცემულია: $\sin(180°+\alpha)=-\frac{1}{2}$, გამოთვალე:

ა) $\sin^2(270°+\alpha)$; ბ) $\cos^2(90°+\alpha)$.

18. გაამარტივე გამოსახულება:

ა) $\sin^2(4\pi-\alpha)+\sin^2(4{,}5\pi+\alpha)$; ბ) $1+\cos(7\pi+\alpha)+\cos(\alpha-4\pi)$;

გ) $\sin^2(5\pi+\alpha)+2\sin(2{,}5\pi+\alpha)\cdot\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\cos^2(4\pi-\alpha)$;

დ) $\sin^2(\alpha-270°)+\cos^2(270°+\alpha)-2\sin(180°-\alpha)\cdot\sin(90°+\alpha)$.

19. იპოვე:

ა) $\sin207°$ თუ $\sin27°=a$; ბ) $\cos304°$ თუ $\sin34°=a$;

გ) $\tan106°$ თუ $\sin16°=a$; დ) $\cos\alpha$ თუ $\cos(180°-\alpha)=a$.

20. დაამტკიცე ტოლობა:

ა) $\sin(45°+\alpha)=\cos(45°-\alpha)$;

ბ) $\cos(45°+\alpha)=\sin(45°-\alpha)$;

გ) $\sin(60°+\alpha)=\cos(30°-\alpha)$.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- დაყვანის ფორმულები და მათი გამოყენება გამოთვლებსა და გამოსახულებათა გამარტივებაში

აბა, სცადე!

გამოთვალე:

ა) $\tan20°+\tan40°+\ldots+\tan160°+\tan180°$;

ბ) $\tan10°\cdot\tan20°\cdot\tan30°\cdot\tan40°\cdot\tan50°\cdot\tan60°\cdot\tan70°\cdot\tan80°$

პრაქტიკული სამუშაო (ექსპერიმენტი)

გაინტერესებს, ალბათ, რამდენად ზუსტ შედეგს იძლევა მანძილების გამოთვლის სახელმძღვანელოში აღწერილი მეთოდები. ამისათვის გთავაზობთ ჩაატარო ესპერიმენტი.

- შეარჩიე ობიექტი, რომლამდეც უნდა გამოითვალო მანძილი:
  - ა) ტრიგონომეტრიის გამოყენებით;
  - ბ) უშუალოდ, ადგილზე გაზომვით.
- გასაზომად დაგჭირდება სიგრძის საზომი ხელსაწყო და ხელსაწყო, რომლითაც უნდა დაადგინო გამოთვლებისათვის საჭირო კუთხეების ზომები.
- კუთხის საზომი ხელსაწყო შენ თვითონ დაამზადე. მისი კონსტრუქციის მოფიქრებაში, საჭიროების შემთხვევაში, დაიხმარე ხელოვნური ინტელექტი.
- შეასრულე საჭირო გამოთვლები.
- შეადარე ორივე ხერხით გაზომვების შედეგები და გამოთვალე მათ შორის ცდომილება. ახსენი ცდომილების მიზეზი.

პირველი თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. გამოთვალე:

ა) $\sin 60^\circ+\sin 120^\circ$; ბ) $\cos 40^\circ+\cos 140^\circ+\tan 135^\circ$

გ) $(\tan 30^\circ+\tan 60^\circ)^2$; დ) $\sin(-240^\circ)+\cos(-150^\circ)$

ე) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}$; ვ) $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}$;

ზ) $\frac{\tan^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\tan^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; თ) $\frac{\sin^2 140^\circ+\sin^2 130^\circ-\cos^2 160^\circ}{1-\sin^2 250^\circ}$.

2. იპოვე: ა) $\sin\alpha$, თუ $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ და $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

ბ) $\tan\alpha$, თუ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ და $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3. დაამტკიცე ტოლობა:

ა) $\sin(\beta-\pi)\tan(\beta+\pi)+\frac{1}{\cos(\beta-2\pi)}=\cos\beta$;

ბ) $\frac{\sin(2\pi-\alpha)\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\tan(\pi+\alpha)\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=1$;

გ) $\frac{\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\sin(270^\circ-\alpha)\cdot\tan(90^\circ-\alpha)}{\tan(270^\circ+\alpha)\cdot\sin(90^\circ+\alpha)\cdot\tan(360^\circ-\alpha)}=-\cos\alpha$;

დ) $\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}+\frac{\tan(\pi+\alpha)}{\tan(\pi-\alpha)}+\tan(\pi-\alpha)+\cos 0=0$.

4. გამოთვალე სამკუთხედის ფართობი a და b გვერდებითა და მათ შორის მდებარე α კუთხით, თუ:

ა) a=3 სმ, b=4 სმ, $\alpha=30^\circ$; ბ) a=5 სმ, b=8 სმ, $\alpha=45^\circ$;

გ) a=6 სმ, b=10 სმ, $\alpha=60^\circ$; დ) a=14 სმ, b=7 სმ, $\alpha=90^\circ$;

ე) a=11 სმ, b=8 სმ, $\alpha=150^\circ$; ვ) a=16 სმ, b=5 სმ, $\alpha=135^\circ$.

5. გამოთვალე $\sin\alpha$, სადაც α სამკუთხედის a და b გვერდებს შორის კუთხე, ხოლო S სამკუთხედის ფართობია, თუ:

ა) a=4 სმ, b=5 სმ, S=10 სმ^2; ბ) a=7 სმ; b=9 სმ; S=21 სმ^2;

გ) a= $\sqrt{5}+1$ სმ; b= $\sqrt{5}-1$ სმ; S=2სმ^2.

6. გამოთვალე რომბის ფართობი, თუ მისი გვერდი 10 სმ, ხოლო გევრდებს შორის კუთხეა:

ა) 30°; ბ) 60°; გ) 120°; დ) 150°.

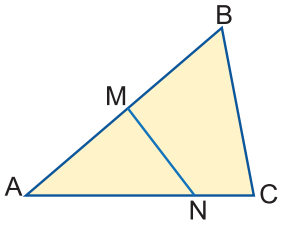
7. გამოთვალე პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი გვერდებია 7 სმ და 8 სმ, ხოლო გევრდებს შორის კუთხე:

ა) 30°; ბ) 45°; გ) 90°; დ) 150°.

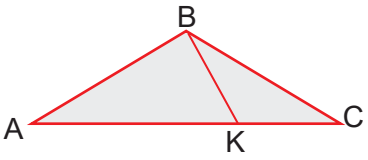
შესაძლებელია?

პერიოდულ ფუნქციას არ ჰქონდეს უმცირესი დადებითი პერიოდი?

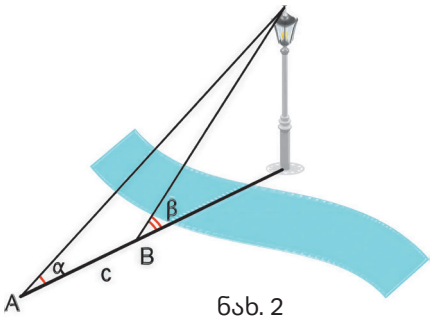




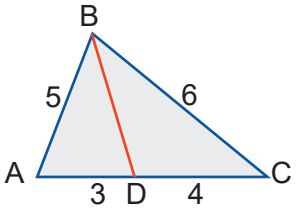
ნახ. 1ა



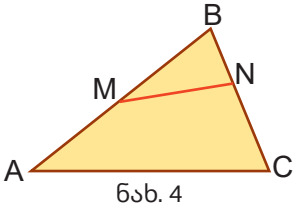
ნახ. 1ბ



ნახ. 2



ნახ. 3



ნახ. 4

8. გამოთვალე სამკუთხედის უდიდესი კუთხის კოსინუსი, თუ მისი გვერდებია:
ა) 3სმ, 4სმ, 5სმ; ბ) 4 სმ, 5სმ, 7სმ;
გ) 6სმ, 8სმ, 9სმ; დ) $\sqrt{2}$ სმ, 2 $\sqrt{2}$ სმ, 4სმ.

9. დაადგინე, მახვილკუთხაა, მართკუთხაა თუ ბლაგვკუთხაა სამკუთხედი, თუ მისი გვერდებია:
ა) 8 სმ, 15 სმ, 17 სმ; ბ) 5 სმ, 5 სმ, 6 სმ;
გ) 7 სმ, 11 სმ, 12 სმ; დ) 6 სმ, 10 სმ, 12 სმ.

10. ლუკამ გაზომა თავისი ჩრდილი, რაც 200 სმ აღმოჩნდა. ლუკას სიმაღლეა 160 სმ. რა სიგრძის ჩრდილი ექნებოდა ამ დროს ლუკას ეზოში მდგარ 4 მ სიმაღლის ფიჭვის ხეს?

11. სამკუთხედის გვერდებია 3 სმ, 4 სმ და 6 სმ. გამოთვალე უდიდეს გვერდზე დაშვებული მედიანის სიგრძე.

12. ABC სამკუთხედის ფართობია 18 სმ^2. AB და AC გვერდებზე აღებულია M და N წერტილები ისე, რომ AM=MB, AN:NC=2:1 (ნახ.1 ა). გამოთვალე AMN სამკუთხედის ფართობი.

13. 1-ელ ბ ნახაზზე მოცემულ სამკუთხედში AB=BC. დაამტკიცე, რომ ABK და BKC სამკუთხედებზე ტოლი წრეწირები შემოიხაზება.

14. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. გამოთვალე იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც გადის მახვილი კუთხეების წვეროებსა და დიდი კათეტის შუა წერტილზე.

15. პარალელოგრამის დიაგონალი, რომლის სიგრძე d-ს ტოლია, გვერდებთან α და β კუთხეებს ადგენს. იპოვე პარალელოგრამის გვერდები.

16. გამოთვალე მდინარის გაღმა მდგომი ბოძის სიმაღლე, თუ A წერტილიდან ბოძი მოჩანს α კუთხით, B წერტილიდან – β კუთხით, ხოლო A-დან B-მდე მანძილი c მეტრია (ნახ.2).

17. ჩამოაყალიბე და დაამტკიცე პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემა.

18. მე-3 ნახაზის მიხედვით იპოვე BD მონაკვეთის სიგრძე.

19. სამკუთხედის გვერდებია 5 მ, 7 მ და 8 მ. გამოთვალე სამკუთხედის იმ ბისექტრისის სიგრძე, რომელიც უდიდესი კუთხის წვეროზეა გავლებული.

20. ABC სამკუთხედში (ნახ.4) AB=8 სმ, BC=5 სმ, AC=7 სმ. გამოთვალე MN მონაკვეთის სიგრძე, სადაც M წერტილი AB მონაკვეთის შუა წერტილია, ხოლო N$\in$BC და BN=2 სმ.



აბა, სცადე!

იპოვე x-ის ყველა რიცხვითი მნიშვნელობა, თუ x, x+1, x+2 ბლაგვკუთხა სამკუთხედის გვერდებია.

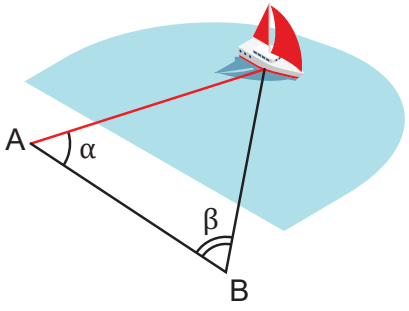
21. ABC სამკუთხედში AB=13 სმ, BC =20 სმ, ხოლო BK სიმაღლე 12 სმ-ია. გამოთვალე B კუთხის კოსინუსი. განიხილე ორი შესაძლო შემთხვევა.

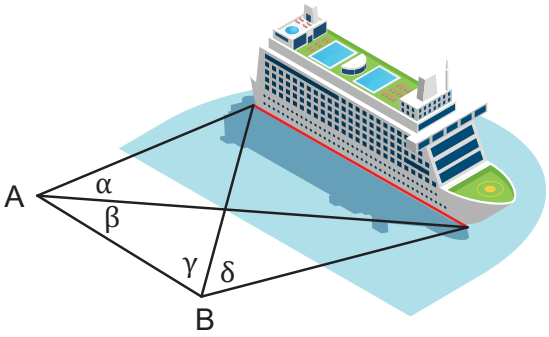
22. ნავსადგურიდან ერთდროულად გავიდა ორი გემი. ერთი გემი, რომელიც 20კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობდა, გაემართა ჩრდილოეთით, ხოლო მეორე, რომელიც 25კმ სიჩქარით მოძრაობდა – ჩრდილო-აღმოსავლეთით. რა მანძილი იქნება გემებს შორის მათი გასვლიდან 2 საათში?

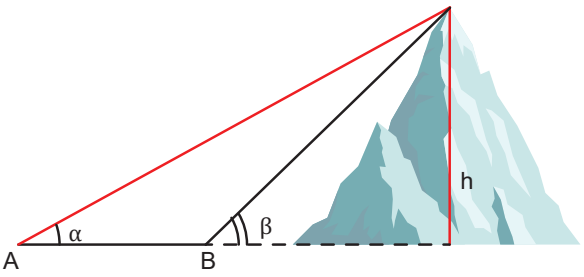
23. დაამტკიცე სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა: $S_{\Delta}=\frac{2}{3}m_1m_2\cdot\sin\alpha$, სადაც m_1 და m_2 მედიანები, ხოლო α მედიანებს შორის კუთხეა.

წყვილებში სამუშაო (პროექტი)

„პრაქტიკული გაზომვები ტრიგონომეტრიის გამოყენებით"







მოცემულია სამი სქემატური ნახაზი, რომელთაგან ერთზე ნაპირიდან ზღვაში მყოფ იახტამდე მანძილი, მეორე შემთხვევაში – გემის სიგრძე, ხოლო მესამე შემთხვევაში – მწვერვალამდე მანძილი და მწვერვალის სიმაღლეა გამოსათვლელი.

დავალება:

1. ნახაზებზე მოცემული თითოეული შემთხვევისთვის სიტყვიერად აღწერეთ საძიებელი სიდიდეების პოვნის ეტაპები და გამოსახეთ ეს სიდიდეები ნახაზზე მოცემული სიდიდეების საშუალებით (ნახაზებზე მოცემულად ითვლება AB მონაკვეთი და მასთან მდებარე კუთხეები);
2. მიღებული შედეგები გამოიყენეთ პრაქტიკული გაზომვებისათვის: გაზომვები ჩაატარეთ თქვენთვის მოხერხებული სხვადასხვა ობიექტის შემთხვევაში (მაგალითად, მახლობლად მდგომ ობიექტამდე მანძილი, ხის ან შენობის სიმაღლე, უახლოესი გორაკის ან მთის სიმაღლე და სხვა). შეეცადეთ, რომ ჩატარებული გაზომვები მოიცავდეს მოცემული ნახაზების სამივე შემთხვევას.
3. ნაშრომი გააფორმეთ და მოამზადეთ საპრეზენტაციოდ. ნაშრომს დაურთეთ თქვენ მიერ ჩატარებული გამოთვლები, ნახაზები და გაზომილი ობიექტების სურათები.



ჩვენი წელთაღრიცხვის პირველ საუკუნეში ალექსანდრიაში ცხოვრობდა ბერძენი მეცნიერი, რომელმაც უამრავ გამოგონებასთან ერთად მოიფიქრა ფორმულა, რომლის საშუალებით სამკუთხედის მოცემული a, b და c გვერდებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ სამკუთხედის ფართობი:

$$S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

სადაც p სამკუთხედის პერიმეტრის ნახევარია.

$$p=\frac{a+b+c}{2}.$$

ამ ფორმულას მისი გამომგონებლის – ჰერონის სახელი ეწოდა. ეს ფორმულა ამარტივებს ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნას.

აბა, სცადე!

აღწერე საფეხურები, რომლითაც ჰერონის ფორმულის გამოყენებით გამოითვლი

ა) სამკუთხედის კუთხის სინუსს;

ბ) სამკუთხედის სიმაღლეს.

ვთქვათ, მოცემულია სამკუთხედის სამივე გვერდი და გვინდა ამ სამკუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსების გამოთვლა.

ამ ამოცანის ჰერონის ფორმულის გამოყენებით ამოხსნას ნახაზიც კი არ სჭირდება. მივყვეთ ამოხსნის ნაბიჯებს:

პირველი ნაბიჯი: ჰერონის ფორმულით გამოვთვალოთ სამკუთხედის ფართობი.

მეორე ნაბიჯი: გამოთვლილი ფართობი ჩავსვათ ფართობის გამოსათვლელ იმ ფორმულებში, რომლებშიც ჩახაზული და შემოხაზული წრის რადიუსები მონაწილეობენ:

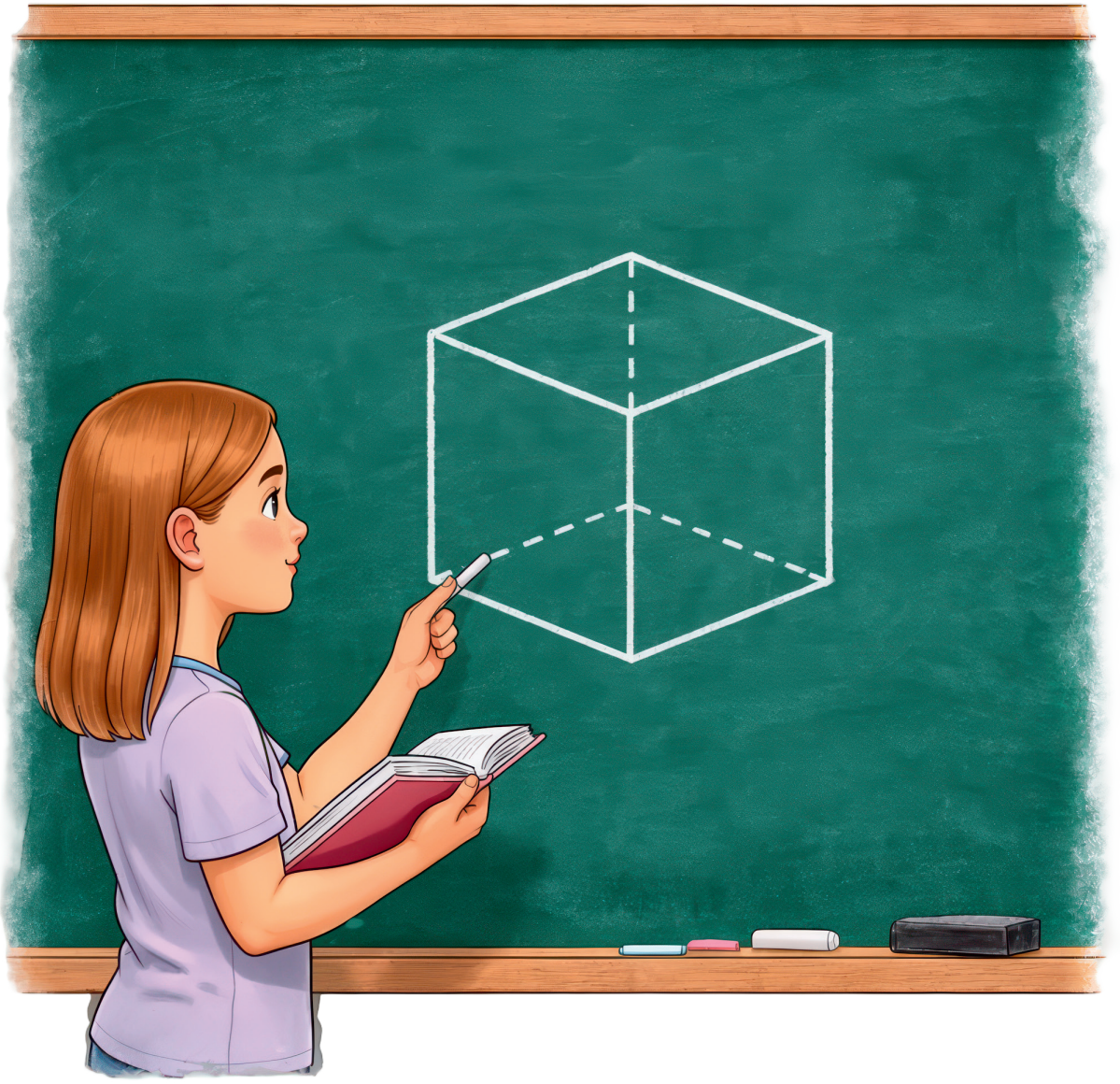
$$S_{\triangle}=pr,\quad S_{\triangle}=\frac{abc}{4R}.$$

მესამე ნაბიჯი: მიღებული ტოლობებიდან გამოვსახოთ საძიებელი სიდიდეები:

$$r=\frac{S_{\triangle}}{p},\quad R=\frac{abc}{4S_{\triangle}}.$$

შენიშვნა: ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა $S_{\triangle}=\frac{abc}{4R}$ მიიღება $S_{\triangle}=\frac{ab\sin C}{2}$ ფორმულაში sinC -ს (სინუსების თეორემიდან გამომდინარე), მისი ტოლი $\frac{c}{2R}$ -ით ჩანაცვლებით.

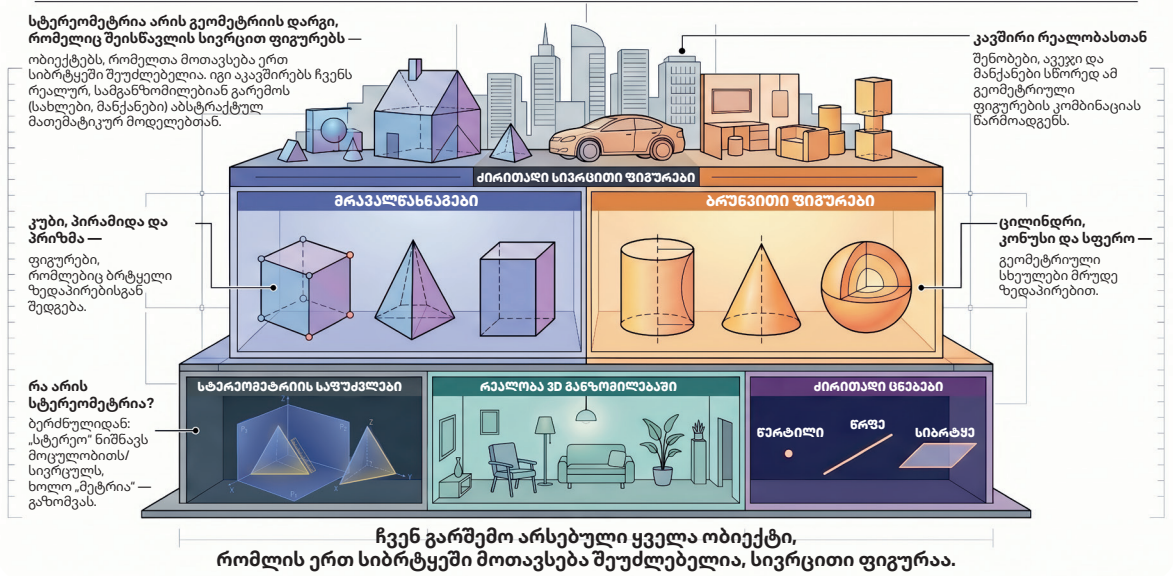
თავი 2. სტერეომეტრიის საწყისები



ამ თავში ისწავლი:

- სტერეომეტრიის ძირითად ცნებებსა და მათ შორის მიმართებებს;
- წრფეთა ურთიერთმდებარეობას სივრცეში;
- წრფისა და სიბრტყის პარალელობისა და მართობულობის პირობებს;
- წრფეებს შორის და წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხეებს;
- სიბრტყეთა პარალელობისა და მართობულობის პირობებს;
- ორწახნაგა კუთხეს და მის ხაზოვან კუთხეს;
- კუთხეს გადამკვეთ სიბრტყეთა შორის.

სტერეომეტრია: სამგანზომილებიანი სამყაროს მეცნიერება



ჩვენ გარშემო არსებული ყველა ობიექტი, რომლის ერთ სიბრტყეში მოთავსება შეუძლებელია, სივრცითი ფიგურაა.

ჩვენი რეალური სამყარო სამგანზომილებიანია. ჩვენ გარშემო არსებული ობიექტებიც – სახლები, მანქანები, მერხები, სკამები და საერთოდ ყველფერი, რისი ერთ სიბრტყეში მოთავსებაც შეუძლებელია, სამგანზომილებიანი ანუ სივრცითი ფიგურებია. სივრცითია ნახაზზე მოცემული შენთვის ცნობილი ფიგურები. გაიხსენე ამ ფიგურების სახელები.

სივრცით ფიგურებს სტერეომეტრია შეისწავლის. სიტყვა „სტერეომეტრია“ ბერძნული წარმოშობისაა. „სტერეო“ ნიშნავს მოცულობითს, სივრცულს, „მეტრია“ კი გაზომვას.

ეს თავი სტერეომეტრიის საწყის ცნებებსა და ამ ცნებებს შორის მიმართებების შესწავლას ეძღვნება.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

- სივრცეში წრფეთა განლაგების შემთხვევათა დახასიათებას;
- პარალელურ, გადამკვეთ და აცდენილ წრფეთა ამოცნობას;
- აცდენილ წრფეთა შორის კუთხის გაზომვას;
- სიბრტყის პარალელური, მართობული და დახრილი წრფეების ამოცნობას და დახასიათებას;
- წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის გაზომვას;
- მოცემული სტერეომეტრიული ნახაზის წაკითხვას და გამოყენებას;
- ამოცანის შესაბამისი სტერეომეტრიული ნახაზის შედგენას და გამოყენებას;
- სამი მართობის თეორემის მართი კუთხის ამოსაცნობად გამოყენებას;
- სამი მართობის თეორემის გამოყენებით სიბრტყის გარეთ მოცემული წერტილიდან სიბრტყეში მოცემულ წრფემდე უმოკლესი მანძილის პოვნას;
- პარალელურ, გადამკვეთ და მართობულ სიბრტყეთა ამოცნობას და დახასიათებას;
- ორწახნაგა კუთხის გაზომვას;
- ორ გადამკვეთ სიბრტყეს შორის კუთხის დადგენას;
- დახრილი და გეგმილი ფიგურების ფართობთა დაკავშირებას;
- პრაქტიკულ ამოცანებში სტერეომეტრიის ცნებათა და დებულებათა გამოყენებას.

2.1 წრფეები და სიბრტყეები სივრცეში

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **სივრცეში წრფეთა განლაგების დახასიათება;**
- **აცდენილ წრფეთა ამოცნობა;**
- **აცდენილ წრფეთა შორის კუთხის განმარტება და გაზომვა;**
- **წრფისა და სიბრტყის პარალელობის ნიშნის ჩამოყალიბება;**
- **სიბრტყეთა პარალელობის ნიშნის ჩამოყალიბება.**

წერტილი, წრფე და სიბრტყე სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებებია. წერტილებს დიდი ლათინური ასოებით, წრფეებს პატარა ლათინური ასოებით, ხოლო სიბრტყეებს ბერძნული ასოებით აღნიშნავენ.

ძირითად ცნებებს ერთმანეთთან გარკვეული გამონათქვამებით, ე.წ. აქსიომებით, აკავშირებენ. მაგალითად, ასეთი აქსიომებია:

- სიბრტყეზე მდებარე ორ წერტილზე გაივლება ერთადერთი წრფე და ამ წრფის ყველა წერტილი ამავე სიბრტყეს ეკუთვნის;
- ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილზე ერთადერთი სიბრტყე გაივლება.

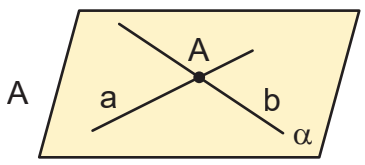
ამ აქსიომებიდან გამომდინარე, წრფეებს ხშირად მასზე მდებარე ორი წერტილით, ხოლო სიბრტყეს მასზე მდებარე სამი წერტილითაც აღნიშნავენ. მაგალითად, AB წრფე ნიშნავს A და B წერტილებზე გავლებულ წრფეს, ხოლო ABC სიბრტყე – A, B და C წერტილებზე გავლებულ სიბრტყეს.

ორ წრფეს სივრცეში სამი განსხვავებული განლაგება შეიძლება ჰქონდეს.

1-ელ ნახაზზე α სიბრტყეში მდებარე a და b წრფეები A წერტილში იკვეთება. ასეთ წრფეებს **გადამკვეთი** წრფეები ეწოდება. მაშასადამე, გადამკვეთი წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარე ერთი საერთო წერტილის მქონე წრფეებია.

1-ელ ნახაზზე მოცემული წერტილის, წრფეებისა და სიბრტყის ურთიერთგანლაგება მათემატიკური სიმბოლოებით ასე ჩაიწერება:

$$a \cap b = A,\ a \subset \alpha,\ b \subset \alpha.$$

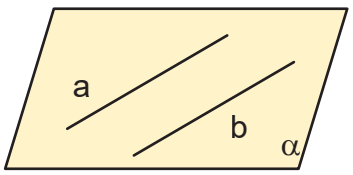


ნახ. 1

მე-2 ნახაზზე α სიბრტყეში მდებარე a და b წრფეები არ კვეთენ ერთმანეთს. ასეთ წრფეებს **პარალელური** წრფეები ეწოდება. მაშასადამე, პარალელურია ერთ სიბრტყეში მდებარე თანაუკვეთი წრფეები.

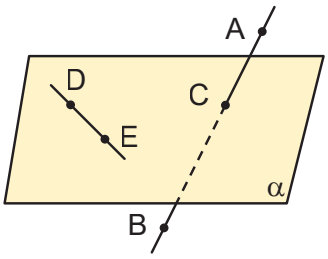
მე-2 ნახაზის მიხედვით, პარალელური წრფეების განმარტების მათემატიკური ჩანაწერია:

$$a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \cap b = \varnothing \Leftrightarrow a \| b.$$

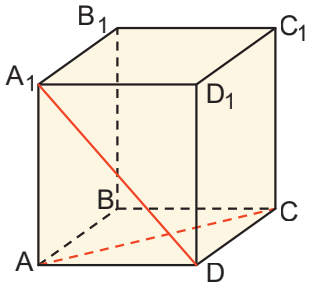


ნახ. 2

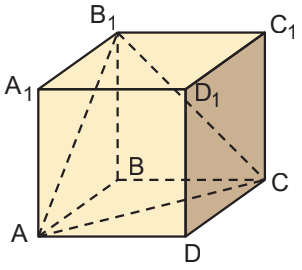
მე-3 ნახაზზე DE წრფე α სიბრტყეში მდებარეობს, AB წრფე კი კვეთს α სიბრტყეს ისეთ C წერტილში, რომელიც DE წრფეს არ ეკუთვნის. ასეთი წრფეები ერთ სიბრტყეში არ თავსდება. მართლაც, თუკი არსებობს სიბრტყე, რომელიც მოიცავს როგორც DE, ისე AB წრფეს, მაშინ ეს სიბრტყე უნდა გადიოდეს D, E და C წერტილებზე. ასეთი ერთადერთი სიბრტყე, ზემოთ მოყვანილი აქსიომის თანახმად, არის α, რომელიც AB წრფეს არ შეიცავს.



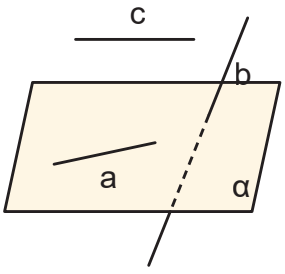
ნახ. 3



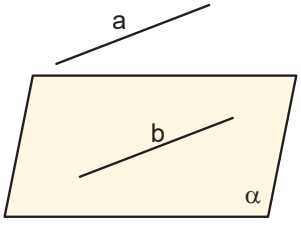
ნახ. 4



ნახ. 5



ნახ. 6



ნახ. 7

ორ წრფეს, რომლებიც ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს, **აცდენილი** წრფეები ეწოდება.

აცდენილი წრფეები არ იკვეთებიან, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, ისინი ერთ სიბრტყეში აღმოჩნდებოდნენ.

წრფეთა განლაგების სამივე განხილულ შემთხვევაში განიმარტება კუთხე ორ წრფეს შორის.

ორ გადამკვეთ წრფეს შორის კუთხე ეწოდება ამ წრფეების მიერ შედგენილი კუთხეებიდან უმცირესს.

ორ პარალელურ წრფეს შორის კუთხე 0-გრადუსიანად ითვლება.

ორ აცდენილ წრფეს შორის კუთხე ეწოდება ამ წრფეების პარალელურ, გადამკვეთ წრფეებს შორის კუთხეს.

იმისათვის, რომ დავადგინოთ კუთხე ორ აცდენილ წრფეს შორის, საკმარისია ერთი მათგანი გადავიტანოთ პარალელურად მეორე წრფის გადაკვეთამდე და გავზომოთ მიღებულ კუთხეებს შორის უმცირესი.

ამოცანა. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი (ნახ. 4). გავიგოთ კუთხე A_1D და AC წრფეებს შორის.

ამოხსნა. A_1D და AC აცდენილი წრფეებია. A_1D წრფე პარალელურია B_1C წრფის. ამიტომ, განმარტების თანახმად, საძიებელი კუთხე იგივე ACB_1 კუთხეა. ეს კუთხე კი 60°-ია, რადგან ACB_1 ტოლგვერდა სამკუთხედია (ნახ. 5).

სივრცეში წრფისა და სიბრტყის შემთხვევაშიც ურთიერთგანლაგების სამი შემთხვევა გვაქვს.

მე-6 ნახაზზე a წრფე დევს α სიბრტყეზე (ან რაც იგივეა, α სიბრტყე გავლებულია a წრფეზე), b წრფე კვეთს α სიბრტყეს, ხოლო c წრფე არ კვეთს α სიბრტყეს, ანუ c წრფე α სიბრტყის **პარალელურია.**

წრფეს ეწოდება სიბრტყის პარალელური, თუ წრფესა და სიბრტყეს საერთო წერტილი არ აქვთ.

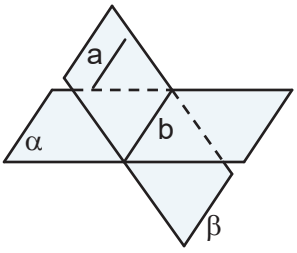
a წრფისა და α სიბრტყის პარალელურობას მოკლედ ასე ჩავწერთ – $a\|\alpha$.

იმისათვის, რომ წრფე სიბრტყის პარალელური იყოს, საკმარისია, ეს წრფე სიბრტყეზე მდებარე რაიმე წრფის პარალელური აღმოჩნდეს.

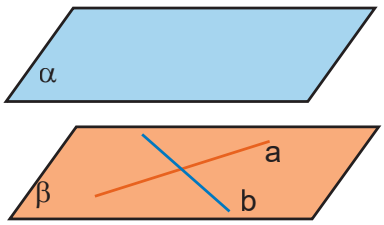
მე-7 ნახაზზე α სიბრტყის გარეთ მდებარე a წრფე α სიბრტყეზე მდებარე b წრფის პარალელურია, საიდანაც ვასკვნით, რომ a წრფე α სიბრტყის პარალელურია:

$$a\|b,\ a\not\subset\alpha,\ b\subset\alpha\Rightarrow a\|\alpha.$$

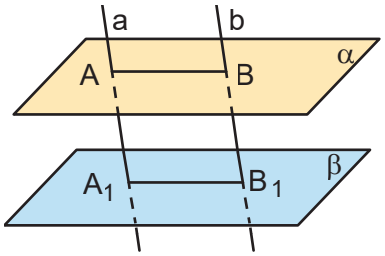
მაგალითად, მე-4 ნახაზზე მოცემული კუბის შემთხვევაში A_1D_1 წრფე ABCD წახნაგის შემცველი სიბრტყის პარალელურია, რადგან A_1D_1 წრფე ABC სიბრტყეში მდებარე AD წრფის პარალელურია.



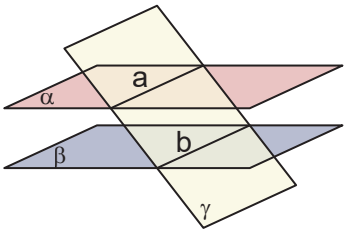
ნახ. 8



ნახ. 9



ნახ. 10ა



ნახ. 10ბ

ვთქვათ, გვაქვს α სიბრტყე და ამ სიბრტყის გარეთ მდებარე a წრფე. როგორ შევამოწმოთ, a წრფე α სიბრტყის პარალელურია თუ არა? ამისათვის საკმარისია a წრფეზე გავატაროთ α სიბრტყის გადამკვეთი β სიბრტყე (ნახ. 8). თუ კვეთაში მიღებული b წრფე a წრფის პარალელური აღმოჩნდება, მაშინ a წრფე α სიბრტყის პარალელური იქნება, თუ არა, მაშინ არ იქნება პარალელური.

განვიხილოთ ორი სიბრტყის განლაგების შემთხვევები.

მე-8 ნახაზზე მოცემული α და β სიბრტყეები იკვეთება. b მათი გადაკვეთის წრფეა.

მე-9 ნახაზზე მოცემული სიბრტყეები არ იკვეთება. ისინი **პარალელური** სიბრტყეებია.

ორი სიბრტყის პარალელობისთვის საკმარისია ერთი მათგანი მეორეზე მდებარე ორი გადამკვეთი წრფის პარალელური იყოს.

მე-9 ნახაზზე α სიბრტყე β სიბრტყეზე მდებარე a და b გადამკვეთი წრფეების პარალელურია, საიდანაც ვასკვნით, რომ α და β პარალელური სიბრტყეებია.

ბოლოს ჩამოვაყალიბოთ პარალელურ სიბრტყეთა ორი თვისება:

- პარალელურ სიბრტყეებს შორის მოქცეული პარალელური წრფეების მონაკვეთები ტოლია.

  მე-10 ა ნახაზის მიხედვით ეს თვისება ასე ჩაიწერება:

  $\alpha \| \beta,\ a \| b,\ a \cap \alpha = A,\ a \cap \beta = A_1,\ b \cap \alpha = B,\ b \cap \beta = B_1 \Rightarrow AA_1 = BB_1$.

- თუ ორი პარალელური სიბრტყე კვეთს მესამე სიბრტყეს, მაშინ მათი გადაკვეთის წრფეები პარალელურია.

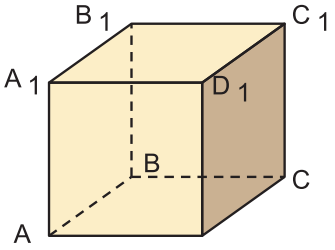
მე-10 ბ ნახაზის მიხედვით, ეს თვისება ასე ჩაიწერება:

$$\alpha \| \beta,\ \alpha \cap \gamma = a,\ \beta \cap \gamma = b \Rightarrow a \| b.$$

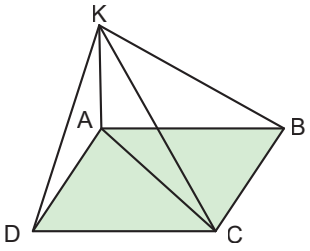
უპასუხე კითხვებს:

1. როგორი განლაგება შეიძლება ჰქონდეს ორ წრფეს სივრცეში?
2. როგორ წრფეებს ეწოდება აცდენილი? პარალელური?
3. როგორ გავზომოთ კუთხე ორ აცდენილ წრფეს შორის?
4. შეიძლება თუ არა სიბრტყის გავლება ორ: ა) აცდენილ; ბ) პარალელურ წრფეზე?
5. როგორი წრფეთა წყვილი მიიღება ორი პარალელური სიბრტყის მესამე სიბრტყით გადაკვეთისას?
6. რა თვისება აქვთ პარალელურ სიბრტყეებს შორის მოთავსებულ პარალელური წრფეების ნაწილებს?
7. რატომაა სკამის მდგრადობისთვის სამი ფეხი საკმარისი?

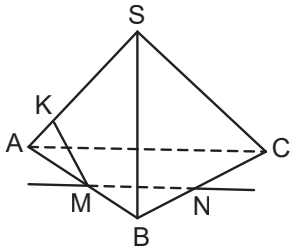
სავარჯიშოები



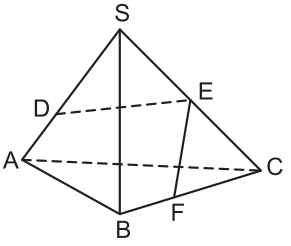
ნახ. 11



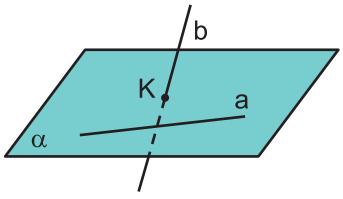
ნახ. 12ა



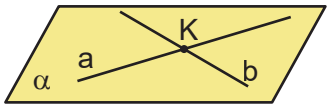
ნახ. 12ბ



ნახ. 12გ



ნახ. 13ა



ნახ. 13ბ

1. დაასახელე მე-11 ნახაზზე მოცემული კუბის:

ა) პარალელურ წრფეებზე მდებარე წიბოები;

ბ) აცდენილ წრფეებზე მდებარე წიბოები.

2. აჩვენე პარალელური და აცდენილი წრფეების მაგალითები საკლასო ოთახში.

3. მე-11 ნახაზზე მოცემული კუბის მიხედვით იპოვე კუთხე:

ა) A_1C_1 და DC წრფეებს შორის; ბ) B_1B და AD წრფეებს შორის; გ) A_1C_1 და BD წრფეებს შორის.

4. მე-12ა ნახაზზე მოცემულია ABCD მართკუთხედი და მისი სიბრტყის გარეთ მდებარე K წერტილი. ნახაზის მიხედვით, დაასახელე აცდენილი წრფეთა ყველა წყვილი.

5. ისარგებლე მე-12ბ ნახაზით და დაასახელე:

ა) ოთხი წერტილი, რომელიც ეკუთვნის SAB სიბრტყეს;

ბ) ოთხი წერტილი, რომელიც ეკუთვნის ABC სიბრტყეს;

გ) სიბრტყე, რომელშიც ძევს MN წრფე;

დ) სიბრტყე, რომელშიც ძევს KM წრფე;

ე) წრფე, რომელზეც გადაიკვეთება ASC და BSC სიბრტყეები;

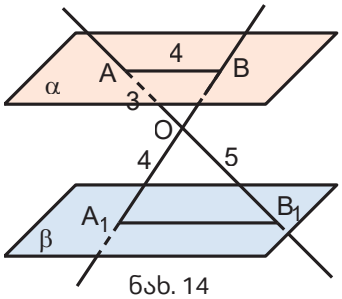
ვ) წრფე, რომელზეც გადაიკვეთება ASC და ABC სიბრტყეები.

6. ისარგებლე მე-12გ ნახაზით და დაასახელე:
ა) ორი სიბრტყე, რომელიც შეიცავს DE წრფეს;
ბ) ორი სიბრტყე, რომელიც შეიცავს EF წრფეს;
გ) წრფე, რომელზეც გადაიკვეთება DEF და SBC სიბრტყეები;
დ) წრფე, რომელზეც გადაიკვეთება DEF და ACS სიბრტყეები;
ე) ორი სიბრტყე, რომელთაც კვეთს BS წრფე;
ვ) ორი სიბრტყე, რომელთაც კვეთს AC წრფე;

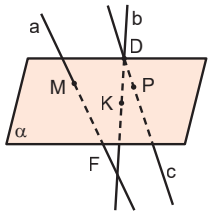
7. მოცემული მე-13 ნახაზები აღწერე სიტყვიერად და ჩაწერე მათემატიკური სიმბოლოებით.

8. ჩაწერე მათემატიკური სიმბოლოებით მოცემული წინადადება და შეასრულე შესაბამისი ნახაზი:
ა) a წრფე დევს α სიბრტყეზე;
ბ) a წრფე გავლებულია A და B წერტილებზე;
გ) a და b წრფეები იკვეთება C წერტილში;
დ) α და β სიბრტყეები იკვეთება a წრფეზე.





ნახ. 14



ნახ. 15

9. წაიკითხე ჩანაწერი და შეადგინე შესაბამისი ნახაზი:

ა) $A \in a,\ a \subset \alpha$; ბ) $a \subset \alpha,\ b \parallel \alpha$;

გ) $\alpha \cap \beta = b$; დ) $A \in \alpha,\ A \notin a \subset \alpha$.

10. თავახდილი როიალის სახურავს ერთი საყრდენი ჯოხი აქვს შედგმული. სიბრტყის რა თვისების გამო ჩერდება სახურავი უძრავად?

11. დაამტკიცე, რომ თუ AB და CD წრფეები აცდენილია, მაშინ აცდენილია AD და BC წრფეებიც.

12. გაარკვიე, შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელია ჭეშმარიტი:

ა) თუ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ის პარალელურია ამ სიბრტყეში მდებარე ყველა წრფის.

ბ) თუ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ის პარალელურია ამ სიბრტყეში მდებარე ერთადერთი წრფის.

გ) თუ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ის პარალელურია ამ სიბრტყეში მდებარე ერთი წრფის მაინც.

დ) თუ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ის პარალელურია ამ სიბრტყეში მდებარე არაუმეტეს ორი წრფის.

13. გაარკვიე, შემდეგი გამონათქვამებიდან რომელია მცდარი:

ა) თუ ორი სიბრტყე პარალელურია, მაშინ ერთ მათგანზე მდებარე ყველა წრფე მეორეზე მდებარე ყველა წრფის პარალელურია.

ბ) თუ ორი სიბრტყე პარალელურია, მაშინ ერთ მათგანზე მდებარე ყოველი წრფე მეორეზე მდებარე რაიმე წრფის პარალელურია.

გ) თუ ორი სიბრტყე პარალელურია, მაშინ ერთ მათგანზე მდებარე ყოველი წრფე მეორეზე მდებარე უამრავი წრფის პარალელურია.

დ) თუ ორი სიბრტყე პარალელურია, მაშინ ერთ მათგანზე მდებარე ყოველი წრფე მეორეზე მდებარე ერთი წრფის მაინცაა პარალელური.

14. მე-14 ნახაზზე $\alpha \parallel \beta$, $AB \subset \alpha$, $A_1B_1 \subset \beta$, AB_1 და A_1B წრფეები O წერტილში კვეთენ ერთმანეთს. იპოვე OB და A_1B_1.

15. a, b და c წრფეები α სიბრტყეს M, K და P წერტილებში კვეთენ. a და b რფეები F წერტილში, ხოლო b და c წრფეები D წერტილში იკვეთება. მე-15 ნახაზის მიხედვით გაარკვიე, ძევს თუ არა a, b და c წრფეები ერთ სიბრტყეში?

16. დაამტკიცე, რომ ყველა წრფე, რომელიც მოცემულ ორ გადამკვეთ წრფეს კვეთს და არ გადის მათი კვეთის წერტილზე, ერთი და იმავე სიბრტყეში ძევს.

აბა, სცადე!

ასანთის ექვსი ღერით შეადგინე ოთხი ტოლი სამკუთხედი.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- წრფეთა და სიბრტყეთა ურთიერთგანლაგების შემთხვევები სივრცეში.

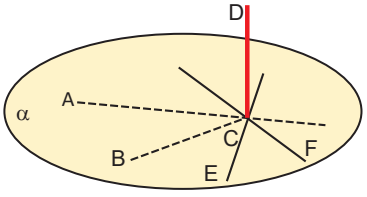
2.2 მართობი, დახრილი და გეგმილი. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის.

მიზანი. უნდა შეძლო:

- წრფისა და სიბრტყის მართობულობის განმარტება;
- წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშნის ჩამოყალიბება;
- სიბრტყისადმი დახრილისა და გეგმილის განმარტება;
- დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხის განმარტება და ნახაზზე დემონსტრირება.



ამოცანა 1. გოგიმ შენიშნა, რომ ვენახის ბოძი იყო გადახრილი. მან გაასწორა, გაამაგრა ბოძი და იმის შესამოწმებლად, იყო თუ არა ის მიწის ზედაპირთან ვერტიკალურად ჩასმული, შემდეგნაირად მოიქცა: რამდენიმე ნაბიჯით დაშორდა ბოძს, თვალზომით დარწმუნდა, რომ ბოძი მართ კუთხეს ადგენდა მიწის ზედაპირთან, შემდეგ რამდენიმე ნაბიჯი გადადგა განზე და ისევ თვალზომით დაადგინა, რომ ბოძი ვერტიკალურად იყო დამაგრებული. გავარკვიოთ, რატომ მოიქცა გოგი ასე.



ნახ. 1

სქემატურ ნახაზზე (ნახ.1) α სიბრტყე პირობითად აღნიშნავს მიწის ზედაპირს, A და B წერტილები ის ადგილებია, საიდანაც გოგი აკვირდება ბოძს, ხოლო CD მონაკვეთი არის ბოძი.

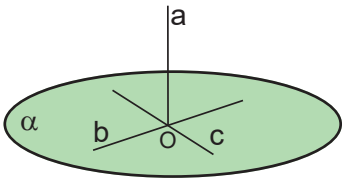
A წერტილიდან დაკვირვების დროს გოგი ამოწმებს, მართობულია თუ არა ECD კუთხე. მაგრამ მხოლოდ ამ კუთხის მართობულობა არაა საკმარისი ბოძის ვერტიკალურობის დასადგენად, რადგან DC შეიძლება დახრილი იყოს α სიბრტყისადმი AC წრფის გასწვრივ, რაც A წერტილიდან თვალისათვის შეუმჩნეველია. B წერტილიდან დაკვირვებით მოწმდება FCD კუთხის მართობულობა, რაც უკვე გამორიცხავს ბოძის რაიმე მხარეს დახრილობას.

ზოგადი განმარტებით წრფეს ეწოდება სიბრტყის **მართობული**, თუ წრფე სიბრტყეზე მდებარე **ყველა** წრფის მართობულია.

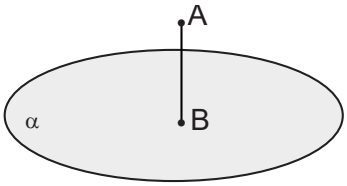
განხილული ამოცანიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ წრფისა და სიბრტყის მართობულობისათვის საკმარისია წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფიდან თითოეულის მართობული იყოს.



მართობები და დახრილები არქიტექტურაში



ნახ. 2



ნახ. 3

მე-2 ნახაზის მიხედვით, წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ჩამოყალიბებული ნიშანი ასე ჩაიწერება:

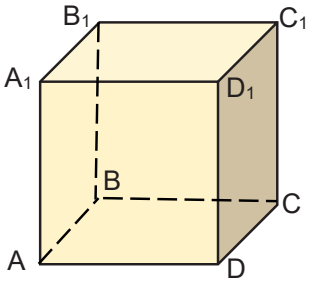
$b \subset \alpha,\ c \subset \alpha,\ b \cap c = O,\ a \perp b,\ a \perp c \Rightarrow a \perp \alpha.$

სიბრტყის მართობული წრფეების თვისებებია:

- სივრცის ნებისმიერი წერტილიდან შეგვიძლია სიბრტყისადმი მხოლოდ ერთი მართობის გავლება.
- თუ ორი წრფე ერთი და იმავე სიბრტყის მართობულია, მაშინ ეს წრფეები პარალელურია.
- თუ სიბრტყე ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ მეორე წრფის მართობულიც იქნება.

მოცემული წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი ამ წერტილიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს ეწოდება.

მე-3 ნახაზზე A წერტილი სიბრტყის გარეთ მდებარეობს. A წერტილიდან α სიბრტყეზე დაშვებულია AB მართობი. მანძილი A წერტილიდან α სიბრტყემდე ამ მართობის სიგრძეა. B წერტილს AB მართობის **ფუძე** ეწოდება.



ნახ. 4

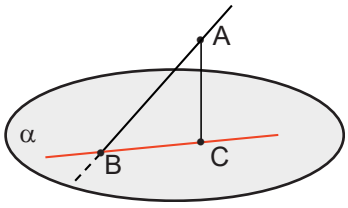
ამოცანა 2. კუბის წიბო 10 სმ-ია. გავიგოთ მანძილი კუბის A წვეროდან DD_1C_1C წახნაგის სიბრტყემდე (ნახ. 4).

ამოხსნა. განმარტების თანახმად, უნდა გავიგოთ A წერტილიდან DD_1C_1C წახნაგის სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძე. ასეთი მართობი კუბის AD წიბოა.

მართლაც, $\angle ADD_1 = \angle ADC = 90°$, რადგან ორივე ეს კუთხე კვადრატების კუთხეებია. გამოდის, რომ AD მონაკვეთი მართობულია DD_1C_1C სიბრტყეში მდებარე DD_1 და DC გადამკვეთი წრფეებისა, რაც ნიშნავს AD მონაკვეთის DD_1C_1C სიბრტყესთან მართობულობას.

პასუხი: კუბის A წვეროდან DD_1C_1C წახნაგის სიბრტყემდე მანძლი 10 სმ-ია.

სიბრტყის არამართობულ გადამკვეთ წრფეს სიბრტყისადმი **დახრილი** წრფე, ხოლო ამ წრფისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილს დახრილის **ფუძე** ეწოდება.



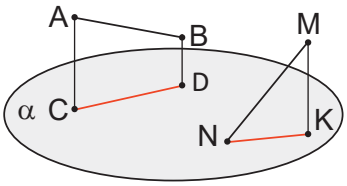
ნახ. 5

დახრილ წრფეს სიბრტყეზე მისი გეგმილი წრფე შეესაბამება, რომლის ასაგებად ვიქცევით შემდეგნაირად: სიბრტყის გარეთ, დახრილ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილიდან ვუშვებთ მართობს სიბრტყეზე და მართობის ფუძესა და დახრილის ფუძეზე ვატარებთ წრფეს (ნახ. 5).

მე-5 ნახაზზე AB დახრილი წრფეა, AC – მართობი წრფე, B და C – მათი ფუძეები, ხოლო BC წრფე – AB დახრილის გეგმილი. შევნიშნოთ, რომ $\angle ACB$ მართი კუთხეა, რადგან AC წრფე α სიბრტყის მართობულია, ანუ ამ სიბრტყეზე მდებარე ყველა წრფის და მათ შორის BC წრფის მართობულიცაა.

დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე დახრილსა და მის გეგმილს შორის კუთხეს ეწოდება.

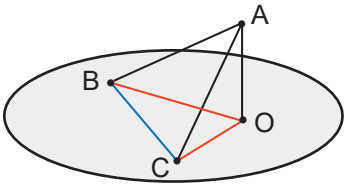
მე-5 ნახაზის მიხედვით, AB დახრილსა და α სიბრტყეს შორის კუთხეა $\angle ABC$.



ნახ. 6

მონაკვეთის გეგმილის ასაგებად ამ მონაკვეთის ბოლოებიდან სიბრტყეზე ვუშვებთ მართობებს და ამ მართობების ფუძეებს ვაერთებთ (თუ მონაკვეთი ერთი ბოლოთი სიბრტყეზე დევს, მაშინ მართობს მხოლოდ მეორე ბოლოდან დავუშვებთ). მე-6 ნახაზზე AB მონაკვეთის გეგმილია CD მონაკვეთი, ხოლო MN მონაკვეთის გეგმილი – NK მონაკვეთი.

ამოცანა 3. სიბრტყიდან a მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილი. ერთი დახრილი სიბრტყესთან 30°-იან, ხოლო მეორე 45°-იან კუთხეს ადგენს. გამოვთვალოთ მანძილი დახრილების ფუძეებს შორის, თუ დახრილების გეგმილებს შორის 90°-იანი კუთხეა.



ნახ. 7

მოც. AB და AC დახრილები (ნახ.7), $AO \perp \alpha$, $AO=a$.

$\angle ABO=30°$, $\angle ACO=45°$, $\angle BOC=90°$.

უ.გ. BC.

ამოხსნა. პითაგორას თეორემით $BC^2=BO^2+CO^2$ (1).

AOB მართკუთხა სამკუთხედიდან $BO=\frac{AO}{\tan 30°}=a\sqrt{3}$, ხოლო AOC სამკუთხედიდან $CO=\frac{AO}{\tan 45°}=a$. მიღებული ტოლობების 1-ელ ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ: $BC^2=3a^2+a^2=4a^2 \Rightarrow BC=2a$.

პასუხი: BC=2a.

? უპასუხე კითხვებს:

1. რატომ შეამოწმა გოგიმ ბოძის ვერტიკალურობა ორი ადგილიდან?
2. როგორ წრფეს ეწოდება სიბრტყის მართობული?
3. რაში მდგომარეობს სიბრტყისა და წრფის მართობულობის ნიშანი?
4. როგორ ააგებ მონაკვეთის გეგმილს სიბრტყეზე?
5. როგორ გაზომავ კუთხეს წრფესა და სიბრტყეს შორის?
6. როგორ გაზომავ მანძილს წერტილიდან სიბრტყემდე?

? სავარჯიშოები

1. სიბრტყიდან a მანძილზე მდებარე წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია b სიგრძის დახრილი. გამოთვალე დახრილის გეგმილის სიგრძე, თუ:
   ა) a=3 სმ, b=5 სმ; ბ) a=5 სმ, b= 13 სმ;
   გ) a=24 სმ, b= 25 სმ; დ) a=8 სმ, b=17 სმ.
2. გამოთვალე მანძილი A წერტლიდან სიბრტყემდე, თუ AB დახრილის სიგრძეა 10 სმ, ხოლო მისი BC გეგმილის სიგრძე 6 სმ.
3. სიბრტყიდან a მანძილზე მდებარე წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია b სიგრძის დახრილი. გამოთვალე დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხის:
   ა) სინუსი; ბ) კოსინუსი; გ) ტანგენსი.



აბა, სცადე!

სიბრტყის ერთ მხარეს მდებარე სამკუთხედის სამი წვეროდან სიბრტყემდე მანძილებია a, b და c. იპოვე მანძილი მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან სიბრტყემდე.

4. სიბრტყის გარეთ მდებარე წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია დახრილი და მართობი, რომელთა შორის 40°-იანი კუთხეა. გამოთვალე კუთხე დახრილსა და სიბრტყეს შორის.

5. დახრილი სიბრტყესთან 30°-იან კუთხეს ადგენს. რა სიდიდის კუთხეს შეადგენს ეს დახრილი სიბრტყის მართობულ წრფესთან?

6. რა სიდიდისაა კუთხე დახრილსა და სიბრტყეს შორის, თუ დახრილი გეგმილზე ორჯერ გრძელია?

7. იპოვე $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბის AC_1 დიაგონალსა და ABCD წახნაგის სიბრტყეს შორის კუთხის ტანგენსი.

8. დახრილი სიბრტყესთან 50°-იან კუთხეს ადგენს. არსებობს თუ არა ამ სიბრტყეზე წრფე, რომელთანაც ეს დახრილი: ა) 40°-იან კუთხეს; ბ) 90°-იან კუთხეს შეადგენს?

9. მიწის ზედაპირის პარალელურად გადებული ხარიხის ერთი ბოლო ზედაპირიდან 2,5 მეტრის სიმაღლეზეა. რა სიმაღლეზეა მიწის ზედაპირიდან ხარიხის მეორე ბოლო?

10. დაამტკიცე, რომ სიბრტყის პარალელური წრფის ყოველი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული სიბრტყიდან.

11. ძელის ერთი ბოლო მიწის ზედაპირიდან 3 მ სიმაღლეზე, ხოლო მეორე ბოლო 2 მ სიმაღლეზეა. მიწის ზედაპირიდან რა სიმაღლეზეა ძელის შუა წერტილი?

12. A წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი 15 სმ-ია. B წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი – 23 სმ. გამოთვალე სიბრტყემდე მანძილი AB მონაკვეთის შუა წერტილიდან. განიხილე ორი შესაძლო შემთხვევა.

13. სიბრტყის ერთ მხარეს მდებარე ABCD პარალელოგრამის A, B და C წვეროებიდან სიბრტყემდე მანძილები შესაბამისად a-ს, b-ს და c-ს ტოლია. გამოთვალე მანძილი D წვეროდან სიბტყემდე.

14. 6 სმ რადიუსის მქონე წრეწირის O ცენტრიდან ამ წრეწირის სიბრტყისადმი აღმართულია OM მართობი, რომლის სიგრძე 8 სმ-ია. გაიგე მანძილი M წერტილიდან წრეწირის წერტილებამდე.

15. 6 სმ გვერდის მქონე კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილიდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართულია OM მართობი. გამოთვალე მანძილი M წერტილიდან კვადრატის წვეროებამდე, თუ OM=5 სმ.

16. დაამტკიცე, რომ ერთი წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულ ტოლ დახრილებს ტოლი გეგმილები აქვთ.

17. დაამტკიცე, რომ ერთი წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებული ტოლი დახრილები სიბრტყესთან ტოლ კუთხეებს ადგენენ.

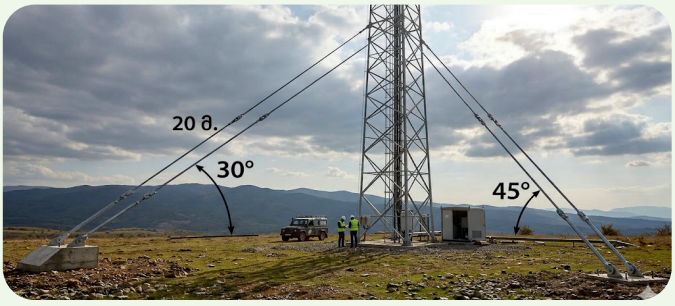
შესაძლებელია?

1. პარალელოგრამის ორი წვერო და დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი ეკუთვნოდეს სიბრტყეს, რომელსაც არ ეკუთვნის დანარჩენი ორი წვერო?
2. წერტილი რომბის ყველა წვეროდან თანაბრად იყოს დაშორებული?

18. ABC სამკუთხედის სიბრტყის გარეთ მდებარე M წერტილი თანაბრადაა დაშორებული სამკუთხედის სამივე წვეროდან. MO სამკუთხედის სიბრტყეზე დაშვებული მართობია. დაამტკიცე, რომ O წერტილი ABC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრია.

19. დაამტკიცე, რომ თუ პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია ან ფუძის სიბრტყისადმი ტოლადაა დახრილი, მაშინ პირამიდის სიმაღლე ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრში დაეშვება.

20. ტოლგვერდა სამკუთხედის სამივე წვეროდან 13 სანტიმეტრით დაშორებული წერტილი სამკუთხედის სიბრტყიდან 5 სანტიმეტრითაა დაშორებული. გაიგე სამკუთხედის გვერდი.



21. კავშირგაბმულობის ანძის დამჭერი ორი ბაგირი ანძაზე ერთ სიმაღლეზეა დამაგრებული. ერთი ბაგირი, რომლის სიგრძე 20 მეტრია, მიწის ზედაპირთან 30°-იან კუთხეს, ხოლო მეორე 45°-იან კუთხეს ქმნის. გაიგე მანძილი ბაგირების ფუძეებს შორის, თუ ამ ბაგირებს შორის 135° გრადუსიანი კუთხეა.

22. მართკუთხა სამკუთხედის სამივე წვეროდან 10 სმ-ით დაშორებული წერტილი ამ სამკუთხედის სიბრტყიდან 8 სმ-ითაა დაშორებული. გამოთვალე სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძე.

23. კავშირგაბმულობის ანძა სამი ცალი 20 მეტრი სიგრძის ბაგირით 16 მეტრის სიმაღლეზეა დაბმული. გაიგე, რა მანძილია ბაგირების ფუძეებს შორის, თუ ისინი ტოლგვერდა სამკუთხედის წვეროებს წარმოადგენენ.



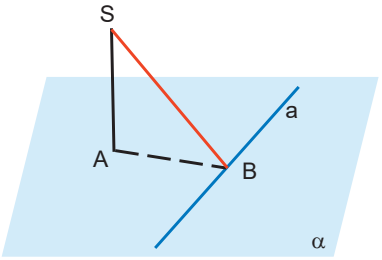
რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი;
- დახრილის გეგმილის აგება;
- დახრილსა და სიბრტყეს შორის კუთხე.

2.3 სამი მართობის თეორემა

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **სამი მართობის თეორემის ჩამოყალიბება და დამტკიცება;**
- **სამი მართობის თეორემის ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენება.**



ნახ. 1

ამოცანა 1. ანძის წვერო კაბელით უნდა მიაერთონ მიწაზე ჰორიზონტალურად გამავალ კაბელს. რა წერტილში უნდა მოხდეს მიერთება, რათა მინიმალური სიგრძის კაბელი დაიხარჯოს?

ამოხსნა: 1-ელ სქემატურ ნახაზზე AS არის ანძა, რომელიც მიწის α სიბრტყის მართობულია. a წრფე მიწაზე არსებული კაბელია, SB მისაერთებელი კაბელი. მოსაძებნია ისეთი B წერტილი a წრფეზე, რომ SB მონაკვეთი იყოს უმოკლესი.

ვიცით, რომ წერტილიდან წრფემდე უმოკლესი მანძილი ამ წერტილიდან წრფეზე დაშვებული მართობია. ე.ი. ამოცანის გადასაწყვეტად გვჭირდება ისეთი B წერტილის მოძებნა, რომლისთვისაც SB იქნება a წრფის მართობული. ასეთ წერტილს მივიღებთ, თუ ანძის ფუძიდან a წრფეზე დავუშვებთ AB მართობს.

მართლაც, ერთი მხრივ, a წრფე მართობულია AB წრფის, აგების თანახმად, ხოლო მეორე მხრივ, a წრფე მართობულია AS წრფის, რადგან AS სიბრტყის მართობული და ამიტომ სიბრტყეში მდებარე ყველა წრფის მართობულია. მივიღეთ, რომ a წრფე ABS სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფის მართობულია. აქედან ვასკვნით, რომ a წრფე ABS სიბრტყის მართობულია, ანუ ამ სიბრტყეში მდებარე ყველა წრფის და მათ შორის SB წრფის მართობულიც იქნება.

შევნიშნოთ, რომ 1-ელ ნახაზზე მოცემული AB წრფე SB წრფის გეგმილია. განხილულ ამოცანაზე მსჯელობისას ჩვენ ფაქტიურად დავამტკიცეთ –

თეორემა: თუ სიბრტყეში მოცემული წრფე დახრილის გეგმილის მართობულია, მაშინ ეს წრფე დახრილის მართობულიცაა.

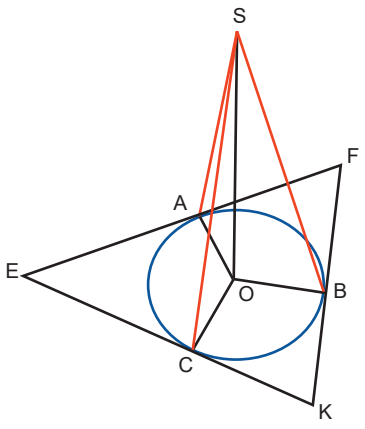
მართებულია **შებრუნებული თეორემაც** (სცადე დამოუკიდებლად დამტკიცება):

თუ სიბრტყეში მოცემული წრფე დახრილის მართობულია, მაშინ ეს წრფე დახრილის გეგმილის მართობულიცაა.

ორივე თეორემის გაერთიანებით მივიღებთ **სამი მართობის თეორემას:**

თუ სიბრტყეში მოცემული წრფე ამ სიბრტყისადმი დახრილიდან და მისი გეგმილიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ ეს წრფე მეორის მართობულიც იქნება.

სამი მართობის თეორემა გვეხმარება სივრცეში წრფეთა შორის მართი კუთხეების აღმოჩენაში.



ნახ. 2

ამოცანა 2. სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრიდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია მართობი. დავამტკიცოთ, რომ მართობის ყოველი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული სამკუთხედის გვერდებიდან.

ამოხსნა. ვთქვათ, A, B, C წერტილები EFK სამკუთხედის გვერდების O წრეწირთან შეხების წერტილებია, O წრეწირის ცენტრი, SO⊥EFK, S-მართობზე აღებული წერტილი (ნახ.2). უნდა დავამტკიცოთ, რომ SA=SB=SC.

წრეწირის რადიუსები შეხების წერტილებში სამკუთხედის გვერდების მართობულია. ე.ი. OA⊥EF, OB⊥FK, OC⊥EK. მაგრამ, OA, OB და OC, შესაბამისად, SA, SB და SC დახრილთა გეგმილებია. ამიტომ, სამი მართობის თეორემით SA⊥EF, SB⊥FK, SC⊥EK.

გამოდის, რომ SA, SB და SC მონაკვეთების სიგრძეებია მანძილები S წერტილიდან EFK სამკუთხედის გვედებამდე. ეს მონაკვეთები ტოლია, რადგან ისინი ტოლი მართკუთხა AOS, BOS და COS სამკუთხედების ჰიპოტენუზებია.

უპასუხე კითხვებს:

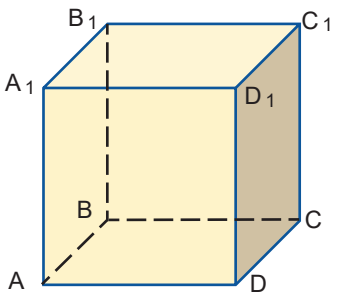
1. როგორ ვიპოვეთ პირველ ამოცანაში უმოკლესი მანძილი ანძის წვეროდან მიწაზე არსებულ კაბელამდე?
2. რაში მდგომარეობს სამი მართობის თეორემა?
3. იქნება თუ არა ჭეშმარიტი მეორე ამოცანაში დამტკიცებული დებულება, თუ სამკუთხედის ნაცვლად ისეთ მრავალკუთხედს განვიხილავთ, რომელშიც შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა?

სავარჯიშოები

1. B წერტილიდან ABCD კვადრატის სიბრტყისადმი გავლებულია BM მართობი და MA, MC, MD დახრილები. დაასახელე M წვეროს მქონე მართკუთხა სამკუთხედები.
2. α სიბრტყიდან 8 სმ-ით დაშორებული M წერტილიდან α სიბრტყეზე მდებარე a წრფემდე მანძილია 10სმ. იპოვე მანძილი α სიბრტყისადმი M წერტილზე გავლებული მართობის ფუძიდან a წრფემდე.
3. 16 სმ გვერდის მქონე კვადრატის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილიდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართულია OM მართობი. იპოვე მანძილი M წერტილიდან კვადრატის თითოეულ გვერდამდე, თუ OM=15 სმ.
4. ABCD კვადრატის B წვეროდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართულია BM მართობი. იპოვე კვადრატის გვერდი, თუ MA=4 სმ, ხოლო MD =5 სმ.

შესაძლებელია?

წერტილი მართკუთხედის ყველა გვერდიდან თანაბრად იყოს დაშორებული?



ნახ. 3

წყვილებში სამუშაო

1. ფუძის a გვერდის მქონე წესიერი n -კუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო b-ს ტოლია. გამოთვალე პირამიდის სიმაღლე, როცა:
ა) n=3; ბ) n=4; გ) n=6.
2. ფუძის a გვერდის მქონე წესიერი n -კუთხა პირამიდის აპოთემა b-ს ტოლია. გამოთვალე პირამიდის სიმაღლე, როცა:
ა) n=3; ბ) n=4; გ) n=6.

აბა, სცადე!

მართი კუთხის წვეროდან გავლებული წრფე მართი კუთხის გვერდებთან 60°-იან კუთხეებს ადგენს. გამოთვალე ამ წრფის მიერ მართი კუთხის სიბრტყესთან შედგენილი კუთხის ზომა.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- სამი მართობის თეორემა და მისი გამოყენება

5. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის A წვეროდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AD მართობი. იპოვე მანძილი D წერტილიდან BC გვერდამდე, თუ AD=13 სმ და BC=6 სმ.

6. კვადრატის სიბრტყის გარეთ აღებული M წერტილიდან კვადრატის თითოეულ წვეროდმე მანძილი 5 სმ-ის ტოლია. იპოვე მანძილი M წერტილიდან კვადრატის გვერდებამდე, თუ კვადრატის გვერდი 6 სმ-ია.

7. მანძილი წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე 1,1 მ-ია, ხოლო სამკუთხედის თოთოეულ გვერდამდე 6,1 მ. იპოვე სამკუთხედში ჩახაზული წრის რადიუსი

8. მე-3 ნახაზზე მოცემულია კუბი. დაამტკიცე, რომ AB_1 წრფე BC წრფის მართობულია.

9. ABCD მართკუთხედის D წვეროდან მისი სიბრტყისადმი აღმართულია DK მართობი. მართობის K ბოლოდან მართკუთხედის A, B და C წვეროებამდე მანძილები შესაბამისად a-ს, b-ს და c-ს ტოლია. იპოვე მართობის სიგრძე, თუ a=6 სმ, b=9 სმ და c=7 სმ.

10. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია a=18 სმ და b=32 სმ. სამკუთხედის სიბრტყისადმი ჰიპოტენუზის შუა წერტილზე გავლებულია 12 სმ სიგრძის მართობი. გაიგე მანძილები მართობის ბოლოებიდან კათეტებამდე.

11. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია a და b. სამკუთხედის სიბრტყისადმი მართი კუთხის წვეროდან აღმართულია h სიგრძის მართობი. იპოვე მანძილი მოცემული მართობის სიბრტყის გარეთ მდებარე ბოლოდან ჰიპოტენუზმდე.

12. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია: AB=13 სმ, BC=14 სმ, AC=15 სმ. სამკუთხედის A წვეროდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი გავლებულია 16 სმ-ის სიგრძის მართობი. იპოვე მანძილი მართობის სიბრტყის გარეთ მდებარე ბოლოდან სამკუთხედის BC გვერდამდე.

13. მანძილი M წერტილიდან ABC სამკუთხედის თითოეულ წვეროდმე 5 სმ-ის ტოლია. იპოვე მანძილი M წერტილიდან ABC სამკუთხედის სიბრტყემდე, თუ AB=6 სმ, ხოლო ∠C=90°.

14. C მართი კუთხის მქონე ABC სამკუთხედის A წვეროდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AD მართობი. იპოვე BD, თუ BC=a, DC=b.

2.4

ორწახნაგა კუთხე

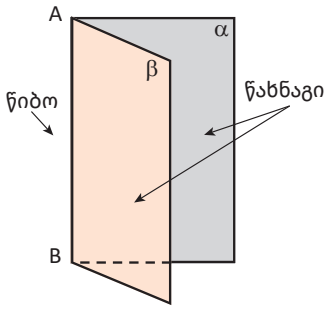
მიზანი. უნდა შეძლო:

- **ორწახნაგა კუთხის განმარტება;**
- **ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის განმარტება და აგება;**
- **დახრილი ფიგურისა და მისი გეგმილი ფიგურის ფართობების დაკავშირება.**

სიბრტყეში გავლებული წრფე სიბრტყეს ორ **ნახევარსიბრტყედ** ჰყოფს.

საერთო წრფის მქონე ორი ნახევარსიბრტყე სივრცეს ყოფს ორ ნაწილად, რომელთაგან თითოეულს **ორწახნაგა კუთხე** ეწოდება (ნახ.1).

საერთო წრფეს ორწახნაგა კუთხის წიბო, ხოლო ნახევარსიბრტყეებს ორწახნაგა კუთხის წახნაგები ეწოდება. 1-ელ ნახაზზე AB წრფე არის ორწახნაგა კუთხის წიბო, ხოლო α და β ნახევარსიბრტყეები – ორწახნაგა კუთხის წახნაგები.



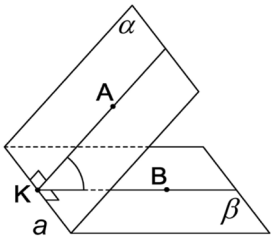
ნახ. 1

ორწახნაგა კუთხე **ხაზოვანი კუთხით** იზომება.

ხაზოვანი კუთხის მისაღებად წიბოს ნებისმიერ წერტილზე უნდა გავავლოთ ამ წიბოს მართობული სიბრტყე. ამ სიბრტყის ორწახნაგა კუთხის შიგნით მოქცეულ ნაწილს ეწოდება ხაზოვანი კუთხე. მე-2ა ნახაზზე AKB კუთხე მოცემული ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხეა.

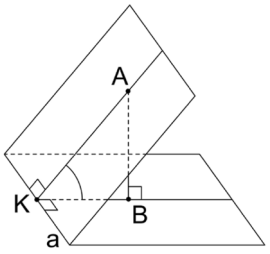
განვიხილოთ ხაზოვანი კუთხის აგების ორი ხერხი.

1. a წიბოზე ავიღოთ K წერტილი. წახნაგებზე გავავლოთ a წიბოს მართობული KA და KB წრფეები. AK⊥a, KB⊥a. მაშასადამე, AKB სიბრტყე მართობულია a წრფის, ე.ი. აგებული AKB კუთხე ხაზოვანი კუთხეა (ნახ. 2ა).



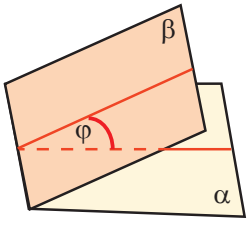
ნახ. 2ა

2. ერთ-ერთ წახნაგზე ავიღოთ A წერტილი (ნახ. 2ბ) გავავლოთ წიბოსადმი AK⊥a მართობი, რომელიც მეორე წახნაგისადმი წარმოადგენს დახრილს. ავაგოთ მისი KB გეგმილი მეორე წახნაგზე. სამი მართობის თეორემის მიხედვით KB⊥a. მაშასადამე, a⊥AKB სიბრტყის და ∠AKB ხაზოვანი კუთხეა.

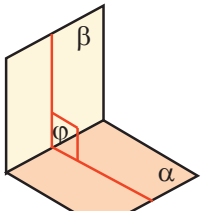


ნახ. 2ბ

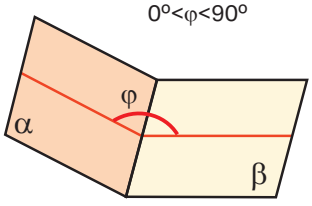
ხაზოვანი კუთხის სიდიდე დამოკიდებული არაა იმაზე, თუ სად მდებარეობს მისი წვერო წიბოზე.



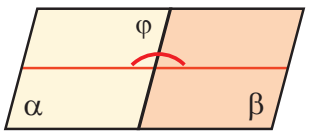
მახვილი ორწახნაგა კუთხე
$0^\circ<\varphi<90^\circ$



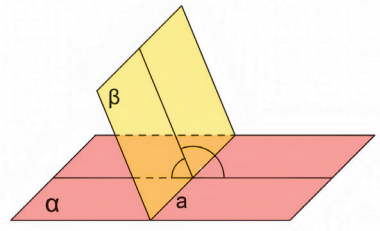
მართი ორწახნაგა კუთხე
$\varphi=90^\circ$



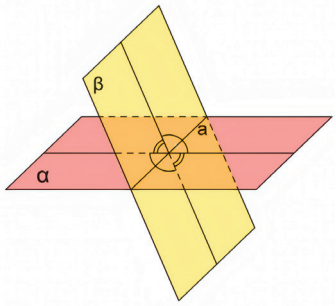
ბლაგვი ორწახნაგა კუთხე
$90^\circ<\varphi<180^\circ$



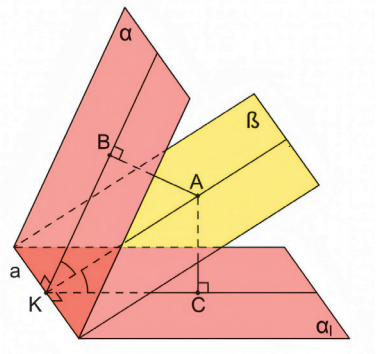
გაშლილი ორწახნაგა კუთხე
$\varphi=180^\circ$



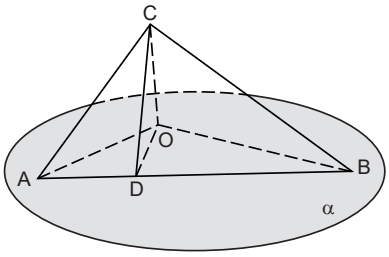
ნახ. 3ა



ნახ. 3ბ



ნახ. 4ა



ნახ. 4ბ

ქვემოთ ნახაზზე მოცემულია სხვადასხვა სიდიდის ორწახნაგა კუთხეები.

მე-3 ნახაზზე ვხედავთ მოსაზღვრე (ნახ. 3ა) და ვერტიკალურ (ნახ. 3ბ) ორწახნაგა კუთხეებს.

ბრტყელი კუთხეების ანლოგიურად, მოსაზღვრე ორწახნაგე კუთხეების ჯამი 180°-ია, ხოლო ვერტიკალური ორწახნაგა კუთხეები ტოლია.

ორწახნაგა კუთხის შუაზე გამყოფ სიბრტყეს **ბისექტორი** ეწოდება. ბისექტორის ყოველი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ორწახნაგა კუთხის წახნაგებიდან. მე-4ა ნახაზზე β ნახევარსიბრტყე ბისექტორია. მისი A წერტილი თანაბრადაა დაშორებული α და α_1 წახნაგებიდან: AB=AC.

ორი გადამკვეთი სიბრტყე გვაძლევს ოთხ ორწახნაგა კუთხეს. თუ მათგან ერთ-ერთი მართია, მაშინ დანარჩენი სამი კუთხიდან თითოეული მართია. ასეთ სიბრტყეებს **მართობული სიბრტყეები** ეწოდება.

მართობული სიბრტყეების მოდელია, მაგალითად, ოთახის ჭერი და კედელი. მართობულებია კუბის მეზობელი წახნაგები.

თუ α სიბრტყე გადის a წრფეზე, რომელიც β სიბრტყის მართობია, მაშინ α და β სიბრტყეები ურთიერთმართობულია (ახსენი, რატომ).

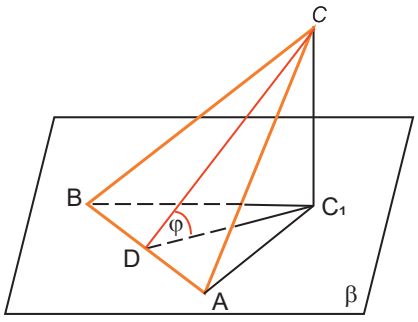
ამოცანა 1. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია a და b. ვიპოვოთ მანძილი მართი კუთხის წვეროდან სიბრტყემდე, რომელიც ჰიპოტენუზაზე გადის და სამკუთხედის სიბრტყესთან 30°-იან კუთხეს ადგენს.

ამოხსნა. ABC სამკუთხედის მართი კუთხის C წვეროდან AB ჰიპოტენუზაზე დავუშვათ CD მართობი (ნახ. 4ბ). სამი მართობის თეორემის მიხედვით, OD, როგორც CD-ს გეგმილი α სიბრტყეზე, AB-ს მართობულია. ∠CDO იმ ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხეა, რომელიც შექმნილია ABC სამკუთხედისა და α სიბრტყისაგან, ამიტომ, მოცემულობით, ∠CDO=30°.

ABC სამკუთხედიდან $CD=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. მართკუთხა DCO სამკუთხედის 30°-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი

$$CO=\frac{1}{2}CD=\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

პასუხი: $CO=\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.



ნახ. 5ა

ამოცანა 2. ABC სამკუთხედის AB ფუძე მდებარეობს α სიბრტყეზე (ნახ. 5ა). ავაგოთ ABC სამკუთხედის გეგმილი α სიბრტყეზე და გამოვითვალოთ გეგმილის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ ABC სამკუთხედის ფართობია S, ხოლო ABC და α სიბრტყეებს შორის კუთხე φ-ს ტოლია.

ამოხსნა. ABC სამკუთხედის C წვეროდან გავავლოთ α სიბრტყისადმი CC_1 მართობი და მისი C_1 ბოლო შევუერთოთ A-ს და B-ს.

C_1A არის CA-ს გეგმილი, C_1B არის CB-ს გეგმილი და ABC_1 სამკუთხედი არის ABC სამკუთხედის გეგმილი α სიბრტყეზე.

ავაგოთ ABC სამკუთხედის სიბრტყითა და α სიბრტყით შედგენილი ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე. ამისათვის გავავლოთ $C_1D\perp BA$ სიმაღლე ABC_1 სამკუთხედში. შევაერთოთ C და D წერტილები. სამი მართობის თეორემის თანახმად, $CD\perp DA$, ე.ი. CD არის ABC სამკუთხედის სიმაღლე და $\angle CDC_1=\varphi$ – ხაზოვანი კუთხე.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot CD}{2},\quad S_{\triangle ABC_1}=\frac{AB\cdot C_1D}{2}.$$

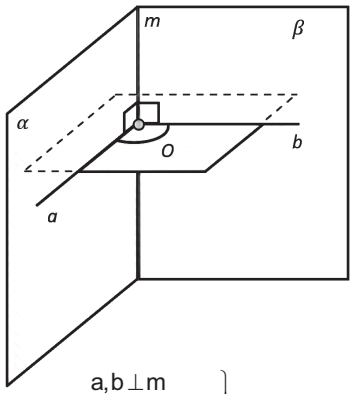
CC_1D მართკუთხა სამკუთხედიდან $DC_1=CD\cos\varphi$.

$$S_{\text{გეგ.}}=\frac{AB\cdot CD}{2}\cdot\cos\varphi=S\cdot\cos\varphi.$$

მიღებული ტოლობა მართებულია არა მარტო სამკუთხედისთვის, არამედ ყოველი ბრტყელი ფიგურისათვის. თუ ბრტყელი ფიგურის ფართობია S და ამ ფიგურის სიბრტყესა და მისი გეგმილის სიბრტყეს შორის კუთხე არის φ, მაშინ გეგმილი ფიგურის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S_{\text{გეგ}}=S\cdot\cos\varphi.$$

უპასუხე კითხვებს:

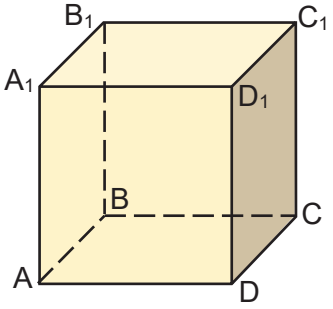


$$\left.\begin{array}{l} a,b\perp m\\ a\subset\alpha\\ b\subset\beta\\ a\cap b\cap m=O\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{ab}=\widehat{\alpha\beta}$$

ნახ. 5ბ

1. რას ხედავ მე-5ბ ნახაზზე? რას გვეუბნება ჩანაწერი?
2. რამდენი ნახევარსიბრტყე მიიღება სიბრტყეში წრფის გავლებით?
3. რას ეწოდება ორწახნაგა კუთხე?
4. რა ფიგურაა ორწახნაგა კუთხის წიბო? წახნაგი?
5. რა კუთხით იზომება ორწახნაგა კუთხე?
6. როგორ უნდა ავაგოთ ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხე?
7. რამდენი გრადუსია მართი ორწახნაგა კუთხე?
8. რამდენი ორწახნაგა კუთხე მიიღება ორი სიბრტყის გადაკვეთით?
9. რა სიდიდის ორწახნაგა კუთხეს ადგენს ხაზოვანი კუთხის სიბრტყე ორწახნაგა კუთხის წახნაგებთან?

სავარჯიშოები



ნახ. 6

1. რამდენი ორწახნაგა კუთხე აქვს სამკუთხა პირამიდას? დახაზე და დაასახელე მათი წიბოები.

2. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი (ნახ.6). იპოვე:
ა) $ABCD$ წახნაგითა და ABB_1A_1 წახნაგით შედგენილი ორწახნაგა კუთხის სიდიდე;
ბ) $ABCD$ წახნაგითა და ABC_1D_1 სიბრტყით შედგენილი ორწახნაგა კუთხის სიდიდე;
გ) AA_1C_1C და BB_1D_1D სიბრტყეებით შედგენილი ორწახნაგა კუთხის სიდიდე;
დ) $ABCD$ წახნაგითა AB_1D_1 სიბრტყეებით შედგენილი ორწახნაგა კუთხის სიდიდე.

3. 30°-იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მდებარე წერტილი მეორე წახნაგიდან 6 სმ-ითაა დაშორებული. გამოთვალე მანძილი ამ წერილიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე.

4. 60°-იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მდებარე წერტილი ორწახნაგა კუთხის წიბოდან 5 სმ-ითაა დაშორებული. იპოვე მანძილი ამ წერტილიდან მეორე წახნაგამდე.

5. 45°-იანი ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მდებარე A წერტილიდან მეორე წახნაგზე დაშვებულია AB მართობი. B წერტილიდან მანძილი ორწახნაგა კუთხის წიბომდე 8 სმ-ია. იპოვე AB მართობის სიგრძე.

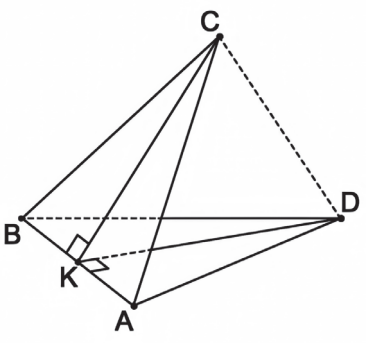
6. გაიგე ორწახნაგა კუთხის სიდიდე, თუ ერთ წახნაგზე მდებარე წერტილიდან წიბომდე მანძილი ორჯერ აღემატება ამ წერტილიდან მეორე წახნაგამდე მანძილს.

7. მართი ორწახნაგა კუთხის წახნაგებს შორის აღებულია A წერტილი. მანძილი ამ წერტილიდან კუთხის წახნაგებამდე შესაბამისად უდრის 3 სმ-ს და 4 სმ-ს. იპოვე მანძილი A წერტილიდან კუთხის წიბომდე.

8. ABC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზაზე გავლებულია α სიბრტყე, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყესთან 60°-იან კუთხეს ადგენს. იპოვე მანძილი სამკუთხედის C წვეროდან α სიბრტყემდე, თუ AB=10 სმ-ს.

9. ABC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზაზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც AC კათეტთან 30°-იან კუთხეს ადგენს. იპოვე კუთხე ამ სიბრტყესა და სამკუთხედის სიბრტყეს შორის.

10. ABC ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის AB ჰიპოტენუზაზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყესთან 45°-იან კუთხეს ადგენს. იპოვე კუთხე ამ სიბრტყესა და სამკუთხედის AC კათეტს შორის.



ნახ. 7

11. ABC მართკუთხა სამკუთხედში AB ჰიპოტენუზა 10 სმ-ია. ჰიპოტენუზაზე გავლებულია α სიბრტყე, რომელიც თითოეულ კათეტთან 45°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვე მანძილი C წვეროდან α სიბრტყემდე.

12. რა კუთხითაა დახრილი ბრტყელი ფიგურა სიბრტყესთან, თუ მისი ფართობი ორჯერ აღემატება ამ სიბრტყეზე მისი გეგმილის ფართობს?

13. α სიბრტყეში მდებარე ABCD ოთხკუთხედის ფართობი 4 დმ^2-ის ტოლია. ვიპოვოთ ABCD ოთხკუთხედის β სიბრტყეზე გეგმილის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ α და β სიბრტყეებს შორის კუთხე 45°-ის ტოლია.

14. საერთო ჰიპოტენუზის მქონე ორი ტოლი ტოლფერდა მართკუთხა ABC და ACD სამკუთხედის სიბრტყეები ურთიერთმართობულია. იპოვე მანძილი B და D წვეროებს შორის, თუ AB=3 სმ.

15. საერთო AB ფუძის მქონე ორი ტოლფერდა ABC და ABD სამკუთხედი ერთმანეთთან 60°-იან ორწახნაგა კუთხეს ადგენს (ნახ.7). AB= 16 სმ, AC=10 სმ, AD =17 სმ. იპოვე მანძილი სამკუთხედების წვეროებს შორის.

16. ABCD კვადრატის AD=20 სმ გვერდზე გავლებულია α სიბრტყე ისე, რომ C წერტილი ამ სიბრტყიდან $10\sqrt{2}$ სმ-ითაა დაშორებული. იპოვე კუთხე: ა) კვადრატის სიბრტყესა და α სიბრტყეს შორის; ბ) რომელსაც კვადრატის დიაგონალი ადგენს α სიბრტყესთან.

17. იპოვე წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ ფუძის გვერდია a, ხოლო გვერდითი წახნაგის ფუძის სიბრტყესთან დახრის კუთხეა 45°.

18. იპოვე წესიერი სამკუთხა პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ ფუძის გვერდია a, ხოლო გვერდითი წახნაგის ფუძის სიბრტყესთან დახრის კუთხე 60°.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

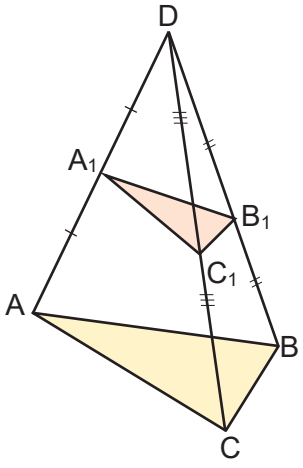
- ორწახნაგა კუთხის ხაზოვანი კუთხის აგება;
- დახრილი ფიგურისა და გეგმილი ფიგურის ფართობთა შორის კავშირი.

აბა, სცადე!

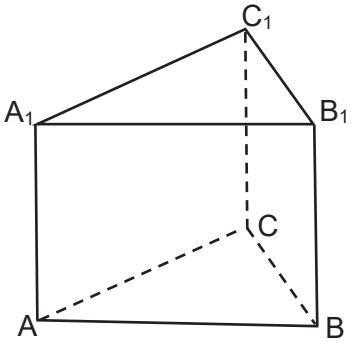
ორად გაკეცილი ფურცლის ერთ წახნაგზე A წერტილში მყოფ ჭიანჭველას მეორე წახნაგზე B წერტილში თაფლის წვეთისკენ მიეჩქარება. მოუძებნე ჭიანჭველას ნაკეცი ხაზის ის წერტილი, რომელზე გავლის შემთხვევაშიც უმოკლესი გზით მივა თაფლთან.



მეორე თავის დამატებითი სავარჯიშოები



ნახ. 1



ნახ. 2

1. მოცემული ოთხი წერტილიდან ყოველ სამზე გავლებულია სიბრტყე. რამდენი სიბრტყეა გავლებული და არის თუ არა მათ შორის თანაუკვეთი სიბრტყეები, თუ ცნობილია, რომ მოცემული წერტილები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ?

2. მოცემული ოთხი წერტილიდან ყოველ ორზე გავლებულია წრფე. აცდენილ წრფეთა რამდენი წყვილია მიღებული, თუ ცნობილია, რომ მოცემული წერტილები ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ?

3. ABC ტოლფერდა სამკუთხედის AC ფუძის D შუაწერტილიდან ამ სამკუთხედის სიბრტყისადმი გავლებულია DK მართობი. დაამტკიცე, რომ AC⊥BK.

4. 1-ელ ნახაზზე D წერტილი ABC სიბრტყის გარეთაა აღებული. ნახაზის მიხედვით დაამტკიცე, რომ $ABC \| A_1B_1C_1$.

5. DABC პირამიდის ფუძეა ABC მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის AB ჰიპოტენუზის სიგრძეა 20 სმ და $\sin\angle A=0,6$. DC წიბოზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ $\frac{DM}{MC}=\frac{2}{3}$.

M წერტილზე გავლებულია ABC სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. იპოვე კვეთაში მიღებული სამკუთხედის: ა) პერიმეტრი; ბ) ფართობი.

6. 6 სმ-ის სიგრძის AB მონაკვეთი ძევს α სიბრტყის გარეთ. მისი ბოლოები სიბრტყისაგან დაშორებულია AM=8 სმ-ითა და BN=5 სმ-ით. გამოთვალე AB-სა და α სიბრტყეს შორის კუთხის სიდიდე.

7. $ABCA_1B_1C_1$ სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგები კვადრატებია (ნახ. 2). გამოთვალე ABC და ABC_1 სიბრტყეებს შორის კუთხის ტანგენსი.

8. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძეა 12 სმ. სამკუთხედის სიბრტყიდან რა მანძილზეა წერტილი, რომელიც სამკუთხედის სამივე წვეროდან 10 სმ-ითაა დაშორებული?

9. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდის სიგრძეა 10 სმ, ხოლო ფუძის – 12 სმ. სამკუთხედში ჩახაზული წრის ცენტრიდან აღმართულია 4 სმ სიგრძის მართობი. იპოვე მანძილები ამ მართობის ბოლოდან სამკუთხედის გვერდებამდე.

10. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოს სიგრძეა 12 სმ, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან 60°-იან კუთხეს ადგენს. იპოვე პირამიდის: ა) ფუძის ფართობი; ბ) გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

11. მოცემულია $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი. დაამტკიცე, რომ $AB_1D_1 \| BDC_1$. იპოვე AB_1D_1 და BDC_1 სამკუთხედების ფართობები, თუ წიბოს სიგრძე 6 სმ-ია.

12. α სიბრტყეში მდებარე კვადრატის გვერდი 2 დმ-ია. ვიპოვოთ კვადრატის β სიბრტყეზე გეგმილის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ α და β სიბრტყეებს შორის კუთხე 45°-ის ტოლია.

13. ABC მართკუთხა სამკუთხედში AB ჰიპოტენუზა 20 სმ-ია. ჰიპოტენუზაზე გავლებულია α სიბრტყე, რომელიც თითოეულ კათეტთან 30°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვე მანძილი C წვეროდან α სიბრტყემდე.

14. ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე გავლებულია წრფე, რომელიც მეორე წახნაგთან 30°-იან, ხოლო წიბოსთან 45°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვე ორწახნაგა კუთხის ზომა.

15. 60°-იანი ორწახნაგა კუთხის შიგნით აღებული წერტილიდან ერთ წახნაგამდე მანძილია a, ხოლო მეორე წახნაგამდე – b. გაიგე მანძილი ამ წერტილიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე.

16. დაამტკიცე, რომ თუ პირამიდის წვეროს გეგმილი ფუძეში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია, მაშინ:

ა) წვეროდან ფუძის გვერდებამდე მანძილები ტოლია;

ბ) ფუძის გვერდებთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეები ტოლია;

გ) თუ ფუძის გვერდთან ორწახნა კუთხის სიდიდეა φ, მაშინ $S_{\text{გვ}} = \frac{S_{\text{ფ}}}{\cos\varphi}$.

აბა, სცადე!

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედია. მისი B_1D დიაგონალი წახნაგებთან ადგენს α, β, γ კუთხეებს. გამოთვალე:

ა) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$;

ბ) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$.

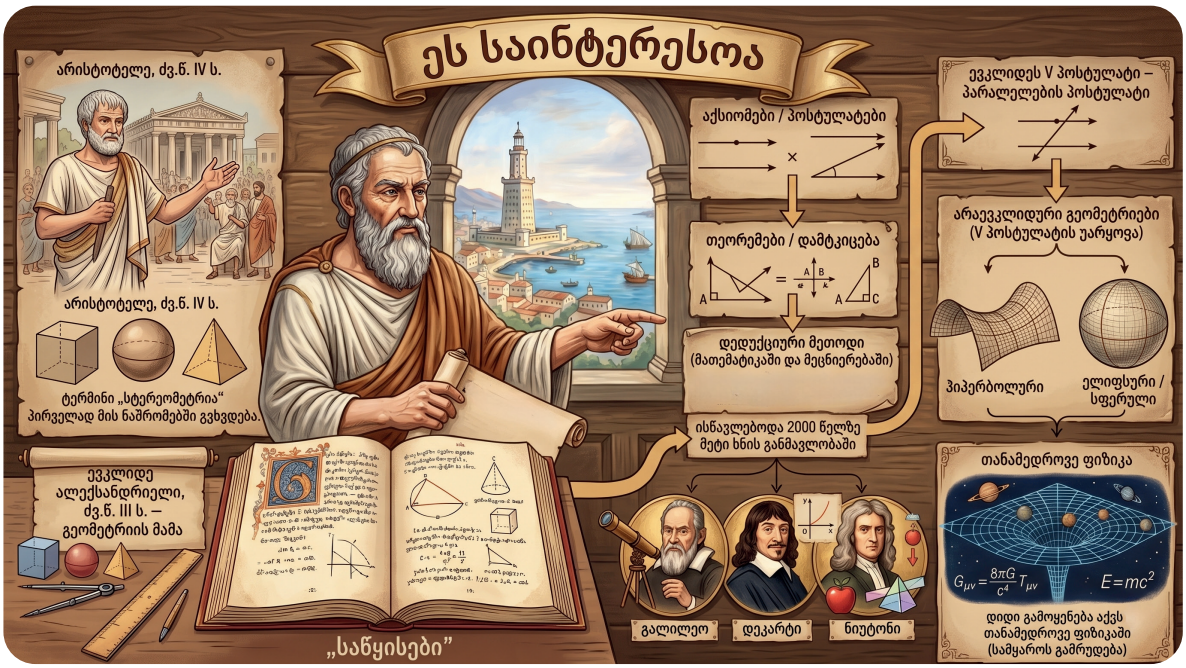
წყვილებში სამუშაო (პროექტი)

შენობა, რომლის სიგრძე და სიგანე 10-10 მეტრია, გადახურულია ერთი საერთო გვერდის მქონე ორი ტოლი მართკუთხედის ფორმის სახურავით, რომელთა სიბრტყეებს შორის 90°-იანი კუთხეა. სახურავის ქვეშ (პირველი სართულის ჭერს ზემოთ) უნდა ჩაშენდეს შესაძლო უდიდესი მოცულობის მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ოთახი. გაარკვიეთ:

ა) რა სიმაღლე უნდა ჰქონდეს ოთახს?

ბ) რა იქნება ოთახის ფართობი და მოცულობა?







ევკლიდე ალექსანდრიელი

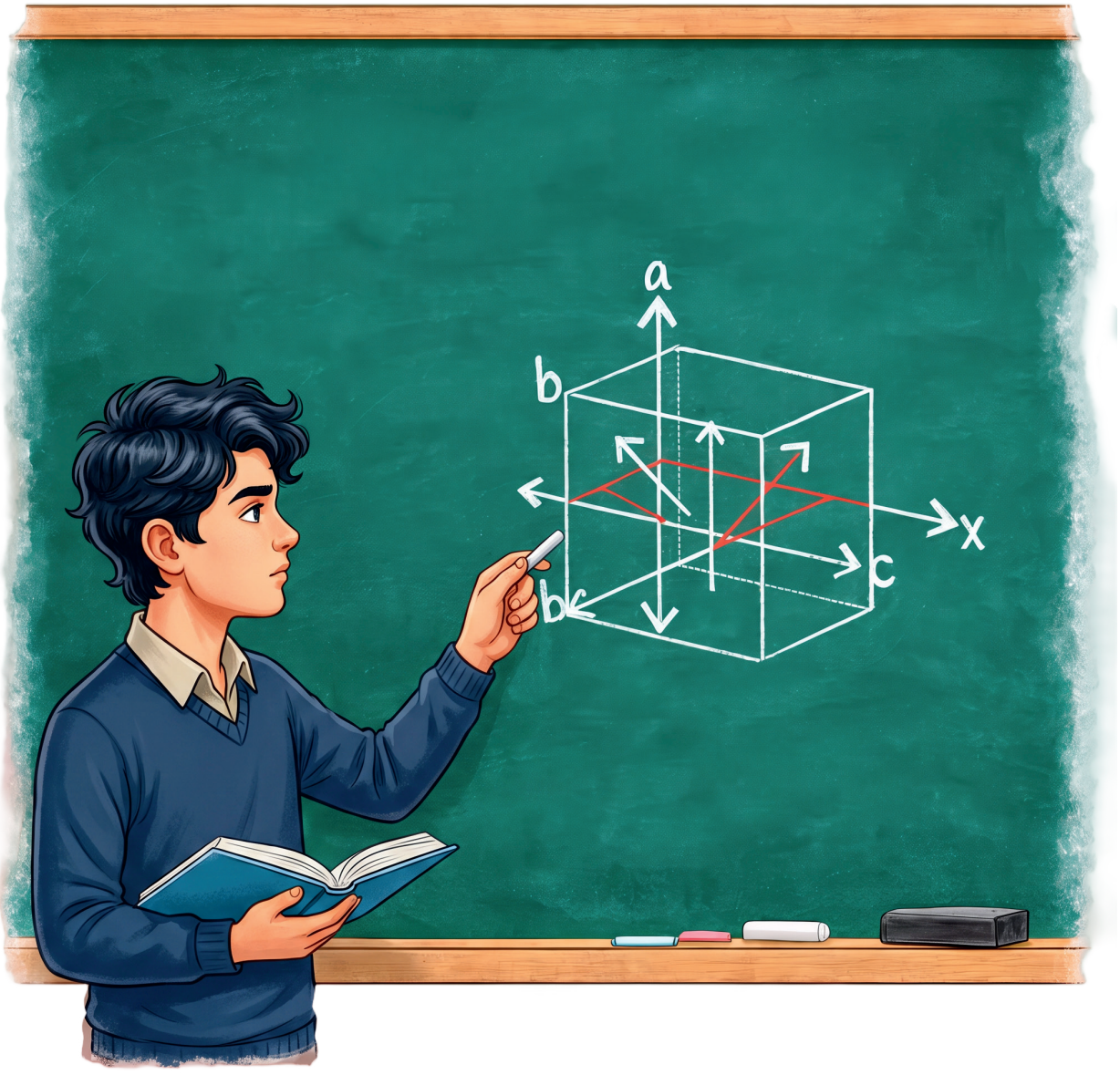
„გეომეტრიაში არ არსებობს სამეფო გზა!“ — ასე უპასუხა ევკლიდემ (ძვ.წ. III ს.) ეგვიპტის მმართველს, რომელსაც გეომეტრიის მარტივად სწავლა სურდა.

ევკლიდეს უნაკლო ლოგიკა იმდენად სრულყოფილია, რომ აბრაამ ლინკოლნი ამ წიგნს საკუთარი აზროვნების გასავარჯიშებლად იყენებდა.

ტერმინი „სტერეომეტრია“ ჯერ კიდევ ჩვენ წელთაღიცხვამდე მე-4 საუკუნეში გვხვდება არისტოტელეს ნაშრომებში. სტერეომეტრიისა და მთლიანად გეომეტრიის განვითარებაში ეპოქალური მნიშვნელობისაა ევკლიდე ალექსანდრიელის ნაშრომი „საწყისები“ (ძვ.წ. III ს.). ამ ნაშრომში, რომელიც 13 წიგნისაგან შედგება, მათემატიკის სხვადასხვა დარგთან ერთად, ჩამოყალიბებულია გეომეტრიის აქსიომური თეორია, რამაც საფუძველი დაუდო მათემატიკაში და, ზოგადად, მეცნიერებაში დებულებათა დასაბუთება-დამტკიცების დედუქციურ მეთოდს. ევკლიდეს ნაშრომით ისწავლებოდა მათემატიკა 2000 წელზე მეტი ხნის განმავლობაში. ამ ნაშრომებზე აღიზარდნენ შუა საუკუნეების ისეთი დიდი მეცნიერები, როგორებიც იყვნენ გალილეო გალილეი, რენე დეკარტი, ისააკ ნიუტონი და სხვ.

მოგვიანებით განვითარდა ე. წ. არაევკლიდური გეომეტრიები, რომელთა საფუძველს წარმოადგენს ევკლიდეს მეხუთე პოსტულატის (აქსიომის) უარყოფა (ამ პოსტულატის თანახმად წრფის გარეთ მდებარე წერტილიდან წრფისადმი ერთადერთი პარალელური წრფის გავლება შეიძლება). არაევკლიდურ გეომეტრიას დიდი გამოყენება აქვს თანამედროვე ფიზიკაში.

თავი 3. ვექტორები



ამ თავში ისწავლი:

- მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სივრცეში;
- წერტილებს შორის მანძილის კოორდინატებით გამოსახვას;
- წრფივ მოქმედებებს ვექტორებზე;
- ვექტორის კოორდინატებს;
- კოლინეარულ და არაკოლინეარულ ვექტორებს სიბრტყეზე;
- კომპლანალურ და არაკომპლანარულ ვექტორებს სივრცეში;
- ვექტორების სკალურ ნამრავლს და მის თვისებებს;
- ორტების ცნებას და მათ კოორდინატებს;
- ვექტორების მართობულობის აუცილებელ და საკმარის პირობას;
- სიბრტყის გარდაქმნებს და მათ კომპოზიციებს.



ვექტორი არის მნიშვნელოვანი მათემატიკური ცნება, რომელიც გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა საჭიროა სიდიდის და მიმართულების ერთდროულად აღწერა. ვექტორები ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა სფეროში:

ფიზიკაში – ისეთი ფიზიკური სიდიდეების აღსაწერად, როგორებიცაა ძალა, სიჩქარე, აჩქარება და სხვ.;

ასტრონომიაში – პლანეტების მოძრაობის აღსაწერად;

გეომეტრიაში – გეომეტრიული გარდაქმნების დასახასიათებლად და ამოცანების ამოსახსნელად;

ნავიგაციაში – მიმართულებისა და მანძილის საჩვენებლად;

ტექნიკაში – საინჟინრო გამოთვლების ჩასატარებლად;

კომპიუტერულ გრაფიკაში – თამაშების შესაქმნელად და სხვ.

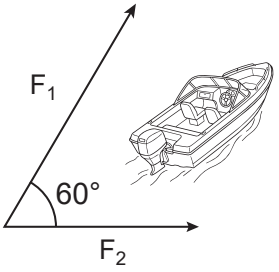
თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

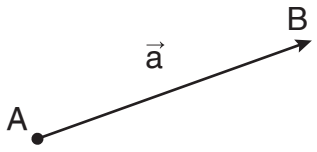
- წერტილის კოორდინატების დადგენას და წერტილის პოვნას მისი კოორდინატებით;
- ვექტორების ჯამისა და რიცხვზე ნამრავლის გრაფიკულ გამოსახვას;
- ვექტორისა და ვექტორებზე მოქმედებების კოორდინატებში ჩაწერას;
- ვექტორის წარმოდგენას ორტების საშუალებით;
- კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორების ამოცნობას;
- ვექტორის სიგრძისა და ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლას;
- ვექტორების გამოყენებას გეომეტრიული ამოცანების ამოსახსნელად;
- ვექტორების გამოყენებას პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად;
- სიბრტყის გარდაქმნების ჩაწერას კოორდინატებში.

3.1 ვექტორები სიბრტყეზე

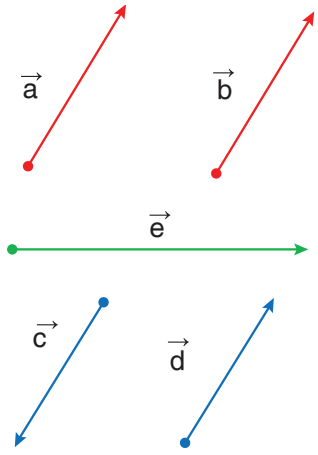
მიზანი. უნდა შეძლო:

- **კოლინეარული, არაკოლინეარული, თანამიმართული და საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორების განმარტება, ამოცნობა და დემონსტრირება;**
- **ვექტორებზე წრფივი მოქმედებების შესრულება და ნახაზზე დემონსტრირება.**





ნახ. 1



ნახ. 2

ამოცანა 1. მდინარეში მოძრავ ნავზე მოქმედებს ორი ძალა: ნავის მოტორის ძალა F_1=80 ნიუტონი და მდინარის დინების ძალა F_2=50 ნიუტონი. ძალებს შორის კუთხე 60°-ის ტოლია. გამოვთვალოთ ამ ორი ძალის ტოლქმედი ძალის სიდიდე.

ამოცანაში მოცემული ძალები **ვექტორული სიდიდეებია,** რადგან ძალა ზომასთან ერთად მოქმედების მიმართულებითაც ხასიათდება. ვექტორული სიდიდეებია, აგრეთვე: სიჩქარე, აჩქარება, წონა და სხვ.

ვექტორებს მიმართულების მქონე მონაკვეთებით გამოსახავენ. 1-ელ ნახაზზე მოცემულია $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი. მისი სიგრძე იმავე AB მონაკვეთის სიგრძეა, ხოლო მიმართულება AB სხივის მიმართულება. A წერტილს $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სათავე, ანუ საწყისი წერტილი, ხოლო B წერტილს $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის წვერო, ანუ ბოლო წერტილი ეწოდება. ვექტორი შეიძლება ერთი პატარა ლათინური ასოთიც აღვნიშნოთ. მაგალითად, 1-ელ ნახაზზე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი იგივე $\vec{a}$ ვექტორია.

თუ ვექტორის სათავე და ბოლო წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ასეთ ვექტორს **ნულოვანი ვექტორი** ეწოდება. ნულოვან ვექტორს ჩაწერენ შემდეგი სიმბოლოთი $\vec{0}$.

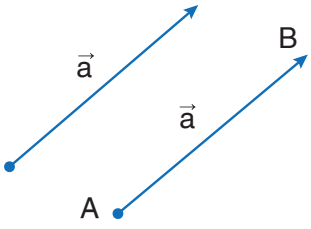
ვექტორებს, რომელთა გამომსახველი მონაკვეთები ერთ წრფეზე ან პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ, **კოლინეარული** ვექტორები ეწოდება. ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის კოლინეარულად ითვლება. მე-2 ნახაზზე $\vec{a}$ და $\vec{b}$, აგრეთვე, $\vec{c}$ და $\vec{d}$ კოლინეარული ვექტორები, ხოლო $\vec{a}$ და $\vec{e}$ ისევე, როგორც $\vec{e}$ და $\vec{c}$, **არაკოლინეარული** ვექტორებია.

კოლინეარული ვექტორები შეიძლება იყოს **თანამიმართული** ან **საწინააღმდეგოდ მიმართული.** მე-2 ნახაზზე თანამიმართული ვექტორებია $\vec{a}$ და $\vec{b}$, ხოლო საწინააღმდეგოდ მიმართული – $\vec{c}$ და $\vec{d}$.

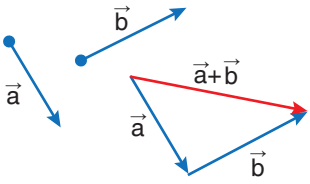
$\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეს a-თი, ხოლო $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძეს AB-თი აღვნიშნავთ. ნულოვანი ვექტორის სიგრძე ნულის ტოლია, მიმართულება კი არ აქვს.

ორ ვექტორს **ტოლი** ეწოდება, თუ ისინი თანამიმართული ვექტორებია და ტოლი სიგრძისაა. მე-2 ნახაზზე ასეთებია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები. $\vec{c}$ და $\vec{d}$ სიგრძით ტოლი, მაგრამ არატოლი ვექტორებია, რადგან მათ განსხვავებული მიმართულება აქვთ.

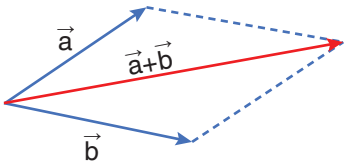
თუ ვექტორს პარალელურად გადავიტანთ, მივიღებთ მის



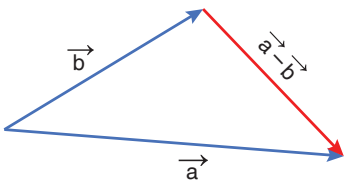
ნახ. 3



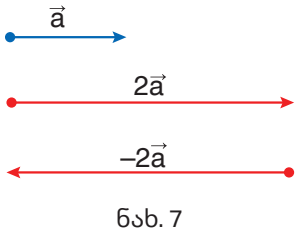
ნახ. 4



ნახ. 5



ნახ. 6



ნახ. 7

ტოლ ვექტორს. მე-3 ნახაზზე მოცემული $\vec{a}$ ვექტორი პარალელური გადატანით მის ტოლ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორში გადავიდა. ამიტომ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორსაც იმავე $\vec{a}$ ასოთი აღვნიშნავთ და ვამბობთ: $\vec{a}$ ვექტორი მოვდეთ A წერტილში.

ვთქვათ, მოცემულია ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი. $\vec{b}$ ვექტორი მოვდოთ $\vec{a}$ ვექტორის ბოლოში (ნახ. 4). ვექტორს, რომელიც აერთებს $\vec{a}$ ვექტორის სათავეს $\vec{b}$ ვექტორის ბოლოსთან, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი ეწოდება.

შეკრების ამ წესს ვექტორების შეკრების **სამკუთხედის წესი** ეწოდება.

ადვილი სანახავია, რომ მართებულია ტოლობები:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a} \text{ და } (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

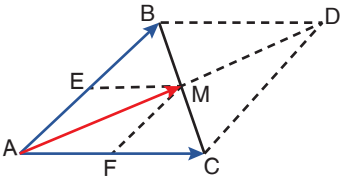
არაკოლინეარული ვექტორების შემთხვევაში, შეკრების სამკუთხედის წესის გარდა, არსებობს შეკრების **პარალელოგრამის** წესი. ამ წესის მიხედვით შესაკრები ვექტორები უნდა მოვდოთ ერთ წერტილში და ამ ვექტორებზე, როგორც მეზობელ გვერდებზე, ავაგოთ პარალელოგრამი. აგებული პარალელოგრამის ის დიაგონალი, რომელიც მოდების წერტილიდან გამოდის და მიმართულია მოპირდაპირე წვეროსკენ, იქნება მოცემულ ვექტორთა ჯამი (ნახ.5). პარალელოგრამის წესიდან თვალსაჩინოა, რომ ვექტორთა შეკრებას აქვს გადანაცვლებადობის თვისება: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ (ნახ. 6).

$\vec{a}$ ვექტორის $\alpha\neq 0$ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ისეთ ვექტორს, რომლის სიგრძეა $|\alpha|a$, ხოლო მიმართულება ემთხვევა $\vec{a}$-ს მიმართულებას, თუ $\alpha>0$ და $\vec{a}$-ს საწინააღმდეგო მიმართულებას, თუ $\alpha<0$. თუ $\alpha=0$, მაშინ $0\vec{a}=\vec{0}$. მე-7 ნახაზზე ნაჩვენებია $\vec{a}$ ვექტორის 2-ზე და –2-ზე გამრავლების შედეგად მიღებული ვექტორები.

თუ $\alpha=-1$, მაშინ $\alpha\vec{a}=-1\vec{a}=-\vec{a}$. $-\vec{a}$ ვექტორს $\vec{a}$-ს მოპირდაპირე ვექტორი ეწოდება: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$. მოპირდაპირე ვექტორებს ტოლი სიგრძე და ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ. ნებისმიერი $\overrightarrow{AB}$ ვექტორისათვის სრულდება ტოლობა: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

$\vec{b}=\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+\alpha_3\overrightarrow{a_3}+\ldots.+\alpha_n\overrightarrow{a_n}$ ვექტორს, სადაც $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \ldots., \overrightarrow{a_n}$ ვექტორების **წრფივი კომბინაცია** ეწოდება.



ნახ. 8

ამოცანა 2. ვთქვათ, AM მონაკვეთი ABC სამკუთხედის მედიანაა. გამოვსახოთ $\overrightarrow{AM}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის საშუალებით.

ამოხსნა: E და F წერტილები AB და AC გვერდების შუა წერტილებია (ნახ. 8). ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესის თანახმად, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

მეორე მხრივ, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. აქედან მივიღებთ:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}. \qquad (1)$$

პასუხი: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

მე-8 ნახაზზე ABDC ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. ამიტომ:

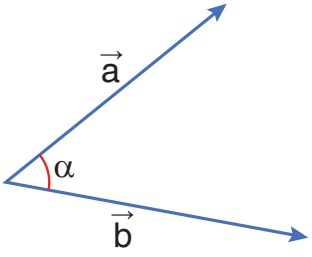
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right). \qquad (2)$$

თუ (1) და (2) ტოლობებს შევადარებთ, მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

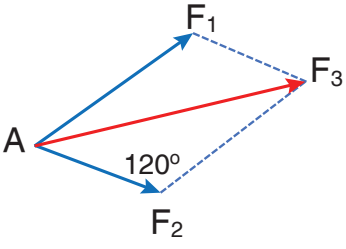
შევნიშნოთ, რომ ანალოგიური ტოლობა მართებულია ნებისმიერი α ნამდვილი რიცხვისა და ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისათვის:

$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}.$$



ე.ი. ვექტორების ჯამის რიცხვზე გასამრავლებლად შეგვიძლია, თითოეული შესაკრები გავამრავლოთ რიცხვზე და მიღებული ვექტორები შევკრიბოთ.

ორ ვექტორს შორის კუთხე მათ მიმართულებებს შორის კუთხეს ეწოდება. იმისათვის, რომ ვექტორებს შორის კუთხე ვიპოვოთ, ისინი ერთ წერტილში უნდა მოვდოთ. ცხადია, თანამიმართულ ვექტორებს შორის კუთხე 0°-ის, ხოლო საწინააღმდეგოდ მიმართულ ვექტორებს შორის კუთხე 180°-ის ტოლია. არაკოლინეარულ ვექტორებს შორის კუთხე (0°; 180°) შუალედშია მოთავსებული.



ნახ. 9

დავუბრუნდეთ 1-ელ ამოცანას. მე-9 ნახაზზე ნავზე მოქმედი F_1 და F_2 ძალები $\overrightarrow{AF_1}$ და $\overrightarrow{AF_2}$ ვექტორებით არის გამოსახული, ხოლო ამ ძალების ტოლქმედი ძალაა $\overrightarrow{AF_3}$, რომელიც $\overrightarrow{AF_1}$ და $\overrightarrow{AF_2}$ ვექტორების ჯამის ტოლია. ამ ძალის სიდიდის, ანუ AF_3-ის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ კოსინუსების თეორემით AF_2F_3 სამკუთხედში:

$AF_3^2=AF_1^2+AF_2^2-2AF_1\cdot AF_2\cdot\cos120^\circ=6400+2500+4000=12900$.

$AF_3\approx113{,}58$ ნ.

პასუხი: ტოლქმედი ძალის სიდიდეა 113,58 ნ.

უპასუხე კითხვებს:

1. რას ეწოდება ვექტორი?
2. რა მახასიათებლები გააჩნია ვექტორს?
3. რა ვექტორული სიდიდეები იცი?
4. როგორ ვექტორებს ეწოდება კოლინეარული ვექტორები?
5. როგორ ვექტორებს ეწოდება თანამიმართული ვექტორები?
6. როგორ ვექტორებს ეწოდება ტოლი ვექტორები?
7. შეიძლება თუ არა ორ ტოლ ვექტორს სხვადასხვა საწყისი წერტილი ჰქონდეს?
8. როგორ განიმარტება ვექტორთა ჯამი, სხვაობა და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი?
9. როგორ ჩამოაყალიბებ ვექტორების შეკრების სამკუთხედისა და პარალელოგრამის წესებს?
10. როგორ განიმარტება ვექტორთა წრფივი კომბინაცია?
11. როგორ ვექტორებს ეწოდება მოპირდაპირე ვექტორები?
12. როგორ შეგვიძლია ვექტორების ჯამის რიცხვზე გამრავლება?

სავარჯიშოები

1. ჩაწერე ვექტორი, რომლის ბოლო წერტილია A, ხოლო საწყისი წერტილი – B.
2. რამდენი განსხვავებული ვექტორის მოცემაა შესაძლებელი: ა) მართკუთხედის გვერდებით? ბ) ტრაპეციის გვერდებით?
3. თუ ABCD ტრაპეციის ფერდებია AB და CD, მაშინ $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ვექტორები:

   ა) ტოლია; ბ) არაკოლინეარულია;

   გ) კოლინეარულია; დ) თანამიმართულია.
4. თუ ABCD ტრაპეციის ფერდებია AB და CD, მაშინ $\overline{BC}$ და $\overline{AD}$ ვექტორები:

   ა) ტოლია; ბ) არაკოლინეარულია; გ) თანამიმართულია; დ) საწინააღმდეგოდ მიმართულია.
5. მოცემული პარალელოგრამის ნახაზის მიხედვით დაადგინე, რომელია:

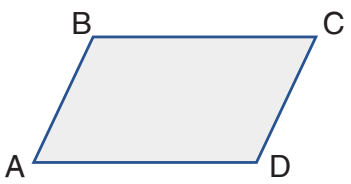
   ა) $\overline{AB}$ ვექტორის ტოლი ვექტორი;

   ბ) $\overline{AB}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი;

   გ) $\overline{AB}$ და $\overline{AD}$ ვექტორების ჯამი;

   დ) $\overline{AB}$ და $\overline{AD}$ ვექტორების სხვაობა;

   ე) არაკოლინეარულ ვექტორთა წყვილები.



6. დაადგინე, მოცემული ვექტორებიდან რომლებია ნულოვანი:

ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; ბ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$; გ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$;

დ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}$; ე) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$.

7. მოცემული ტოლობებიდან რომელი არაა მართებული?

ა) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; ბ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$;

გ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$; დ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

8. $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ტოლი ვექტორებია, ამასთან, ეს ვექტორები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. რა ფიგურაა ABDC ოთხკუთხედი?

9. $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული და განსხვავებული სიგრძის ვექტორებია, ამასთან, ეს ვექტორები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს. რა ფიგურაა ABCD ოთხკუთხედი?

10. მოცემულია არაკოლინეარული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები. რომელი ვექტორია $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის კოლინეარული?

ა) $\vec{a}-\vec{b}$; ბ) $2\vec{a}+3\vec{b}$; გ) $2\vec{a}-3\vec{b}$;

დ) $2\vec{a}+2\vec{b}$; ე) $2\vec{a}-2\vec{b}$.

11. გაამარტივე გამოსახულება:

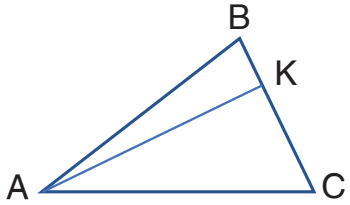
$$6\left(0,5\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+4\left(0,25\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right).$$

12. გაამარტივე გამოსახულება:

$$10\left(\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}\right)+8\left(\frac{1}{4}\vec{a}-0,5\vec{b}\right).$$

13. დაამტკიცე ტოლობა: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$.

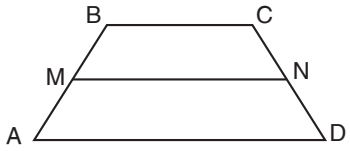
14. ABC სამკუთხედში BC გვერდის შუა წერტილია E. გამოსახე $\overrightarrow{AE}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების საშუალებით.

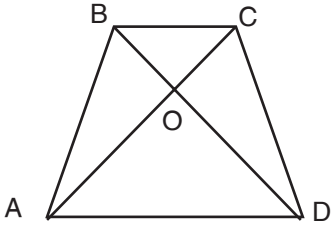


15. ნახაზზე მოცემულ ABC სამკუთხედში BK:KC=1:2. გამოსახე $\overrightarrow{AK}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების საშუალებით.

16. წერტილზე მოქმედებს ორი ძალა. ერთი ძალის სიდიდეა 20 ნიუტონი, მეორის – 16 ნიუტონი, ხოლო ძალებს შორის კუთხე – 120°. გამოთვალე ტოლქმედი ძალის სიდიდე.

17. წერტილზე მოქმედებს ორი ძალა. ერთი ძალის სიდიდეა 8 ნიუტონი, მეორის – 6 ნიუტონი. გამოთვალე ამ ძალებს შორის კუთხე, თუ მათი ტოლქმედი ძალის სიდიდეა 10 ნიუტონი.





18. ABCD ტრაპეციაში MN შუახაზია. გამოსახე $\overrightarrow{MN}$ ვექტორი $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორებით.

19. დაამტკიცე, რომ: ა) ორი თანამიმართული ვექტორის ჯამის სიგრძე ამ ვექტორების სიგრძეთა ჯამის ტოლია; ბ) ორი არაკოლინეარული ვექტორის ჯამის სიგრძე ამ ვექტორების სიგრძეთა ჯამზე ნაკლებია.

20. დაამტკიცე, რომ ორი თანამიმართული არანულოვანი ვექტორიდან თითოეული მეორის დადებით რიცხვზე გამრავლებით მიიღება.

21. დაამტკიცე, რომ ორი საწინააღმდეგოდ მიმართული არანულოვანი ვექტორიდან თითოეული მეორის უარყოფით რიცხვზე გამრავლებით მიიღება.

22. ნახაზზე მოცემულია ABCD ტრაპეცია. გამოსახე $\overrightarrow{AO}$ ვექტორი $\overrightarrow{AD}$ და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორების საშუალებით, თუ AD=2BC.

23. ABC სამკუთხედში AB=5 სმ, AC=8 სმ. AK ბისექტრისაა. გამოსახე $\overrightarrow{AK}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების საშუალებით.

24. ABC სამკუთხედში $\angle C=90°$, AC= 5 სმ, BC=10 სმ. CK სიმაღლეა. გამოსახე $\overrightarrow{CK}$ ვექტორი $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების საშუალებით.

25. დაამტკიცე, რომ თუ M არის ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილი, მაშინ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

26. დაამტკიცე, რომ თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, მაშინ იმავე სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი $\vec{c}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით წარმოდგება.

27. გამოთვალე საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე A(3; –2) და B(–3; 2) წერტილებს შორის მანძილი.

28. საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე A წერტილის კოორდინატებია (2; 5), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (–1; 1). გამოთვალე AB მონაკვეთის სიგრძე.

27-28

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- ტოლი, კოლინეარული, არაკოლინეარული, თანამიმართული და საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორების ამოცნობა;
- ვექტორების შეკრება, გამოკლება და რიცხვზე გამრავლება.

3.2 ვექტორის კოორდინატები

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **ვექტორის კოორდინატების განმარტება და გამოთვლა;**
- **ვექტორის სიგრძის გამოთვლა კოორდინატების საშუალებით;**
- **ვექტორის წარმოდგენა ორტების საშუალებით;**
- **ვექტორებზე წრფივი მოქმედებების კოორდინატებით ჩაწერა.**

საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე **ვექტორის კოორდინატები** მისი წვეროსა და სათავის კოორდინატების სხვაობას ეწოდება. ე.ი. თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის A სათავის კოორდინატებია $(x_1; y_1)$, ხოლო B წვეროს კოორდინატებია $(x_2; y_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(x_2-x_1; y_2-y_1)$.

თუ ვექტორი კოორდინატთა სათავეშია მოდებული, მაშინ, ცხადია, მისი კოორდინატები დაემთხვევა წვეროს კოორდინატებს. ამიტომ ვექტორის კოორდინატების საპოვნელად ის უნდა მოვდოთ კოორდინატთა სათავეში და დავადგინოთ წვეროს კოორდინატები. 1-ელ ნახაზზე მოცემულია $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი, რომლის კოორდინატებია (x; y).

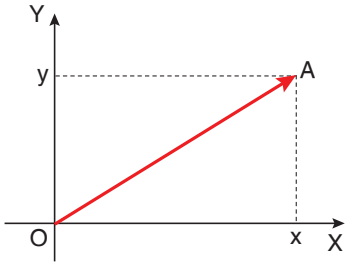
ამოცანა 1. გამოვთვალოთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე, თუ A-ს კოორდინატებია $(x_1; y_1)$ ხოლო B-ს კოორდინატებია $(x_2; y_2)$.

ამოხსნა: ვიცით, რომ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე AB მონაკვეთის სიგრძის, ანუ A და B წერტილებს შორის მანძილის ტოლია:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}\,. \qquad (1)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (x; y), მაშინ (1) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$a=\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (2)$$



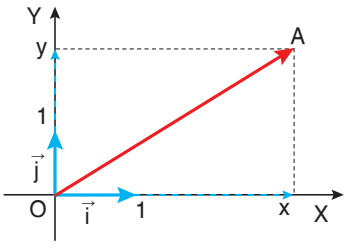
ნახ. 1

ვთქვათ, $\vec{i}$ და $\vec{j}$ შესაბამისად (1; 0) და (0; 1) კოორდინატების მქონე ვექტორებია. მე-2 ნახაზზე ეს ვექტორები ცისფრად არის წარმოდგენილი. ამ ვექტორებს **ორტები** ეწოდება.

ამავე ნახაზზე მოცემულია $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი კოორდინატებით (x; y). როგორც ნახაზიდან ჩანს

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}\,. \qquad (3)$$

მე-3 ტოლობა ნიშნავს, რომ საკოორდინატო სიბრტყეში მოცემული ნებისმიერი ვექტორი წარმოიდგინება ორტების წრფივ კომბინაციად, რომლის კოეფიციენტები ამ ვექტორის კოორდინატებია.



ნახ. 2

ამოცანა 2. ვთქვათ, $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x_1; y_1)$, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x_2; y_2)$. დავადგინოთ $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.

ამოხსნა. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები მე-3 ფორმულის მიხედვით წარმოვადგინოთ $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ორტების საშუალებით:

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\,.$$

ამ ტოლობების შეკრებით და შესაკრებთა დაჯგუფებით მივიღებთ:

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)+\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\right)=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}\ .$$

მიღებული ტოლობიდან ვასკვნით:

ორი ვექტორის ჯამის კოორდინატები შესაკრებთა შესაბამისი კოორდინატების ჯამის ტოლია.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატები კოორდინატების ამ რიცხვზე ნამრავლის ტოლია.

ე.ი. თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (x; y), მაშინ ნებისმიერი α რიცხვისათვის $\alpha\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(\alpha x; \alpha y)$.

მაგალითი. მოცემულია ორი ვექტორი: $\vec{a}(2;-1)$ და $\vec{b}(-3;2)$. გამოვთვალოთ $5\vec{a}-3\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.

ამოხსნა. $5\vec{a}-3\vec{b}$ ვექტორის პირველი კოორდინატია $5\cdot2-3\cdot(-3)=19$, ხოლო მეორე კოორდინატია $5\cdot(-1)-3\cdot2=-11$.

პასუხი: (19; –11).

ამოცანა 3. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წერტილი: A(–3; 1), B(2; –1), C(0; 4) და D(–2; 7). გამოვთვალოთ $4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}$ ვექტორის სიგრძე.

ამოხსნა. პირველ რიგში, დავადგინოთ $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორების კოორდინატები: $\overrightarrow{AB}$ -ს პირველი კოორდინატია $2-(-3)=5$, მეორე კოორდინატი $-1-1=-2$; $\overrightarrow{CD}$ -ს პირველი კოორდინატია $-2-0=-2$, მეორე კოორდინატი $7-4=3$. ამიტომ, $4\overrightarrow{AB}$ -ს კოორდინატებია (20; –8), ხოლო $3\overrightarrow{CD}$ -ს კოორდინატები (–6; 9).

აქედან გამომდინარე, $4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}$ ვექტორის კოორდინატებია $(20-(-6); -8-9)=(26; -17)$. ვექტორის სიგრძის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ მე-2 ფორმულით: $\sqrt{26^2+17^2}=\sqrt{965}$.

პასუხი. $\sqrt{965}$.

შესაძლებელია?

ორი არაკოლინეარული ვექტორის ჯამი და სხვაობა კოლინეარული წყვილი აღმოჩნდეს?

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ დაადგენ საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე ვექტორის კოორდინატებს?
2. რა არის ნულოვანი ვექტორის კოორდინატები?
3. როგორ გამოითვლი ვექტორის სიგრძეს მისი კოორდინატებით?
4. რას უდრის ორი ვექტორის ჯამის კოორდინატები? სხვაობის კოორდინატები?
5. რას უდრის მოცემული ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორის კოორდინატები?
6. რა კოორდინატები აქვს ორტებს?

სავარჯიშოები

1. საკოორდინატო სიბრტყეზე დახაზე ვექტორები, რომლის კოორდინატებია: ა) (0; 2); ბ) (2; 0); გ) (–2; –4); დ) (4; 2); ე) (–0,5; 5); ვ) ($\sqrt{2}$;1); ზ) (1; 1).

2. იპოვე $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ: ა) A წერტილის კოორდინატებია (–4; 2), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (3; 5); ბ) A წერტილის კოორდინატებია (–6; 0), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (0; 8); გ) A წერტილის კოორდინატებია (0,1; 0,3), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (1,1; 3,2); დ) A წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{8}$; 1), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{2}$; –1).

3. გამოთვალე $\overline{AB}$ ვექტორის სიგრძე, თუ: ა) A წერტილის კოორდინატებია (–1; 2), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (3; 5); ბ) A წერტილის კოორდინატებია (–5; 0), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (0; 12); გ) A წერტილის კოორდინატებია (0,1; 0,2), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (1,1; 3,2); დ) A წერტილის კოორდინატებია (–$\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (0; $\sqrt{8}$).

4. გამოთვალე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე, თუ მისი კოორდინატებია: ა) (0; 5); ბ) (5; 0); გ) (–3; 3); დ) (15; –8); ე) (–15; 8); ვ) (cosα; sinα); ზ) (1; tan60°).

5. წარმოადგინე ორტების საშუალებით $\vec{a}$ ვექტორი, თუ მისი კოორდინატებია:
ა) (2; 2); ბ) (3; 2); გ) (–2; 3); დ) (–1; 4); ე) (1; –4); ვ) (0; 5); ზ) (5; 0).

6. დაადგინე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:
ა) $\vec{a}=3\vec{i}+5\vec{j}$; ბ) $\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}$; გ) $\vec{a}=-3\vec{i}-5\vec{j}$;
დ) $\vec{a}=5\vec{j}$; ე) $\vec{a}=3\vec{i}$; ვ) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$.

7. დაადგინე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:
ა) $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$; ბ) $\vec{a}=5\vec{i}+12\vec{j}$; გ) $\vec{a}=-3\vec{i}-4\vec{j}$;
დ) $\vec{a}=7\vec{j}$; ე) $\vec{a}=-5\vec{i}$; ვ) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$; ზ) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$.

8. $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (7; –9). იპოვე:
ა) $-\vec{a}$; ბ) $2\vec{a}$; გ) $-3\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები.

9. გამოთვალე $2\vec{a}+3\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:
ა) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (6; –9), ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (–4; 6); ბ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (–0,5; 1), ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (–1; 0,5); გ) $\vec{a}=3\vec{i}$, ხოლო $\vec{b}=-5\vec{j}$, სადაც $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ორტებია;
დ) $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$, ხოლო $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}$, სადაც $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ორტებია.

10. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წერტილი: A(2,2; 1), B(–0,8; 2), C(1,2; 0,4) და D(5,7; –0,1). გამოთვალე $3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$ ვექტორის კოორდინატები.

11. გამოთვალე $\vec{a}+2\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:

ა) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (7; –4) ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (–2; 0);

ბ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (–6; 1), ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (–3; 2);

გ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(2\sin\alpha\ ; 0)$, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია $(0; \cos\alpha)$;

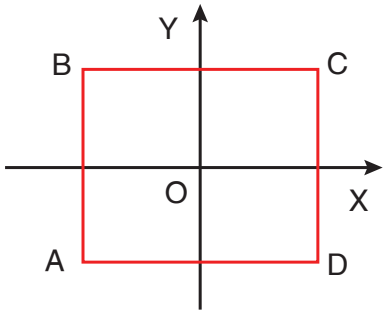
დ) $\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}$, ხოლო $\vec{b}=3\vec{i}-6\vec{j}$, სადაც $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ერთეულოვანი ვექტორებია.

12. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია ოთხი წერტილი: A(2; 1), B(8; –3), C(4; 4) და D(5; 0). გამოთვალე $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ ვექტორის სიგრძე.

13. ვექტორის სიგრძეა 10 სმ, ხოლო პირველი კოორდინატი – 8 სმ. იპოვე მეორე კოორდინატი.

14. ვექტორის სიგრძეა 17 სმ, ხოლო მეორე კოორდინატი – 15 სმ. იპოვე პირველი კოორდინატი.

15. საკოორდონატო სიბრტყეზე მდებარე ABCD კვადრატის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა, ხოლო გვერდები საკოორდინატო ღერძების პარალელურია. იპოვე $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ კვადრატის გვერდი 2 სმ-ის ტოლია.



16. იპოვე კუთხე $\vec{i}(1;0)$ და $\vec{a}(1;1)$ ვექტორებს შორის.

17. იპოვე კუთხე:

ა) $\vec{a}(1;1)$ და $\vec{b}(-1;0)$ ვექტორებს შორის;

ბ) $\vec{j}(0;1)$ და $\vec{a}(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ ვექტორებს შორის;

გ) $\vec{a}(1;1)$ და $\vec{b}(\sqrt{3};1)$ ვექტორებს შორის.

18. გამოთვალე ვექტორის მიერ $\vec{i}(1;0)$ ვექტორთან შედგენილი კუთხე, თუ მისი კოორდინატებია:

ა) (2; 2); ბ) (–1; –1); გ) $(\sqrt{3}; 1)$;

დ) $(1; \sqrt{3})$; ე) $(-1; -\sqrt{3})$; ვ) $(\sqrt{3}; -1)$.

19. მოცემული კოორდინატების მიხედვით გაარკვიე, რომელი ვექტორებია თანამიმართული და რომელი საწინააღმდეგოდ მიმართული:

ა) (3; 2) და (–6; –4); ბ) (1,5; –5) და (3; 10);

გ) (1; –4) და (3; –12); დ) (0; 7) და (7; 0).

20. იპოვე x, თუ $\vec{a}$ ვექტორი კოორდინატებით (x; 2) და $\vec{b}$ ვექტორი კოორდინატებით (8; x):

ა) თანამიმართული ვექტორებია;

ბ) საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორებია.

21. იპოვე x-ის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ვექტორს კოორდინატებით (x–2; 4–x) ექნება უმცირესი სიგრძე.

22. იპოვე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ მისი სიგრძეა 20 სმ, ხოლო $\vec{a}$ ვექტორის:

ა) თანამიმართული ვექტორის კოორდინატებია (3; 4);

ბ) საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორის კოორდინატებია (6; –8).

23. იპოვე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ $3\vec{a}-4\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (1; –4), ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (2; –3).

24. საკოორდონატო სიბრტყეზე მდებარე ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა, ხოლო B წვეროს კოორდინატებია (0; 1). იპოვე $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ ვექტორის კოორდინატები.

25. წარმოადგინე $\vec{a}$ (4; –9) ვექტორი $\vec{b}$ (2; 1) და $\vec{c}$ (5; –3) ვექტორების საშუალებით.

26. იპოვე α კუთხე [0°; 180°] შუალედიდან, თუ:

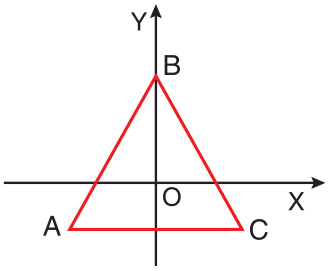
ა) $\cos\alpha=0$; ბ) $\cos\alpha=1$; გ) $\cos\alpha=-1$;

დ) $\cos\alpha=0{,}5$; ე) $\cos\alpha=-0{,}5$; ვ) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

27. სამკუთხედის გვერდებია:
ა) 3 სმ, 3 სმ, 4 სმ; ბ) 3 სმ, 4 სმ, 5 სმ; გ) 4 სმ, 5 სმ, 7 სმ.
იპოვე სამკუთხედის უდიდესი კუთხის კოსინუსი.

28. მოცემული გვერდების მიხედვით დაადგინე, რომელი სამკუთხედია მახვილკუთხა, რომელი მართკუთხა და რომელი ბლაგვკუთხა:

ა) 3 სმ, 5 სმ, 7 სმ; ბ) 8 სმ, 15 სმ, 17 სმ; გ) 13 სმ, 14 სმ, 15 სმ.





რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- ვექტორის კოოდინატების განმარტება;
- ვექტორის წარმოდგენა ორტების საშუალებით;
- ვექტორებზე წრფივი მოქმედებების კოორდინატებით ჩაწერა.

3.3 ვექტორების სკალარული ნამრავლი

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **ვექტორების სკალარული ნამრავლის განმარტება და კოორდინატებით წარმოდგენა;**
- **ვექტორების მართობულობის პირობის ჩამოყალიბება და დამტკიცება;**
- **ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა კოორდინატების საშუალებით.**

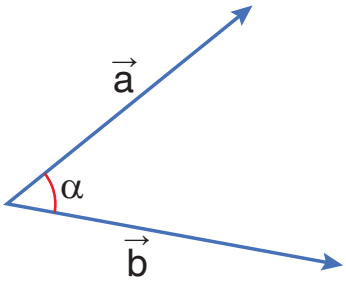
ვექტორების შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების მოქმედებების შედეგად, როგორც ვნახეთ, ისევ ვექტორული სიდიდე მიიღება. ამ პარაგრაფში ორ ვექტორზე ისეთ მოქმედებას განვიხილავთ, რომლის შედეგად სკალარულ სიდიდეს, ანუ რიცხვს მივიღებთ. ამ მოქმედებას **ვექტორების სკალარული ნამრავლი** ეწოდება.

განმარტება. ორი ვექტორის საკალარული ნამრავლი მათი სიგრძეების ამ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსზე ნამრავლს ეწოდება.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების საკალარული ნამრავლი $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ჩანაწერით აღინიშნება. განმარტების თანახმად

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha, \qquad (1)$$

სადაც α მოცემულ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეა. $0°\le\alpha\le180°$.



ცხადია, რომ თუ ორი ვექტორიდან ერთი მაინც ნულოვანი ვექტორია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი იქნება ნულის ტოლი: $\vec{a}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{b}=a\cdot0=0\cdot b=0$.

მაგრამ, სკალარული ნამრავლი 0-ის ტოლი არანულოვანი ვექტორების შემთხვევაშიც შეიძლება აღმოჩნდეს. კერძოდ, როცა ამ ვექტორებს შორის კუთხე 90^o-ის ტოლია. მართლაც, ამ შემთხვევაში $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha= ab\cos90^o=ab\cdot0=0$.

პირიქით, თუ ორი არანულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი 0-ის ტოლი აღმოჩნდა, მაშინ მათ შორის კუთხის კოსინუსი იქნება ნულის ტოლი, და რადგან ვექტორებს შორის კუთხე $[0; 180°]$ შუალედშია, ხოლო ამ შუალედში კოსინუსი მხოლოდ 90^o-ზე ხდება 0, ვასკვნით, რომ ვექტორებს შორის კუთხე 90^o-ის ტოლია. მივიღეთ თეორემა:

ორი არანულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მაშინ და მხოლოდ მაშინაა 0-ის ტოლი, როცა ეს ვექტორები ურთიერთმართობულია. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

იმის გამო, რომ თანამიმართულ ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდე 0 გრადუსია, ხოლო $\cos 0^o=1$, ასეთი ვექტორების სკალარული ნამრავლი მათი სიგრძეების ნამრავლის ტოლი იქნება. კერძოდ,

ვექტორის თავის თავზე სკალარული ნამრავლი, ანუ სკალარული კვადრატი, მისი სიგრძის კვადრატის ტოლია.

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=(\vec{a})^2=a^2.$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ სკალარულ ნამრავლს აქვს გადანაცვლებადობისა და განრიგებადობის თვისებები:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},\ \ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c},$$

ამიტომ ვექტორებზე მოქმედებების დროს შეგვიძლია რიცხვებზე მოქმედებების ანალოგიურად მოვიქცეთ.

თეორემა. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მათი შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლების ჯამის ტოლია.

ანუ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$, სადაც $(x_1; y_1)$ არის $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, ხოლო $(x_2; y_2)$ – $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კოორდინატებია, შესაბამისად $(x_1; y_1)$ და $(x_2; y_2)$. წარმოვადგინოთ ეს ვექტორები ორტების საშუალებით:

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}.$$

გავამრავლოთ სკალარულად ეს ორი ტოლობა და ვისარგებლოთ ტოლობებით:

$$\left(\vec{i}\right)^2=\left(\vec{j}\right)^2=1,\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)\cdot\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}\right)=x_1x_2\left(\vec{i}\right)^2+x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j}+x_2y_1\vec{j}\cdot\vec{i}+y_1y_2\left(\vec{j}\right)^2=x_1x_2+y_1y_2.$$

დამტკიცებული თეორემა ტოლობის სახით შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha=x_1x_2+y_1y_2, \qquad (2)$$

სადაც $(x_1; y_1)$ და $(x_2; y_2)$ შესაბამისად, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კოორდინატებია.

მიღებული ტოლობა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ორ ვექტორს შორის კუთხის კოსინუსი მათი კოორდინატების მიხედვით.

მაგალითი. გამოვთვალოთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი, თუ ამ ვექტორების კოორდინატებია $(x_1; y_1)$ და $(x_2; y_2)$.

ამოხსნა. მე-2 ტოლობიდან $\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{ab}$. თუ ამ ტოლობაში შევიტანთ ვექტორების სიგრძის გამოსათვლელ ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \qquad (3)$$

სკალარული ნამრავლის გამოყენებით მარტივდება ზოგიერთი თეორემის დამტკიცება.

? უპასუხე კითხვებს:

1. რა სიდიდეა ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი?
2. რის ტოლია ორტების სკალარული ნამრავლი?
3. რას უდრის ვექტორის თავის თავზე სკალარული ნამრავლი?
4. რა შემთხვევაშია ორი ვექტორი ურთიერთმართობული?
5. როგორ გამოითვლი ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსს მათი კოორდინატებით?

სავარჯიშოები

1. გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართული ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ a=3 სმ, b=4 სმ.

2. გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ a=2 სმ, b=5 სმ.

3. გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ: ა) a=6 სმ, b=7 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 60°; ბ) a=4 სმ, b=7 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 45°; გ) a=12 სმ, b=11 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 120°; დ) a=1,13 სმ, b=3,27 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 90°.

4. გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ მათი კოორდინატებია: ა) (6; 1) და (–2; 9); ბ) (–3; 0) და (0; 13); გ) $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ და $(\sqrt{8}; 0)$; დ) $(\sqrt{12}; -1)$ და $(\sqrt{3}; 6)$.

5. გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი, თუ მათი კოორდინატებია: ა) (3; 4) და (–3; 4); ბ) (–12; 5) და (5; 12); გ) (6; –8) და (8; 6); დ) (15; 8) და (8; 15).

6. გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, თუ მათი კოორდინატებია: ა) (2; 4) და (–2; –4); ბ) (–5; 7) და (7; 5); გ) (1; 6) და (3; 18); დ) $\left(\sqrt{3};1\right)$ და $\left(1;\sqrt{3}\right)$.

7. იპოვე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, თუ: ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ =1,5, ხოლო a·b=3; ბ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$, ხოლო $a\cdot b=\sqrt{6}$; გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}$, ხოლო a·b=–2.

8. იპოვე x, თუ ვექტორები კოორდინატებით (2; x) და $(x^2; 3)$ ურთიერთმართობული ვექტორებია.

9. მოცემული კოორდინატების მიხედვით დაადგინე, მახვილია, მართია თუ ბლაგვი ვექტორებს შორის კუთხე:
ა) (1; 7) და (–4; 2); ბ) (–10; 5) და (0; –3);
გ) (6; –1) და (1; 6); დ) (11; 12) და (–12; 9).

10. იპოვე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (1; –1), ხოლო $\overline{BC}$ ვექტორის კოორდინატებია (2; 2).

11. $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (11; 1), $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (–9; 10). იპოვე $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორზე სკალარული ნამრავლი.

12. $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეა 3 სმ, $\vec{b}$ ვექტორის სიგრძეა 5 სმ, ხოლო ამ ვექტორებს შორის კუთხეა 30°. იპოვე $2\vec{a}+3\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე.

13. იპოვე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (–2; 1), ხოლო $\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატებია (1; –2).

14. ABC სამკუთხედში AB=5 სმ, BC=8 სმ და AC=7 სმ. გამოთვალე: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$;

15. ABCD პარალელოგრამში AB=3 სმ, BC=4 სმ. გამოთვალე $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

16. გამოთვალე საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე A(–1; –1) და B(5; 7) წერტილებს შორის მანძილი.

17. გამოთვალე AB მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია (3; 5), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (–6; 9).

18. გამოთვალე ABC სამკუთხედის AD მედიანის სიგრძე, თუ A წერტილის კოორდინატებია (1; –2), B წერტილის კოორდინატებია (–4; 10), ხოლო C წერტილის კოორდინატებია (0; –6).

19. გამოთვალე ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია (0; 1), B წერტილის კოორდინატებია (–2; 2), ხოლო C წერტილის კოორდინატებია (–4; 0).

20. კუბის მოცულობა 64 $მ^3$-ის ტოლია. გამოთვალე კუბის დიაგონალის სიგრძე.

21. მართკუთხა პარალელეპიპედის სიგრძე 4 სმ, სიგანე 3 სმ, ხოლო სიმაღლე 12 სმ-ია. გამოთვალე დიაგონალის სიგრძე.



რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- ვექტორების სკალარული ნამრავლი და მისი კოორდინატებში ჩაწერა.

წყვილებში სამუშაო

1. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი დადებითია, მაშინ ვექტორებს შორის მახვილი კუთხეა; ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ მოცემულის შებრუნებული გამონათქვამი; გააერთიანეთ ეს ორი გამონათქვამი და ჩამოაყალიბეთ თეორემის სახით.
2. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უარყოფითია, მაშინ ვექტორებს შორის ბლაგვი კუთხეა; ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ მოცემულის შებრუნებული გამონათქვამი; გააერთიანეთ ეს ორი გამონათქვამი და ჩამოაყალიბეთ თეორემის სახით.
3. მოცემული კოორდინატების მიხედვით გაარკვიეთ, რომელ ორ ვექტორს შორისაა მახვილი კუთხე, რომელ ორს შორის მართი კუთხე და რომელ ორს შორის ბლაგვი კუთხე:
ა) (2; 3) და (–2; 1); ბ) (–3; 0) და (0; 13); გ) $(\sqrt{2}\,;-\sqrt{3}\,)$ და $(\sqrt{8}\,;2)$.

3.4

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

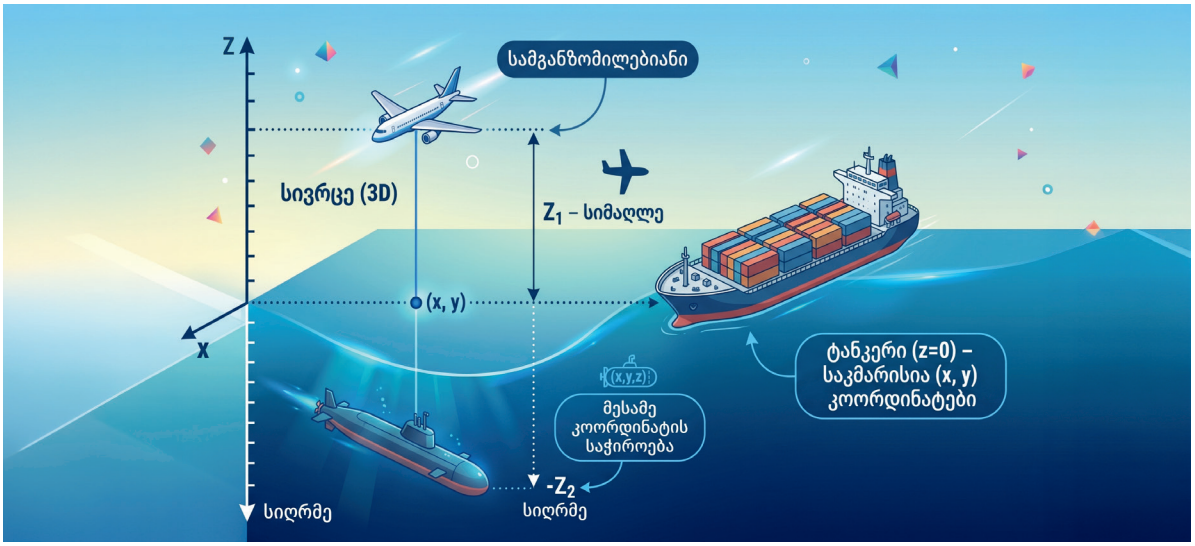
მიზანი. უნდა შეძლო:

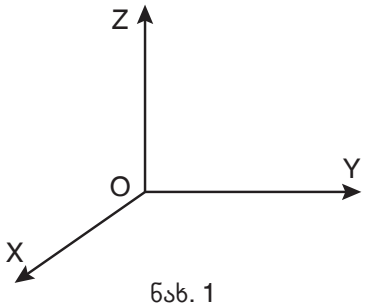
- **მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის აგება სივრცეში;**
- **სივრცეში წერტილის პოვნა მისი კოორდინატებით და მოცემული წერტილის კოორდინატების პოვნა;**
- **ორ წერტილს შორის მანძილის გამოთვლა სივრცეში.**

როგორც ვიცით, სიბრტყეში მოცემული მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა საშუალებას გვაძლევს, სიბრტყის ყოველ წერტილს შევუსაბამოთ რიცხვთა წყვილი, კოორდინატები, რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავს წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე.

სივრცის შემთხვევაში, ობიექტის მდებარეობის განსასაზღვრად ორი კოორდინატი არაა საკმარისი. მაგალითად, თვითმფრინავის ადგილმდებარეობის განსაზღვრისთვის, გრძედისა და განედის გარდა, საჭიროა ვიცოდეთ, თუ რა სიმაღლეზეა იგი. წყალქვეშა გემის მდებარეობასაც ვერ დავადგენთ მხოლოდ გრძედისა და განედის ცონდით. დამატებით დაგვჭირდება იმის ცოდნა, თუ რა სიღრმეზე მდებარეობს გემი.

ამ მაგალითებიდან ვასკვნით, რომ სივრცეში მდებარე წერტილის შემთხვევაში გვჭირდება მესამე კოორდინატი, ანუ აბსცისთა და ორდინატთა ღერძების გარდა, საჭიროა მესამე ღერძი, რომელიც მესამე კოორდინატის სიდიდეს განსაზღვრავს. ამისათვის სივრცეში შეგვიძლია ავაგოთ **მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა**.





ნახ. 1

სივრცის რომელიმე წერტილი ავიღოთ კოორდინატთა სათავედ (1-ელ ნახაზზე O წერტილი) და ამ წერტილზე გავატაროთ სამი ურთიერთმართობული OX, OY და OZ რიცხვითი ღერძი. ამ სამი ღერძიდან OX და OY აბსცისათა და ორდინატთა ღერძებია, ხოლო OZ-ს **აპლიკატთა ღერძი** ეწოდება (ალბათ შენიშნე, რომ ნახაზზე ამ ღერძების მხოლოდ არაუარყოფითი ნაწილებია წარმოდგენილი).

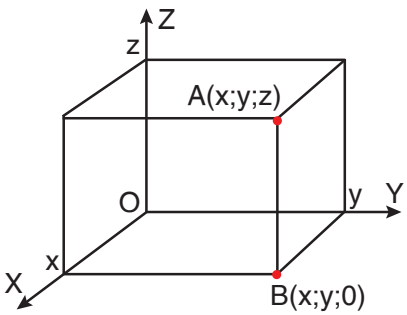
სივრცეს, რომელშიც მოცემულია კოორდინატთა სისტემა, **საკოორდინატო სივრცე** ეწოდება. საკოორდინატო სივრცეში

გვაქვს სამი ურთიერთმართობული საკოორდინატო სიბრტყე, OXY, OXZ და OYZ. ეს სამი სიბრტყე საკოორდინატო სივრცეს 8 ნაწილად ყოფს (ახსენი, რატომ).

ასე აგებულ კოორდინატთა სისტემაში სივრცის ყოველ A წერტილს რიცხვთა ერთადერთი (x; y; z) სამეული შეესაბამება, რომელიც შემდეგი წესით შეგვიძლია დავადგინოთ:

A წერტილის 1-ელი კოორდინატის, ანუ აბსცისის დასადგენად A წერტილზე გავატაროთ OX ღერძის მართობული სიბრტყე. ამ სიბრტყისა და OX ღერძის საერთო წერტილის კოორდინატი იქნება A წერტილის აბსცისა. ანალოგიურად მოვიქცევით მეორე და მესამე კოორდინატების დასადგენად.

კოორდინატების დადგენის ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ წერტილი რომელიმე საკოორდინატო სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ იმ ღერძის შესაბამისი კოორდინატი, რომელიც ამ საკოორდინატო სიბრტყის პერპენდიკულარულია, 0-ის ტოლი იქნება. მაგალითად, OXY საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე წერტილების (მეორე ნახაზზე B წერტილი) მესამე კოორდინატი, ანუ აპლიკატი, ნულის ტოლია, რადგან OXY სიბრტყე OZ ღერძის პერპენდიკულარულია და მათი საერთო წერტილი კოორდინატთა სათავეა.



ნახ. 2

თუ A წერტილი არცერთ საკოორდინატო სიბრტყეს არ ეკუთვნის, მაშინ მისი კოორდინატების თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად უნდა ავაგოთ მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის დიაგონალია AO მონაკვეთი, ხოლო A წერტილიდან გამოსული წიბოები საკოორდინატო ღერძების პარალელურია (ნახ. 2).

საკოორდინატო სივრცეში ყოველ წერტილს კოორდინატთა ერთადერთი (x; y; z) სამეული შეესაბამება.

პირიქით, რიცხვთა ყოველი (x; y; z) სამეულისთვის არსებობს სივრცის ერთადერთი წერტილი, რომლისთვისაც ეს სამეული კოორდინატებს წარმოადგენს. ამ წერტილის მოსაძებნად ჯერ ერთერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე, მაგალითად, OXY-ზე მოვძებნოთ (x; y) კოორდინატების მქონე წერტილი და ამ წერტილიდან გავავლოთ |z| – სიგრძის OZ ღერძის თანამიმართული ვექტორი, თუ z>0, და საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორი, თუ z<0. მიღებული ვექტორის წვერო იქნება საძიებელი წერტილი.

ამოცანა 1. დავამტკიცოთ, რომ A(x; y; z) წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილი გამოითვლება ფორმულით:

$$AO = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1)$$

დამტკიცება. თუ წერტილი რომელიმე საკოორდინატო სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ სათავემდე მანძილის გასაზომად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სიბრტყეზე მანძილის გაზომვის წესი. მაგალითად, თუ z=0, მაშინ

$$AO = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 0^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

თუ A წერტილის ყველა კოორდინატი არანულოვანია, მაშინ OA მონაკვეთი წარმოადგენს იმ მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალს, რომლის წიბოებია |x|, |y| და |z|. ამიტომ, მისი სიგრძე გამოითვლება (1) ფორმულით.

ვთქვათ, საკოორდინატო სივრცეში მოცემულია $A(x_1; y_1; z_1)$ და $B(x_2; y_2; z_2)$ წერტილები. გამოვთვალოთ ამ წერტილებს შორის მანძილი. AB მონაკვეთი პარალელურად გადავიტანოთ ისე, რომ A წერტილი დაემთხვეს კოორდინატთა სათავეს. მაშინ B წერტილის კოორდინატები აღმოჩნდება $(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$ და AB მანძილის გამოსათვლელად შეგვიძლია (1) ფორმულის გამოყენება. მივიღებთ:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (2)$$

უპასუხე კითხვებს:

1. რამდენი კოორდინატი აქვს წერტილს საკოორდინატო სიბრტყეზე? საკოორდინატო სივრცეში?
2. რომელი კოორდინატი აქვს ნულის ტოლი საკოორდინატო სივრცის იმ წერტილს, რომელიც OXZ სიბრტყეში მდებარეობს?
3. რომელი კოორდინატი შეიძლება ჰქონდეს არანულოვანი საკოორდინატო სივრცის იმ წერტილს, რომელიც აპლიკატთა ღერძზე მდებარეობს?
4. რომელი საკოორდინატო სიბრტყიდანაა თანაბრად დაშორებული A(x; y; z) და B(x; y;-z) წერტილები?

სავარჯიშოები

1. გაარკვიე, რომელ საკოორდინატო ღერძს ეკუთვნის წერტილი, რომლის კოორდინატებია: ა) (1; 0; 0); ბ) (0; 0; –1); გ) (2; 0; 0); დ) (0; –3; 0); ე) (0; 0; 0); ვ) (0; 5; 7).
2. გაარკვიე, რომელ საკოორდინატო სიბრტყეს ეკუთვნის წერტილი, რომლის კოორდინატებია: ა) (1; 0; –4); ბ) (0; 2; 1); გ) (2; 1; 0); დ) (0; 3; –7); ე) (0; 3; 0); ვ) (1; 2; 3).
3. იპოვე მანძილი A(x; y; z) წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე, თუ: ა) x=3; y=–4; z=12; ბ) x=–3; y=–4; z=0; გ) x=0; y=–5; z=–12; დ) x=–6; y=8; z= $\sqrt{11}$.
4. იპოვე x, თუ A(x; 6; –8) წერტილი კოორდინატთა სათავიდან 11-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული.
5. იპოვე მანძილი A(1; 2; 3) და B(3; 2; 1) წერტილებს შორის.
6. იპოვე მანძილი A(3; 0; 0) და B(0; –4; 0) წერტილებს შორის.
7. იპოვე AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ A წერტილის კოორდინატებია (1; –2; 4), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (4; –6; –8).

8. იპოვე აბსცისათა ღერძზე მდებარე იმ წერტილების კოორდინატები, რომლებიდანაც OYZ საკოორდინატო სიბრტყემდე მანძილი 1,1-ის ტოლია.

9. იპოვე ორდინატთა ღერძზე მდებარე იმ წერტილების კოორდინატები, რომლებიდანაც OXZ საკოორდინატო სიბრტყემდე მანძილი 9-ის ტოლია.

10. იპოვე აპლიკატთა ღერძზე მდებარე იმ წერტილების კოორდინატები, რომლებიდანაც OXY საკოორდინატო სიბრტყემდე მანძილი 7-ის ტოლია.

11. იპოვე A(1; –2; 3) წერტილიდან მანძილი:
ა) OXY საკოორდინატო სიბრტყემდე;
ბ) OXZ საკოორდინატო სიბრტყემდე;
გ) OYZ საკოორდინატო სიბრტყემდე.

12. იპოვე AB მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები, თუ: ა) A წერტილის კოორდინატებია (1; –2; 4), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (3; 2; –6); ბ) A წერტილის კოორდინატებია (0; –8; 1), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (5; –1; 3); გ) A წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{2}$; 7; 0), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{8}$; 1; 1).

13. იპოვე ABC სამკუთხედის AM მედიანის სიგრძე, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (–1; 0; 4), B წერტილის კოორდინატებია (5; 2; –6), ხოლო C წერტილის კოორდინატებია (–7; 4, 6);

ბ) A წერტილის კოორდინატებია (1; 2; 3), B წერტილის კოორდინატებია (3; 4; 5), ხოლო C წერტილის კოორდინატებია (–3; –4, –5);

გ) A წერტილის კოორდინატებია (– $\sqrt{2}$; 0; 1), B წერტილის კოორდინატებია (0; 1; –3), ხოლო C წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{18}$; 1; 1).

14. დახაზე $ABCDA_1B_1C_1D_1$ კუბი, რომლის A წვეროს კოორდინატებია (0; 0; 0), B წვეროს კოორდინატებია (1; 0; 0), D წვეროს კოორდინატებია (0; 1; 0), ხოლო A_1 წვეროს კოორდინატებია (0; 0; 1). იპოვე დანარჩენ წვეროთა კოორდინატები.

შესაძლებელია?

საკოორდინატო სივრცის სამ წერტილს ისე შევურჩიოთ კოორდინატები, რომ ისინი ერთ სიბრტყეში არ აღმოჩნდნენ.



რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- კოორდინატთა სისტემის აგება სივრცეში;
- სივრცის წერტილებს შორის მანძილის გამოთვლა.

15. იპოვე მანძილი ABC სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (–1; 0; 4), B წერტილის კოორდინატებია (5; 2; –6), ხოლო C წერტილის კოორდინატებია (–7; 4, 6);

ბ) A წერტილის კოორდინატებია (1; 2; 3), B წერტილის კოორდინატებია (3; 4; 5), ხოლო C წერტილის კოორდინატებია (–3; –4, –5);

გ) A წერტილის კოორდინატებია $(-\sqrt{2}; 0; 1)$, B წერტილის კოორდინატება (0; 1; –3), ხოლო C წერტილის კოორდინატებია $(\sqrt{18}; 1; 1)$.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის A წვეროს კოორდინატებია (0; 0; 0), B წვერის კოორდინატებია (3; 0; 0), D წვეროს კოორდინატებია (0; 4; 0), ხოლო A_1 წვეროს კოორდინატები (0; 0; 5). იპოვე დანარჩენ წვეროთა კოორდინატები.

17. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A(7; –2) და B(4; 1) წერტილები. იპოვე $\overline{AB}$ და $\overline{BA}$ ვექტორთა კოორდინატები.

18. მოცემულია $\vec{a}(1;-2)$ და $\vec{b}(3;5)$ ვექტორები. გამოთვალე:

ა) $3\vec{a}-4\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები;

ბ) $2\vec{a}+3\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე; გ) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

3.5 ვექტორები სივრცეში

მიზანი. უნდა შეძლო:

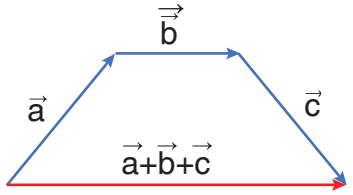
- **სივრცულ ვექტორებზე წრფივი მოქმედებების შესრულება და ნახაზით დემონსტრირება;**
- **სივრცული ვექტორების კოორდინატების განმარტება და პოვნა;**
- **კომპლანარული და არაკომპლანარული ვექტორების განმარტება, ამოცნობა და დემონსტრირება;**
- **სივრცული ვექტორების წარმოდგენა ორტების საშუალებით;**
- **სივრცული ვექტორების წრფივი კომბინაციისა და სკალარული ნამრავლის ჩაწერა კოორდინატებით;**
- **სივრცით ვექტორებს შორის კუთხის პოვნა კოორდინატების საშუალებით.**

ვექტორები სივრცეში ისევე განიმარტება, როგორც სიბრტყის შემთხვევაში. კერძოდ, სივრცის შემთხვევაშიც ვექტორი მიმართულების მქონე მონაკვეთია და ისრით აღვნიშნავთ. ამ ისრის სიგრძე ვექტორის სიგრძეს, ხოლო მიმართულება ვექტორის მიმართულებას გვიჩვენებს. იმის გამო, რომ სივრცის ნებისმიერი ორი ვექტორი შეგვიძლია ერთ სიბრტყეში მოვათავსოთ (ახსენი, რატომ), მათი ჯამი და რიცხვზე ნამრავლი ისევე განიმარტება და ისეთივე თვისებები აქვთ, როგორიც სიბრტყის შემთხვევაში ჰქონდათ. კერძოდ:

ა) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; ბ) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

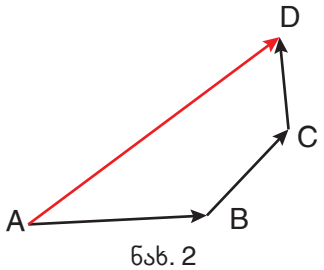
გ) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$; დ) $\alpha\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\alpha$.

ორი ვექტორის შესაკრებად, როგორც ვიცით, ვიყენებთ სამკუთხედის ან პარალელოგრამის წესს. უფრო მეტი რაოდენობის ვექტორების შესაკრებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ე.წ. მრავალკუთხედის წესი. მაგალითად, $\vec{a}, \vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შესაკრებად შეგვიძლია მოვიქცეთ ასე: $\vec{b}$ ვექტორის სათავე მოვდოთ $\vec{a}$ ვექტორის წვეროს, ხოლო $\vec{c}$ ვექტორის სათავე – $\vec{b}$ ვექტორის წვეროს (ნახ. 1). მაშინ, $\vec{a}$ ვექტორის სათავე იქნება ამ სამი ვექტორის ჯამის სათავე, ხოლო $\vec{c}$ ვექტორის წვერო – ჯამის წვერო.



ნახ. 1

ვექტორების შეკრების აღნიშნული წესით შეგვიძლია ვისარგებლოთ როგორც იმ ვექტორებისათვის, რომლებიც ერთ სიბრტყეში თავსდება (ასეთ სამ ვექტორს **კომპლანარული ვექტორები** ეწოდება), ისე იმ ვექტორებისათვის, რომელთა ერთ სიბრტყეში მოთავსება შეუძლებელია (ანუ **არაკომპლანარული** ვექტორებისათვის). მე-2 ნახაზზე მრავალკუთხედის წესით შეკრებილია $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ და $\overrightarrow{CD}$ არაკომპლანარული ვექტორები. შეკრების შედეგად მიღებულია $\overrightarrow{AD}$ ვექტორი.

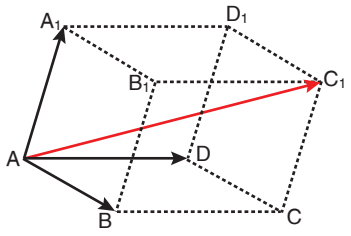


ნახ. 2

არსებობს არაკომპლანარული ვექტორების შეკრების პარალელეპიპედის წესი, რომელიც არაკოლინეარული ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესის სივრცული ანალოგია. ამ შემთხვევაში სამივე შესაკრები უნდა მოვდოთ სივრცის ერთ წერტილში, ამ ვექტორებზე, როგორც საერთო წვეროს მქონე წიბოებზე, ავაგოთ პარალელეპიპედი და ამ საერთო წვეროდან გავავლოთ ვექტორი პარალელეპიპედის მოპირდაპირე წვერომდე. მე-3 ნახაზის მიხედვით:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}.$$

თუ იმავე ვექტორებს მრავალკუთხედის წესით შევკრებთ, მაგალითად, ასე: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$, იმავე $\overrightarrow{AC_1}$ ვექტორს მივიღებთ.



ნახ. 3

ვიცით, რომ ორი არაკოლინეარული ვექტორით იმავე სიბრტყეში მოცემული ნებისმიერი ვექტორის გამოსახვაა შესაძლებელი. სივრცის შემთხვევაში ამ ფაქტის ანალოგიურია შემდეგი დებულება.

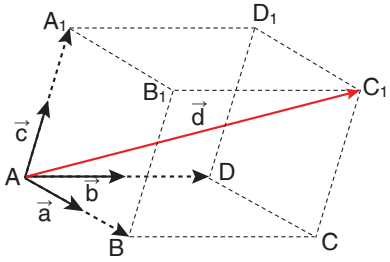
თეორემა. სამი არაკომპლანარული ვექტორით შეგვიძლია სივრცეში მოცემული ნებისმიერი ვექტორის წარმოდგენა.

მართლაც, ვთქვათ, $\vec{a}, \vec{b}$ და $\vec{c}$ არაკომპლანარული ვექტორებია, ხოლო $\vec{d}$ ნებისმიერი ვექტორია სივრცეში.

ოთხივე ვექტორი მოვდოთ ერთ წერტილში (მე-4 ნახაზზე A წერტილი). თუ $\vec{d}$ ვექტორი აღმოჩნდა მოცემული სამეულიდან რომელიმე ორის სიბრტყეში, მაშინ ის წარმოდგება ორი არაკოლინეარული ვექტორის ჯამად, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში, არაკომპლანარული ვექტორების შეკრების წესის თანახმად, გვექნება (დააკვირდი მე-4 ნახაზს):

$$\vec{d} = \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

სადაც α, β და γ ნამდვილი რიცხვებია.



ნახ. 4

საკოორდინატო სივრცეში მოცემული $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატების დასადგენად, სიბრტყის შემთხვევის ანალოგიურად, ეს ვექტორი კოორდინატთა სათავეში უნდა მოვდოთ და მისი წვეროს კოორდინატები ვიპოვოთ. გასაგებია, რომ ამ შემთხვევაში ყოველ ვექტორს სამი კოორდინატი ექნება. თუ A წერტილის კოორდინატებია $(x_1; y_1; z_1)$, ხოლო B წერტილის კოორდინატებია $(x_2; y_2; z_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები იქნება $(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$.

$(x; y; z)$ კოორდინატების მქონე ვექტორის სიგრძე 4.4 პარაგრაფის 1-ელი ფორმულით, ხოლო $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე იმავე პარაგრაფის მე-2 ფორმულით გამოითვლება.

სიბრტყის შემთხვევაში გვქონდა ორი ორტი $\vec{i}(1;0)$ და $\vec{j}(1;0)$. სივრცის შემთხვევაში კი გვაქვს სამი ორტი: $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$ და $\vec{k}(0;0;1)$. ეს სამეული არაკომპლანარულ ვექტორთა სამეულს წარმოადგენს (ახსენი, რატომ). დამტკიცებული თეორემის ძალით, ნებისმიერი $\vec{a}(x;y;z)$ ვექტორი შეგვიძლია ორტების საშუალებით წარმოვადგინოთ (ნახ.5):

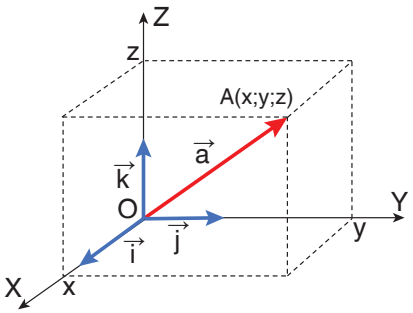
$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

ანალოგიურად განიმარტება და იგივე თვისებები აქვს სკალარულ ნამრავლსაც:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha, \qquad (1)$$

სადაც α კუთხეა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის.

სიბრტყის შემთხვევის ანალოგიურია, აგრეთვე, სამგანზომილებიან ვექტორებზე მოქმედებების გამოსახვა კოორდინატებში. კერძოდ, თუ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x_1; y_1; z_1)$, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x_2; y_2; z_2)$, მაშინ:



ნახ. 5

- $\vec{a}+\vec{b}$ ჯამის კოორდინატები იქნება $(x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)$;
- $\vec{a}$ ვექტორის p რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატებია $(px_1; py_1; pz_1)$;
- $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის საკალარული ნამრავლი გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3, \qquad (2)$$

- 1-ლი და მე-2 ფორმულებიდან გამომდინარეობს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$\cos\alpha=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)}\cdot\sqrt{\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)}}. \qquad (3)$$

ამოცანა. მოცემულია ორი ვექტორი: $\vec{a}(1;2;1)$ და $\vec{b}(1;0;-1)$. გამოვთვალოთ კუთხე $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორებს შორის.

ამოხსნა. გამოვთვალოთ $\vec{a}+\vec{b}$ და $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორების კოორდინატები: $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (2;2;0), ხოლო $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (0;2;2).

გამოთვლილი კოორდინატები ჩავსვათ მე-3 ფორმულაში:

$$\cos\alpha=\frac{2\cdot0+2\cdot2+0\cdot2}{\sqrt{4+4+0}\cdot\sqrt{0+4+4}}=\frac{4}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ;$$

პასუხი: 60°.

უპასუხე კითხვებს:

1. ვექტორთა როგორ ერთობლიობას ეწოდება კომპლანარული ვექტორები?
2. რას ეწოდება ვექტორის კოორდინატები?
3. როგორ გამოითვლი ვექტორის სიგრძეს კოორდინატებით?
4. რას უდრის იმ ორ არანულოვან ვექტორს შორის კუთხე, რომელთა სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია?
5. რის ტოლია ვექტორის სკალარული კვადრატი?

სავარჯიშოები

1. იპოვე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (–1; 3; 7), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (–3; 2; 1);

ბ) A წერტილის კოორდინატებია (–6; 0; 5), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (0; 1; –8);

გ) A წერტილის კოორდინატებია (0,5; 0; 1), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (1; –3,2);

დ) A წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{27}$; 1), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{12}$; –1).

2. გამოთვალე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:

ა) A წერტილის კოორდინატებია (–1; 2; 0), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (3; 5; –12);

ბ) A წერტილის კოორდინატებია (–5; 7; 0), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (0; 7; 12);

გ) A წერტილის კოორდინატებია (0,1; 0; 2), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (2,1; 3; 4);

დ) A წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{2}$; 1; 2), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია ($\sqrt{8}$; 1; 2).

3. გამოთვალე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე, თუ მისი კოორდინატებია: ა) (0; 5; 0); ბ) (0; –5; 0); გ) (–3; 3; $\sqrt{7}$);

დ) (15; 0; –8); ე) (1; –2; 2;); ვ) (cos1; $\sqrt{3}$; sin1).

4. წარმოადგინე ორტების საშუალებით $\vec{a}$ ვექტორი, თუ მისი კოორდინატებია: ა) (2; 0; 2); ბ) (1; 1; –1); გ) (–1; 2; –1); დ) (–4; 8; 2); ე) (0; 0,5; –2); ვ) (0; 1; 0); ზ) (0; 1; 1).

5. დაადგინე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:

ა) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$; ბ) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$; გ) $\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}$;

დ) $\vec{a}=2\vec{j}+3\vec{k}$; ე) $\vec{a}=-7\vec{i}$.

6. დაადგინე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:

ა) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$; ბ) $\vec{a}=\vec{i}+12\vec{j}-\vec{k}$; გ) $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$;

დ) $\vec{a}=1,2\vec{j}$; ე) $\vec{a}=-2\vec{i}$; ვ) $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$.

7. $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (1; –4; 3).

იპოვე: ა) $-\vec{a}$; ბ) $2\vec{a}$; გ) $-3\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები.

8. გამოთვალე $2\vec{a}+3\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:

ა) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (0; 5; –7;), ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (–4; 3; 6);

ბ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (3; –0,5; 1), ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (–1; 2; 5);

გ) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}$, ხოლო $\vec{b}=-5\vec{j}+\vec{k}$, სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებია;

დ) $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, ხოლო $\vec{b}=-\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$, სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებია.

9. საკოორდინატო სივრცეში მოცემულია ოთხი წერტილი: A(2; 2; 1), B(0; 8; 2), C(1; 0; 4) და D(5; 7; –1). გამოთვალე $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$ ვექტორის კოორდინატები.

10. გამოთვალე $2\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ:

ა) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (0; 7; –4), ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (–2; 0; 1); ბ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (–3; 1; 4), ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (3; 1; 2); გ) $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია $(\sin\alpha; 0; 1)$, ხოლო $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია $(0; 2\cos\alpha; -2)$;

დ) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$, ხოლო $\vec{b}=3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$, სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებია.

11. საკოორდინატო სივრცეში მოცემულია ოთხი წერტილი: A(2; 0; 1), B(8; –3; 0), C(0; 4; 4) და D(5; 0; 1). გამოთვალე $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ ვექტორის სიგრძე.

12. გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ:

ა) a=3 სმ, b=7 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 60°;

ბ) a=4 სმ, b=3 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 45°;

გ) a=8 სმ, b=13 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 120°;

დ) a=0,15 სმ, b=1,29 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხეა 90°.

13. გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ მათი კოორდინატებია:

ა) (4; 1; 3) და (–2; 9; 0); ბ) (1; –3; 1) და (0; 1; 3);

გ) $(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 6)$ და $(\sqrt{8}; 0; 1)$;

დ) $(\sqrt{27}; -1; 4)$ და $(\sqrt{3}; 6; 0)$.

14. გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი, თუ მათი კოორდინატებია:

ა) (3; 4; 12) და (–3; 4,–12); ბ) (–12; 5; 0) და (0; 5; 12);

გ) (6; –8; 0) და (8; 0; 6); დ) (15; 8; 0) და (0; 8; 15).

შესაძლებელია?

სამი არაკომპლანარული ვექტორის ჯამი ნულოვანი ვექტორი იყოს?

15. გამოთვალე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, თუ მათი კოორდინატებია:

ა) (–3; 4; 1) და (3; –4; –1); ბ) (2; –5; 7) და (4; –10; 14);

გ) (1; –6; 0) და (–3; 18; 0); დ) $\left(\sqrt{3};0;1\right)$ და $\left(1;0;\sqrt{3}\right)$.

16. იპოვე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, თუ:

ა) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ =4, ხოლო a·b=8; ბ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{5}$, ხოლო $a\cdot b=\sqrt{10}$;

გ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\sqrt{3}$, ხოლო a·b=4.

17. მოცემული კოორდინატების მიხედვით დაადგინე, მახვილია, მართია თუ ბლაგვი ვექტორებს შორის კუთხე:

ა) (1; 6; –5) და (2; –2; 1); ბ) (–10; –5; 4) და (0; –3; –1);

გ) (9; –1; 12) და (8; 7; –2); დ) (11; 12; 9) და (–1; –2; –3).

18. იპოვე x, თუ ვექტორები კოორდინატებით (1; x; –1) და $(x^2; -4; -4)$ ურთიერთმართობული ვექტორებია.

19. იპოვე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (2; 0; –1), ხოლო $\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატები (1; 2; 2).

21. $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (1; 2; –1), $\vec{b}$ ვექტორის კოორდინატებია (0; –7; 5). იპოვე $\vec{a}+\vec{b}$ ვექტორის $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორზე სკალარული ნამრავლი.

21. $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეა 5 სმ, $\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე 4 სმ, ხოლო ამ ვექტორებს შორის კუთხე 60°. იპოვე $\vec{a}-2\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე.

22. იპოვე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ მისი სიგრძეა 52 სმ, ხოლო $\vec{a}$ ვექტორის

ა) თანამიმართული ვექტორის კოორდინატებია (12; –3; 4); ბ) საწინააღმდეგოდ მიმართული ვექტორის კოორდინატებია (–6; 8; 24).

23. იპოვე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია (1; –3; –1), ხოლო $\overrightarrow{BC}$ ვექტორის კოორდინატებია (1; 0; –2).

24. გამოთვალე $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, თუ AB=13, BC=14 და AC=15.

25. იპოვე (1; x–1; 2-x) კოორდინატების მქონე ვექტორის შესაძლო უმცირესი სიგრძე.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- ვექტორის კოორდინატები სივრცეში;
- კომპლანარული და არაკომპლანარული ვექტორების ამოცნობა;
- ვექტორის ორტების საშუალებით წარმოდგენა;
- ვექტორის სიგრძისა და ვექტორებს შორის კუთხის გამოთვლა კოორდინატებით.

3.6 ვექტორების გამოყენება გეომეტრიაში

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **ვექტორების გამოყენება გეომეტრიული ამოცანების ამოსახსნელად და დებულებების დასამტკიცებლად.**

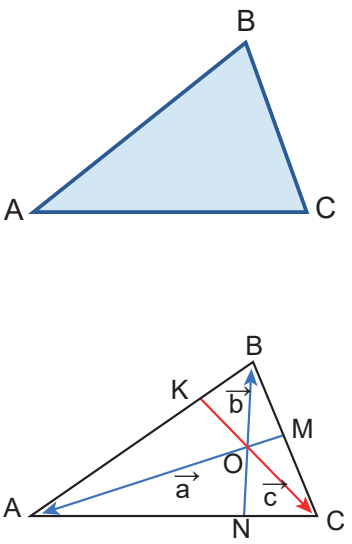
ვექტორების გამოყენებით მარტივდება გეომეტრიის ზოგიერთი თეორემის დამტკიცება.

ამოცანა 1. ვექტორების გამოყენებით დავამტკიცოთ კოსინუსების თეორემა.

დამტკიცება. ABC სამკუთხედში $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\left(\overrightarrow{AB}\right)^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AC}\right)^2+\left(\overrightarrow{BC}\right)^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$$

მიღებული ტოლობა, სკალარული ნამრავლის განმარტებიდან გამომდინარე, იგივეა, რაც $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\alpha$.



ნახ. 1

ამოცანა 2. დავამტკიცოთ, რომ სამკუთხედში სამივე სიმაღლე ერთ წერტილში იკვეთება.

1-ელ ნახაზზე მოცემულ ABC სამკუთხედში AM და BN სიმაღლეები O წერტილში იკვეთება. O წერტილზე გადის CK მონაკვეთი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ CK მართობულია AB გვერდის.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

მოცემულობის თანახმად:

$$\begin{cases}\vec{a}\perp\overrightarrow{CB}\Rightarrow\vec{a}\perp\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0;\\ \vec{b}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\vec{b}\perp\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\Rightarrow\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}=0.\end{cases}$$

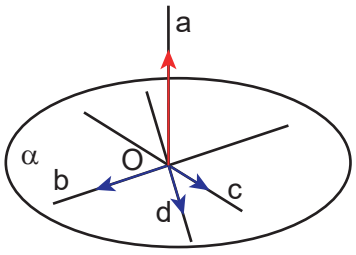
ბოლო ორი ტოლობის შეკრებით და $\vec{c}$ -ს ფრჩხილებს გარეთ გატანით მივიღებთ:

$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0\Rightarrow\vec{c}\perp\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\Rightarrow\vec{c}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow CK\perp AB.$$

ვექტორების გამოყენებით შეგვიძლია დავამტკიცოთ სტერეომეტრიიდან წინა თავში ნასწავლი წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშანი:

ამოცანა 3. დავამტკიცოთ თეორემა: თუ წრფე სიბრტყეში მდებარე ორი გადამკვეთი წრფიდან თითოეულის მართობულია, მაშინ ეს წრფე სიბრტყის მართობულია.

დამტკიცება. გავიხსენოთ, რომ განმარტებით წრფე სიბრტყის მართობულია, თუ ეს წრფე სიბრტყეში მდებარე ყველა წრფის მართობულია. ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ თუ a წრფე α სიბრტყეში მდებარე b და c გადამკვეთ წრფეთა მართობულია, მაშინ a ამავე სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი d წრფის მართობულიც იქნება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ მოცემული წრფეები გავლებულია b და c წრფეების გადაკვეთის O წერტილზე (ნახ. 2).



ნახ. 2

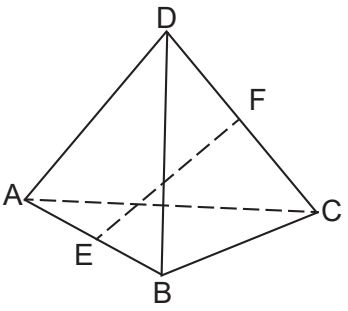
O წერტილზე თითოეული წრფის გასწვრივ მოვდოთ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ და $\vec{d}$ ვექტორები. $\vec{b}$ და $\vec{c}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, ამიტომ $\vec{d}$ ვექტორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მათი წრფივი კომბინაციით:

$$\vec{d}=\beta\vec{b}+\gamma\vec{c},$$

სადაც β და γ რიცხვებია. თუ მოცემულ ტოლობას სკალარულად გავამრავლებთ $\vec{a}$ ვექტორზე და ვისარგებლებთ თეორემის პირობით, რომ $\vec{a}$ ვექტორი $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების მართობულია, მივიღებთ:

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=\beta\vec{a}\cdot\vec{b}+\gamma\vec{a}\cdot\vec{c}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{d}$$

აქედან ვასკვნით, რომ a წრფე მართობულია d წრფის. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 3

ამოცანა 4. ABCD სამკუთხა პირამიდის ყველა წიბო a-ს ტოლია (ნახ. 3). E და F შესაბამისად AB და CD წიბოების შუა წერტლებია. გამოვთვალოთ კუთხე EF და BC აცდენილ წრფეებს შორის.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$.

ამ სამი არაკომპლანარული ვექტორით გამოვსახოთ $\overrightarrow{EF}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორები:

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right);\quad \overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}.$$

გავითვალისწინოთ ტოლობები:

$\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{d},=a^2$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}a^2$ და გამოვთვალოთ $\overrightarrow{EF}$ ვექტორის სიგრძე და $\overrightarrow{EF}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

$$EF^2=\frac{1}{4}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)^2=\frac{1}{4}\left(3a^2-a^2\right)=\frac{a^2}{2}\Rightarrow EF=\frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2+a^2\right)=\frac{1}{2}a^2.$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით საძიებელი კუთხის კოსინუსი იქნება

$$\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}}{EF\cdot BC}=\frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{a}{\sqrt{2}}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ე.ი. საძიებელი კუთხის სიდიდეა 45°.

შესაძლებელია?

სამკუთხედის ორი გვერდი მართობული იყოს რაიმე წრფის, ხოლო მესამე გვერდი ამ წრფის მართობული არ იყოს? ოთხკუთხედის შემთხვევაში?

აბა, სცადე!

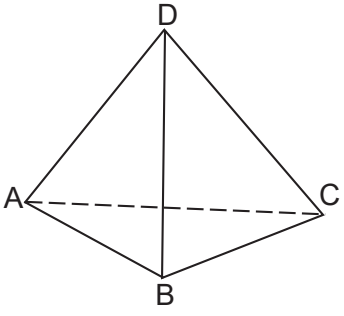
დაამტკიცე, რომ თუ ABC სამკუთხედში AB= BC, მაშინ

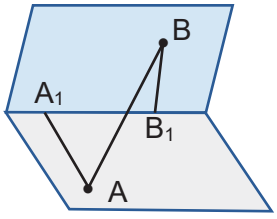
$\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)=0$.

უპასუხე კითხვებს:

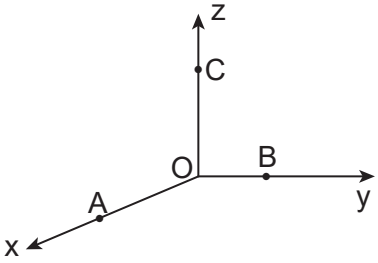
1. სკალარული ნამრავლის რა თვისება გამოვიყენეთ პირველ ამოცანაში?
2. არაკოლინეარული ვექტორების რა თვისება გამოვიყენეთ წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშნის დამტკიცებაში?
3. როგორ წრფეებს შორის კუთხე დავითვალეთ მეორე ამოცანაში?
4. კუთხის კოსინუსის გამოსათვლელი რა ფორმულა გამოვიყენეთ მე-4 ამოცანაში?

სავარჯიშოები





ნახ. 4



ნახ. 5

1. დაამტკიცე, რომ რომბის დიაგონალები მართ კუთხეს ქმნიან.
2. დაამტკიცე, რომ მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია.
3. დაამტკიცე, რომ A, B და C წერტილები ერთ წფეზეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა AB და AC ვექტორები კოლინეარულია;
4. დაამტკიცე, რომ პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი ოთხივე გვერდის კვადრატების ჯამის ტოლია.
5. დაამტკიცე, რომ პარალელოგრამის დიაგონალებს გადაკვეთის წერტილი შუაზე ყოფს.
6. სამკუთხა პირამიდის ყველა წიბო ტოლია. გამოთვალე კუთხე თანაუკვეთ წიბოებს შორის.
7. დაამტკიცე, რომ თუ სამკუთხა პირამიდაში AD და BD წიბოები მათი თანაუკვეთი BC და AC წიბოების მართობულია, მაშინ დარჩენილი ორი თანაუკვეთი CD და AB წიბოც ურთიერთმართობულია.
8. φ სიდიდის ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მდებარე A წერტილიდან ორწახნაგა კუთხის წიბოზე დაშვებულია AA_1 მართობი, ხოლო მეორე წახნაგზე მდებარე B წერტილიდან იმავე წიბოზე – BB_1 მართობი (ნახ. 4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$. იპოვე AB მონაკვეთის სიგრძე.
9. მე-8 ამოცანის პირობებში იპოვე φ კუთხის კოსინუსი, თუ $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ და $AB = d$.
10. მე-9 ამოცანის აღნიშვნების მიხედვით დავადგინოთ მართია, მახვილი თუ ბლაგვი φ კუთხე, თუ ა) a=3 სმ, b=4 სმ, $c = 2\sqrt{6}$ სმ, d=7 სმ; ბ) a=2 სმ, b=5 სმ, c=6 სმ, d=8 სმ.
11. C წერტილი ეკუთვნის AB მონაკვეთს, ამასთან AC:CB=3:2. იპოვე C წერტილის კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია (–3;–7;6), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (2;3;1).
12. საკოორდინატო სივრცეში მდებარე A, B და C წერტილებიდან A ეკუთვნის აბსცისთა ღერძს, B – ორდინატთა ღერძს, ხოლო C – აპლიკატთა ღერძს (ნახ. 5). გამოთვალე კუთხე AOB და BOC კუთხეთა ბისექტრისებს შორის.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა ვექტორების გამოყენებით

3.7 სიმეტრია და მობრუნება

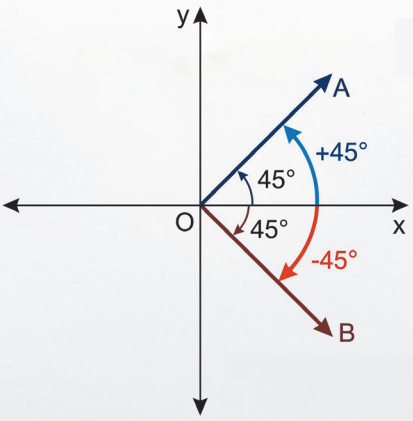
მიზანი. უნდა შეძლო:

- მობრუნების, ცენტრული და ღერძული სიმეტრიების განმარტება და დემონსტრირება;
- მობრუნების, ცენტრული და ღერძული სიმეტრიების კოორდინატების საშუალებით ჩაწერა;
- მობრუნების, ცენტრული და ღერძული სიმეტრიების კომპოზიციის დემონსტრირება და კოორდინატების საშუალებით ჩაწერა.

O ცენტრის მიმართ α კუთხით მობრუნება ეწოდება გარდაქმნას, რომელიც სიბრტყის ყოველ A წერტილს ისეთ A_1 წერტილზე ასახავს, რომ $OA=OA_1$ და $\angle AOA_1=\alpha$. O წერტილს მობრუნების ცენტრი, ხოლო α-ს მობრუნების კუთხე ეწოდება.

კუთხეების გაზომვის მიმართულება

დადებითი მიმართულება (+): საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.
უარყოფითი მიმართულება (–): საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.



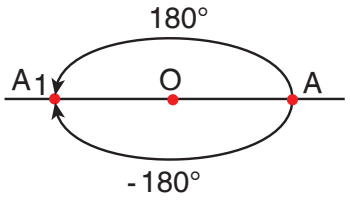
ნახ. 1

ჩვეულებრივ, დადებით მიმართულებად თვლიან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებას, ხოლო უარყოფითად კი – საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებას. მაგალითად, 45°-ით საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნებას ვუწოდებთ „მობრუნებას 45°-ით“, ხოლო საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით – „მინუს 45°-ით მობრუნებას“ (ნახ. 1).

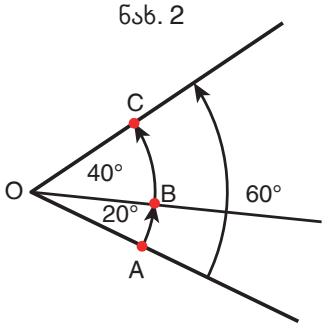
O ცენტრის მიმართ α კუთხით მობრუნების აღმნიშვნელი სიმბოლოა R_0^α. ზემოთ აღნიშნულ შემთხვევაში ჩავწერთ, რომ შესრულდა $R_0^{45^\circ}$ მობრუნება და $R_0^{-45^\circ}$ მობრუნება.

ნებისმიერი O ცენტრის მიმართ 180°-ით ორივე მიმართულებით მობრუნება ერთმანეთს ემთხვევა და O ცენტრის მიმართ ცენტრულ სიმეტრიას წარმოადგენს (ნახ. 2).

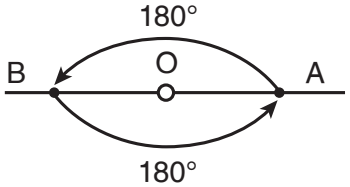
ამ ნახაზზე $R_0^{180^\circ}(A)=R_0^{-180^\circ}(A)=S_0(A)=A_1$, სადაც S_0 ცენტრული სიმეტრიაა O ცენტრით.



ნახ. 2



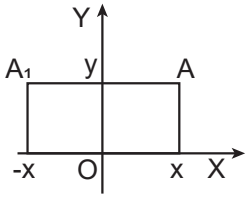
ნახ. 3ა



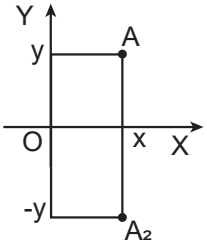
ნახ. 3ბ

ამოცანა 1. საერთო O ცენტრის მიმართ თანმიმდევრობით შესრულდა ჯერ R^{20°, შემდეგ R^{40° მობრუნება. რა იქნება R^{20° და R^{40° მობრუნებათა კომპოზიცია?

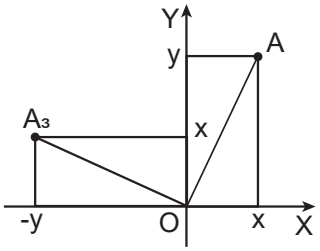
ამოხსნა. ვთქვათ, A წერტილი (ნახ. 3. ა) O ცენტრის მიმართ



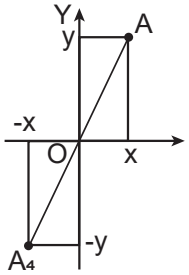
ნახ. 4ა



ნახ. 4ბ



ნახ. 4გ



ნახ. 4დ

20°-ით მობრუნებისას B წერტილზე აისახა. B წერტილს მეორე – R^{40° მობრუნება C წერტილზე ასახავს: $B=R^{20^\circ}(A)$, $C=R^{40^\circ}(B)$. საბოლოოდ მივიღეთ: $R^{40^\circ}(R^{20^\circ}(A))=C=R^{60^\circ}(A)$.

ზოგადად, თანმიმდევრობით შესრულებული F და G გარდაქმნების შედეგად მიღებულ გარდაქმნას GoF ჩანაწერით აღნიშნავენ და მას F და G გარდაქმნათა **კომპოზიცია** ეწოდება. 1-ელი ამოცანის შემთხვევაში (ნახ.3 ა)

$$R^{40^\circ}oR^{20^\circ}=R^{60^\circ}.$$

საზოგადოდ, მობრუნების ნებისმიერი α და β კუთხეებისათვის $R_\alpha oR^\beta=R_\alpha{}^{+\beta}$. მაგალითად, მე-3 ბ ნახაზის მიხედვით $R_o^{180^\circ}R^{180^\circ}=R^{360^\circ}=R^{0^\circ}$

განვიხილოთ მობრუნებისა და სიმეტრიის მაგალითები საკოორდინატო სიბრტყეზე.

ვთქვათ, მოცემულია მართკუთხა კოორდინატთა XOY სისტემა.

- ორდინატთა ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიის დროს A(x; y) წერტილი აისახება A_1 (–x;y) წერტილზე (იხ. ნახ. 4 ა).
- აბსცისათა ღერძის მიმართ ღერძული სიმეტრიის დროს A(x; y) წერტილი აისახება A_2(x; –y) წერტილზე (იხ. ნახ. 4 ბ).
- კოორდინატთა სათავის მიმართ 90°-ით მობრუნების დროს A(x; y) წერტილი აისახება A_3 წერტილზე, რომლის კოორდინატებია: (–y; x).
- $S_0=R_0^{180^\circ}$ცენტრული სიმეტრიით (ნახ. 4 დ), A(x; y) წერტილი A_4(–x; –y) წერტილზე აისახება.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა შემთხვევაში სრულდება მობრუნება საათის ისრის მიმართულებით?
2. რა კუთხით სრულდება მობრუნება ერთი და იმავე ცენტრის მიმართ თანმიმდევრობით შესრულებული ორი მობრუნებით?
3. შეიცვლება თუ არა შედეგი, თუ თანმიმდევრობით ორი მობრუნებისას მობრუნებათა თანმიმდევრობას შევცვლით?
4. რა კუთხით მობრუნებით მიიღება ცენტრული სიმეტრია?
5. აბსცისათა ღერძის მიმართ სიმეტრიით რომელი კოორდინატი იცვლება?
6. ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიით რომელი კოორდინატი რჩება იგივე?

სავარჯიშოები

1. ფურცელზე მონიშნე ორი წერტილი: O და A. ააგე A_1 წერტილი, რომელიც A წერტილის სიმეტრიული იქნება O წერტილის მიმართ.

2. ფურცელზე აიღე O წერტილი და AB მონაკვეთი. ააგე: ა) A_1B_1 მონაკვეთი, რომელიც AB მონაკვეთის სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ. განიხილე შემთხვევები, როცა: ა) $O \notin AB$; ბ) $O \in AB$.

3. რომელი ციფრის ჩანაწერს აქვს სიმეტრიის: ა) ღერძი? ბ) ცენტრი?

4. ჩამოთვალე ყველა ისეთი ოთხკუთხედი, რომელსაც აქვს სიმეტრიის: ა) მხოლოდ ერთი ღერძი; ბ) ორი ღერძი.

5. სიმეტრიის ღერძების რა უდიდესი რაოდენობა შეიძლება ჰქონდეს ოთხკუთხედს?

6. დახაზე O წერტილი და ABCD ოთხკუთხედი. ააგე ABCD ოთხკუთხედის სიმეტრიული ოთხკუთხედი: ა) O ცენტრის მიმართ; ბ) AB წრფის მიმართ.

7. ქვემოთ ჩამოთვლილი ფიგურებიდან რომლებს აქვს სიმეტრიის ღერძი? რამდენი? მონაკვეთი, ტოლფერდა სამკუთხედი, ტოლგვერდა სამკუთხედი, პარალელოგრამი, მართკუთხედი, რომბი, კვადრატი, ტოლფერდა ტრაპეცია, მართკუთხა ტრაპეცია, წესიერი ხუთკუთხედი, წესიერი n-კუთხედი.

8. ქვემოთ ჩამოთვლილი ფიგურებიდან რომლებს აქვს სიმეტრიის ცენტრი: წრე, წრეწირი, ნახევარწრე, სეგმენტი, სექტორი, ორი კონცენტრული წრისაგან შექმნილი რგოლი, პარალელოგრამი, ტრაპეცია, წესიერი ხუთკუთხედი.

9. მოცემულთაგან, რომელი ორი კუთხით მობრუნება მოგვცემს ერთი და იმავე შედეგს?

ა) 660°; ბ) 720°; გ) 890°; დ) –1000; ე) 300°.

10. რა კუთხით მობრუნება მიიღება ერთი და იმავე ცენტრის მიმართ α და β კუთხეებით თანმიმდევრობით მობრუნებისას, თუ:

ა) $\alpha=25°$ და $\beta=-60°$; ბ) $\alpha=270°$ და $\beta=-90°$; გ) $\alpha=180°$ და $\beta=90°$;

11. იპოვე α-ს მნიშვნელობა ($-180° \le \alpha \le 180°$), თუ:

ა) $R^{70°} \circ R^{\alpha} = R^{30°}$; ბ) $R^{70°} \circ R^{\alpha} = R^{60°}$; გ) $R^{70°} \circ R^{-\alpha} = R^{\alpha}$;

დ) $R^{70°} \circ R^{\alpha} = R^{0°}$.

12. იპოვე α-ს მნიშვნელობა ($-180° \le \alpha \le 180°$), თუ ამ კუთხით სამჯერადი მობრუნებისას მიიღება 90°-ით მობრუნება.

13. XOY საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A(2; 4) წერტილი. რა კოორდინატები ექნება A_1 წერტილს, თუ ეს წერტილი მიიღება A წერტილის ჯერ ორდინატთა, ხოლო შემდეგ აბსცისათა ღერძის მიმართ სიმეტრიით?

14. XOY საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A(2; 4) წერტილი. რა კოორდინატები ექნება A_1 წერტილს, თუ ვიცით, რომ:

ა) $A_1 = S_O(A)$? ბ) $A_1 = R_O^{-180°}(A)$?

გ) $A_1 = R_O^{90°}(A)$? დ) $A_1 = R_O^{270°}(A)$?

15. XOY საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A(–3; –4) წერტილი. რა კოორდინატები ექნება A_1 წერტილს, თუ:

ა) $A_1 = S_O(A)$? ბ) $A_1 = R_O^{-180°}(A)$?

გ) $A_1 = R_O^{90°}(A)$? დ) $A_1 = R_O^{270°}(A)$?

16. XOY საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია P(x; y) წერტილი. რა იქნება P_1 წერტილის კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ:

ა) $P_1 = R^{180°}\left(R^{-90°}(P)\right)$?

ბ) $P_1 = R^{-90°}\left(R^{180°}(P)\right)$?

გ) $P_1 = R^{90°}\left(R^{90°}(P)\right)$?

17. იპოვე A(1; 0) წერტილის კოორდინატთა სათავის მიმართ: ა) 90°-ით, ბ) 180°-ით, გ) 270°-ით, დ) 360°-ით მობრუნებით მიღებული წერტილის კოორდინატები.

18. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A(–1; 1) და B(2; –2) წერტილები. გამოთვალე იმ წერტილის კოორდინატები, რომელიც A წერტილის სიმეტრიულია B ცენტრის მიმართ.

19. ABCD კვადრატის A და C წვეროების კოორდინატებია, შესაბამისად, (0; 0) და (0; 1).

ა) იპოვე B და D წვეროების კოორდინატები;

ბ) იპოვე იმ კვადრატის წვეროთა კოორდინატები, რომლებიც მოცემული კვადრატის A წვეროს მიმართ 90°-ის ტოლი კუთხით მობრუნებით მიიღება;

გ) შეასრულე შესაბამისი ნახაზი.

შესაძლებელია?

ფიგურას ჰქონდეს უსასრულო რაოდენობის სიმეტრიის: ა) ღერძი? ბ) ცენტრი?



რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- მობრუნების, ღერძული და ცენტრული სიმეტრიების ჩაწერა კოორდინატებით.
- გარდაქმნათა კომპოზიცია.

20. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A(–1; –2), B(0; –3) და C(2; 2) წერტილები. გამოთვალე ΔABC-ს მისივე B წვეროს მიმართ ცენტრულად-სიმეტრიული სამკუთხედის წვეროთა კოორდინატები.

21. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A(1; 0) წერტილი.

ა) რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს კოორდინატებმა A წერტილის კოოტდინატთა სათავის გარშემო –90°-დან 90°-მდე კუთხით მობრუნებისას?

ბ) შეიცვლება თუ არა ასეთი მობრუნებისას A წერტილის კოორდინატთა ჯამი?

გ) შეიცვლება თუ არა ასეთი მობრუნებისას A წერტილის კოორდინატთა კვადრატების ჯამი?

22. საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემულია A(1; 0) წერტილი. რა კოორდინატები აქვს:

ა) $R_0^{45^\circ}(A)$ წერტილს?

ბ) $R_0^{135^\circ}(A)$ წერტილს?

გ) $R_0^{150^\circ}(A)$ წერტილს?

23. როგორ მივიღოთ 19°-ით მობრუნების საშუალებით 20°-ით მობრუნება?

24. თორმეტი საათიდან, სულ მცირე, რამდენ წუთში შექმნიან საათის ისრები 55°-ის ტოლ კუთხეს?

25. რა უმცირესი დადებითი კუთხით უნდა მობრუნდეს წესიერი n-კუთხედი თავისივე ცენტრის გარშემო, რათა იგი თავის თავს შეუთავსდეს?

3.8

ჰომოთეტია და პარალელური გადატანა

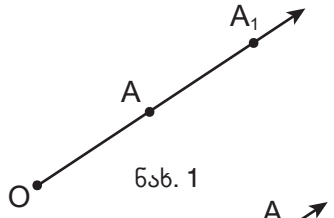
მიზანი. უნდა შეძლო:

- **ჰომოთეტიისა და პარალელური გადატანის განმარტება და დემონსტრირება;**
- **ჰომოთეტიისა და პარალელური გადატანის კოორდინატების საშუალებით ჩაწერა;**
- **ჰომოთეტიისა და პარალელური გადატანის კომპოზიციის დემონსტრირება და კოორდინატების საშუალებით ჩაწერა.**

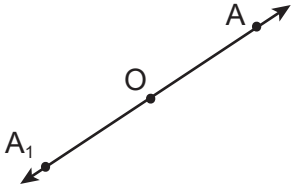
ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია O წერტილი და ნებისმიერი დადებითი k რიცხვი. სიბრტყის თავის თავზე ასახვას, რომლის დროსაც სიბრტყის ყოველი A წერტილი აისახება OA სხივზე მდებარე ისეთ A_1 წერტილში, რომ სრულდება $\frac{OA_1}{OA} = k$ ტოლობა, ეწოდება ჰომოთეტია O ცენტრითა და k კოეფიციენტით და H_O^k ჩანაწერით აღინიშნება.

1-ელ ნახაზზე A_1 წერტილი მიღებულია A წერტილის H_O^2 ჰომოთეტიით, რადგან A_1-წერტილი OA სხივზე მდებარეობს და სრულდება $\frac{OA_1}{OA} = 2$ ტოლობა.

ჰომოთეტია განიმარტება უარყოფითი კოეფიციენტისთვისაც. ამ შემთხვავაში A_1 წერტილი აიღება OA-ს დამატებით სხივზე ისე, რომ $\frac{OA_1}{OA} = -k = |k|$. მე-2 ნახაზზე მოცემულია წერტილების განლაგება $H_0^{-1} = (A) = A'$ შემთხვევაში.



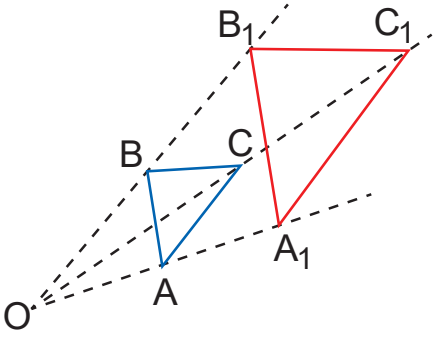
ნახ. 1



ნახ. 2

თუ H_0^k ჰომოთეტიით F ფიგურა F_1 ფიგურაში გადადის, მაშინ F_1 ფიგურას ეწოდება F ფიგურის ჰომოთეტიური ფიგურა k კოეფიციენტით.

მე-3 ნახაზზე მოცემულია ABC სამკუთხედის ჰომოთეტიური $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი 2-ის ტოლი კოეფიციენტით. ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება: $H_0^2(ABC) = A_1B_1C_1$.

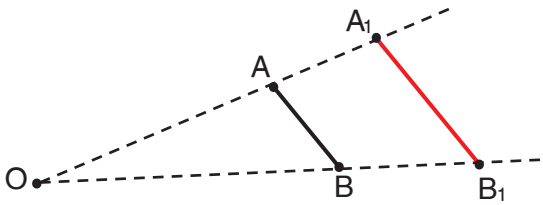


ნახ. 3

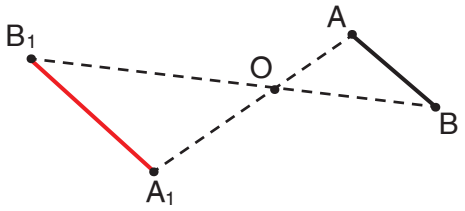
ამოცანა 1. ავაგოთ AB მონაკვეთის ჰომოთეტიური მონაკვეთი მოცემული O ცენტრით და k კოეფიციენტით.

ამოხსნა: საკმარისია ავაგოთ A და B წერტილების ჰომოთეტიური წერტილები და შევაერთოთ. მე-4 ა ნახაზზე აგება შესრულებულია 1,5 კოეფიციენტის, ხოლო მე-4 ბ ნახაზზე –1,5 კოეფიციენტისთვის.

ორივე ნახაზზე $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = |k| = 1{,}5$. ეს კი ნიშნავს, რომ A_1B_1 და ABC მსგავსი სამკუთხედებია მსგავსების |k| კოეფიციენტით (ახსენი რატომ). ამასთან, ჰომოთეტიით AB მონაკვეთი მის პარალელურ მონაკვეთში გადავიდა. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება:



ნახ. 4ა



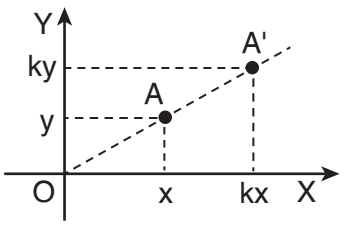
ნახ. 4ბ

თეორემა 1. H_O^k ჰომოთეტიით წრფე პარალელურ წრფეში, ხოლო ფიგურა მსგავს ფიგურაში გადადის.

თეორემა 2. ჰომოთეტიით კუთხის სიდიდე არ იცვლება, ხოლო მონაკვეთის სიგრძე |k|-ზე მრავლდება.

შედეგი. ჰომოთეტიური ფიგურების პერიმეტრების შეფარდება |k|-ს, ხოლო ფართობების შეფარდება k^2-ის ტოლია.

განვიხილოთ ჰომოთეტია საკოორდინატო სიბრტყის შემთხვევაში. თუ ჰომოთეტიის ცენტრად კოორდინატთა სათავეს ავიღებთ, მაშინ ყოველი A (x; y) წერტილი A'(kx; ky) წერტილში გადავა (ნახ. 5).



ნახ. 5

ამოცანა 2. რა კოორდინატები ექნება A (x;y) წერტილის ანასახს, თუ მასზე $H_O^{k_1} \circ H_O^{k_2}$ კომპოზიციით ვიმოქმედებთ?

ამოხსნა: $H_O^{k_2}(A)=A_1(k_2x;k_2y)$, ხოლო

$H_O^{k_1}(A_1)=A_2(k_1k_2x;k_1k_2y)$.

პასუხი: ანასახის კოორდინატებია $(k_1k_2x;k_1k_2y)$.

ამოცანა 3. საკოორდინატო XOY სიბრტყეზე მოცემულია ორი წერტილი: $A(x_1;y_1)$ და $B(x_2;y_2)$. რა სიგრძე ექნება AB მონაკვეთის H_O^k ჰომოთეტიით მიღებულ ანასახს?

ამოხსნა: მე-2 თეორემის თანახმად, AB მონაკვეთის ანასახის სიგრძე იქნება AB-ს სიგრძე გამრავლებული k-ს მოდულზე. ამიტომ, საკმარისია გამოვთვალოთ AB მონაკვეთის სიგრძე და გავამრავლოთ |k|-ზე. AB მონაკვეთის სიგრძე კი, A და B წერტილების მოცემული კოორდინატების მიხედვით, როგორც ვიცით, გამოითვლება ფორმულით:

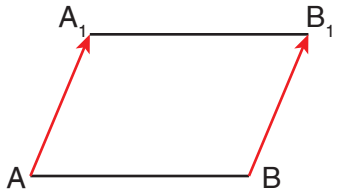
$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

პასუხი: $|k|\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

გავიხსენოთ **პარალელური გადატანა.**

პარალელურ გადატანას ყოველი წერტილი ერთი და იმავე მიმართულებით და ერთი და იმავე მანძილზე გადააქვს.

მე-6 ნახაზზე მოცემულია პარალელური გადატანა, რომელსაც A წერტილი A_1 წერტილში, B წერტილი B_1 წერტილში, ხოლო AB მონაკვეთი A_1B_1 მონაკვეთში გადააქვს. იმის გამო, რომ ნა-



ნახ. 6

ხაზზე მოცემული AA_1B_1B ოთხკუთხედი პარალელოგრამია (ახსენი, რატომ), შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ:

ა) $A_1B_1 = AB$, ანუ პარალელური გადატანა მანძილებს არ ცვლის;

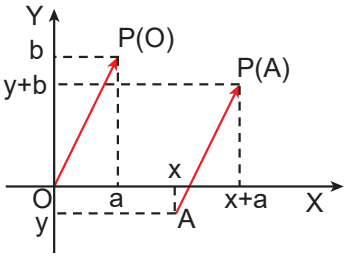
ბ) $A_1B_1 \| AB$, ანუ პარალელურ გადატანას მონაკვეთი მის პარალელურ მონაკვეთში გადააქვს.

ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს:

თეორემა. პარალელურ გადატანას ფიგურა მის ტოლ ფიგურაში გადააქვს.

პარალელურ გადატანას, თვალსაჩინოდ წარმოსადგენად, ისრით აღნიშნავენ. მაგალითად, მე-6 ნახაზზე AA_1 და BB_1 ისრებით ერთი და იგივე პარალელური გადატანაა აღნიშნული, რადგან მათ ერთი და იგივე სიგრძე და ერთი და იგივე მიმართულება აქვს. პარლელურ გადატანას P ასოთი აღვნიშნავთ. ის ფაქტი, რომ P პარალელური გადატანით A წერტილი A_1 წერტილში გადადის, ასე ჩაიწერება: $P(A) = A_1$.

მე-7 ნახაზზე მოცემულია XOY საკოორდინატო სიბრტყე და P პარალელური გადატანა. P(0) წერტილის კოორდინატებს პარალელური გადატანის კოორდინატები ეწოდება. მოცემულ ნახაზზე P პარალელური გადატანის კოორდინატებია (a; b).



ნახ. 7

როგორც ნახაზიდან ჩანს, (a; b) კოორდინატების მქონე P პარალელურ გადატანას ყოველი (x; y) კოორდინატების მქონე A წერტილი (x+a; y+b) კოორდინატების მქონე P(A) წერტილში გადააქვს.

ხშირად პარალელურ გადატანას ვექტორთან აიგივებენ, რადგან ვექტორიც ისევე, როგორც პარალელური გადატანა, მიმართულებითა და სიგრძით განისაზღვრება. ასეთი გაიგივების შემთხვევაში ორი ვექტორის ჯამს ორი პარალელური გადატანის კომპოზიცია შეესაბამება.

ამოცანა 4. რა კორდინატები ექნება A(x; y) წერტილის ანასახს, თუ მასზე $P_1 \circ P_2$ კომპოზიციით ვიმოქმედებთ, სადაც P_1 და P_2 პარალელური გადატანებია, შესაბამისად $(a_1; b_1)$ და $(a_2; b_2)$ კოორდინატებით?

ამოხსნა:

$$P_2(A) = A_1(x + a_2; y + b_2),\ P_1(A_1) = A_2(x + a_2 + a_1; y + b_2 + b_1).$$

პასუხი: ანასახის კოორდინატებია $(x + a_1 + a_2; y + b_1 + b_2)$.

ამ ამოცანაში მიღებული პასუხიდან ვასკვნით, რომ ორი პარალელური გადატანის კომპოზიციის კოორდინატები თითოეული პარალელური გადატანის კოორდინატების ჯამის ტოლია.

უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ ააგებ: ა) მრავალკუთხედის ჰომოთეტიურ მრავალკუთხედს? ბ) წრფის ჰომოთეტიურ წრფეს?
2. რა ფიგურაში გადაიყვანს ჰომოთეტია წრფეს?
3. როგორ სამკუთხედში გადაიყვანს ჰომოთეტია სამკუთხედს?
4. რა კოორდინატები აქვს მოცემული წერტილის ჰომოთეტიით მიღებულ წერტილს, თუ ჰომოთეტიის ცენტრი კოორდინატთა სათავე, ხოლო კოეფიციენტი k-ს ტოლია?
5. თუ ჰომოთეტია ცენტრული სიმეტრიაა, მაშინ რის ტოლია მისი კოეფიციენტი?
6. რას გვიჩვენებს პარალელური გადატანის კოორდინატები?
7. როგორ გამოითვლება ორი პარალელური გადატანის კომპოზიციის კოორდინატები?

სავარჯიშოები

1. დახაზე AB მონაკვეთი და ააგე მისი ჰომოთეტიური A_1B_1 მონაკვეთი იმ შემთხვევაში, როცა ჰომოთეტიის ცენტრი მონაკვეთს არ ეკუთვნის და: ა) k= 2; ბ) k=0,5.
2. დახაზე AB მონაკვეთი და ააგე მისი ჰომოთეტიური A_1B_1 მონაკვეთი იმ შემთხვევაში, როცა ჰომოთეტიის ცენტრი მონაკვეთის შიგა წერტილია და: ა) k= -2; ბ) k=0,5.
3. დახაზე AB მონაკვეთი და ააგე მისი ჰომოთეტიური A_1B_1 მონაკვეთი იმ შემთხვევაში, როცა ჰომოთეტიის ცენტრია A წერტილი და: ა) k= 2; ბ) k=-0,5;
4. მესამე ნახაზის მიხედვით დაადგინე O ცენტრის მქონე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ ჰომოთეტიით:

   ა) A წერტილი A_1 წერტილში გადავიდა;

   ბ) A_1 წერტილი A წერტილში გადავიდა.
5. დახაზე ABCD ოთხკუთხედი და ააგე მისი ჰომოთეტიური $A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხედი იმ შემთხვევაში, როცა ჰომოთეტიის ცენტრი ოთხკუთხედის შიგა წერტილია, თუ: ა) k= 2; ბ) k=0,5.
6. იპოვე A(2; –3) წერტილის ჰომოთეტიური წერტილის კოორდინატები, თუ ჰომოთეტიის ცენტრია კოორდინატთა სათავე, ხოლო კოეფიციენტი –2,5.
7. იპოვე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ 2 სმ-იანი რადიუსის წრეს იგი 7 სმ-იანი რადიუსის წრეში ასახავს.



8. იპოვე იმ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, რომელიც:

ა) დედამიწას მზეზე ასახავს;

ბ) დედამიწას მთვარეზე ასახავს.

9. იპოვე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ 12,6 სმ-ის სიგრძის მონაკვეთი ჰომოთეტიით 16,8 სმ სიგრძის მონაკვეთში აისახა.

10. იპოვე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ ის 9 სმ პერიმეტრის მქონე სამკუთხედს 27 სმ პერიმეტრის მქონე სამკუთხედში ასახავს.

11. იპოვე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ ის 10 სმ^2 ფართობის ოთხკუთხედს 40 სმ^2 ფართობის მქონე ოთხკუთხედში ასახავს.

12. რა კოორდინატების მქონე წერტილში გადავა A(3; –2,5) წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ ჰომოთეტიით, რომლის კოეფიციენტია: ა) 4; ბ) –1.

13. კოორდინატთა სათავის მიმართ ჰომოთეტიით A(1; 7) წერტილი A_1(–4; x) წერტილში გადავიდა. იპოვე x.

14. იპოვე კოორდინატთა სათავის მიმართ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ A(3; 0) წერტილი ამ ჰომოთეტიით B(–9; 0) წერტილში გადავიდა.

15. რამდენი განსხვავებული ჰომოთეტიით შეიძლება ორი კონცენტრირებული წრიდან ერთის მეორეზე ასახვა?

16. P პარალელური გადატანის კოორდინატებია (1; –1). იპოვე P(A) წერტილის კოორდინატები, თუ A წერტილის კოორდინატებია: ა) (–1; 1); ბ) (4; –3).

17. იპოვე P პარალელური გადატანის კოორდინატები, თუ მას A(3; –2) წერტილი B(–1; 4) წერტილში გადააქვს.

18. პარალელურმა გადატანამ A(–5; 2,2) წერტილი B(0; 2,7) წეტილში ასახა. რა კოორდინატების მქონე წერტილ-

ში ასახავს იგივე პარალელური გადატანა კოორდინატთა სათავეს?

19. პარალელური გადატანით D(7; –2) წერტილი კოორდინატთა სათავეში აისახა. იპოვე პარალელური გადატანის კოორდინატები.

20. რა წერტილში აისახება A(1; 3) წერტილი, თუ მასზე ჯერ კოორდინატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით, ხოლო შემდეგ P(1; –1) პარალელური გადატანით ვიმოქმედებთ?

21. რა წერტილში აისახება A(3; –3) წერტილი, თუ მასზე ჯერ ორდინატთა ღერძის მიმართ სიმეტრიით, ხოლო შემდეგ P(1; –1) პარალელური გადატანით ვიმოქმედებთ?

22. P პარალელური გადატანის კოორდინატებია (–2; 3). რა კოორდინატები აქვს PoP კომპოზიციას?

23. დაამტკიცე რომ: $H^k_o o H^{\frac{1}{k}}_o$ კომპოზიცია ერთი და იმავე O ცენტრის მქონე ჰომოთეტიების შემთხვევაში იგივური გარდაქმნაა.

24. დაამტკიცე, რომ P(a,b) და P(-a;-b) პარალელური გადატანების კომპოზიცია იგივური გარდაქმნაა.

25. რამდენი განსხვავებული ჰომოთეტიით შეიძლება $R_1 \neq R_2$ რადიუსების მქონე თანაუკვეთი წრიდან ერთის მეორეზე ასახვა? თითოეულ შემთხვევაში გამოთვალე ჰომოთეტიის კოეფიციენტი.

26. გამოთვალე ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი, თუ k=3 კოეფიციენტის მქონე ჰომოთეტიით ეს სამკუთხედი $36\sqrt{3}$ სმ^2 ფართობის მქონე სამკუთხედზე აისახება.

27. დაამტკიცე, რომ ჰომოთეტიის ცენტრზე გამავალი წრფე ჰომოთეტიით თავის თავზე აისახება.

28. გამოთვალე PoH^k_o და $H^k_o oP$ გარდაქმნებით A(x; y) წერტილის ანასახების კოორდინატები, თუ P პარალელური გადატანის კოორდინატებია (a; b), ხოლო ჰომოთეტიის ცენტრია კოორდინატთა სათავე. რა შემთხვევაში იქნება მოცემული ორი გარდაქმნა ერთი და იგივე?

29. რა წრფეში აისახება y=2x+3 ფუნქციის გრაფიკი (–2; 4) კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანით?

30. რა წრფეში აისახება y=ax+b ფუნქციის გრაფიკი ჰომოთეტიით, რომლის ცენტრია კოორდინატთა სათავე, ხოლო კოეფიციენტი – k.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- ჰომოთეტიისა და პარალელური გადატანის ჩაწერა კოორდინატებში;
- გეომეტრიული გარდაქმნების კომპოზიციის ჩაწერა კოორდინატებში.

მესამე თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. რა კოორდინატები აქვს $\overrightarrow{AB}$ ვექტორს, თუ A წერტილის კოორდინატებია (–1;13), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (7; 25)?

2. გამოთვალე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე, თუ მისი კოორდინატებია (24;–7).

3. გამოთვალე $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}$ და $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, სადაც $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ორტებია.

4. $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებია (–7;2). წარმოადგინე $\vec{a}$ ვექტორი ორტების საშუალებით.

5. იპოვე $\vec{a}(3;-4)$ და $\vec{b}=(-9;12)$ ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდე.

6. გამოთვალე $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$, თუ a=7 სმ, b=8 სმ.

7. წარმოადგინე $\vec{a}$ (5;–5) ვექტორი $\vec{b}$ (1;1) და $\vec{c}$ (2;–3) ვექტორების საშუალებით.

8. ABC სამკუთხედში AK ბისექტრისაა. წარმოადგინე $\overrightarrow{AK}$ ვექტორი $\overrightarrow{AC}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების საშუალებით, თუ AB=5 სმ, ხოლო AC=10 სმ.

9. რა მანძილია (3;–3;1) კოორდინატების მქონე წერტილიდან OXZ საკოორდინატო სიბრტყემდე?

10. იპოვე $\vec{a}$ (3;–4;0) ვექტორის სიგრძე.

11. იპოვე AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ A წერტილის კოორდინატებია (–3;4;5) და B წერილის კოორდინატებია (3;4;–3).

12. დაადგინე $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$, სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ორტებია.

13. გამოთვალე $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე, თუ $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, ხოლო $\vec{b}=-\vec{i}+4\vec{j}$, სადაც $\vec{i}$, $\vec{k}$ და $\vec{k}$ ორტებია.

14. გამოთვალე $\vec{a}$ (–3;0;–4) და $\vec{b}$ (0;5;–12) ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი.

15. მოცემულია სამი წერტილი: A(4;2;-2), B(6;4;-2) და C(6;2;0). გამოთვალე $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდე.

შესაძლებელია?

სამი არაკომპლანარული ვექტორიდან ორი ვექტორი იყოს კოლინეარული?

აბა, სცადე!

ABCD პირამიდის ყველა წიბო ტოლია. მისი ABC ფუძის A და B წვეროს კოორდინატებია შესაბამისად (1;0;0), (-1;0;0), ხოლო C წვერო OXY სიბრტყეშია. იპოვე D წვეროს კოორდინატები.

16. იპოვე x და y, თუ $\vec{a}$ (x; 4; 7) და $\vec{b}$ (1;y; –14) კოლინეარული ვექტორებია.

17. იპოვე x და y, თუ $\vec{b}$ (x; –1; y) და $\vec{b}$ (y; –x; 8) კოლინეარული ვექტორებია.

18. გამოთვალე ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ AB და BC ვექტორების სკალარული ნამრავლია –12, ხოლო ABC სამკუთხედის B კუთხის კოსინუსი 0,6-ის ტოლია.

19. საკოორდინატო სიბრტყეში მდებარე A წერტილის კოორდინატებია (2; 5), ხოლო B წერტილის კოორდინატებია (–1;1). იპოვე იმ პარალელური გადატანის კოორდინატები, რომელსაც A წერტილი კოორდინატთა სათავეში გადააქვს. რა კოორდინატების მქონე წერტილში გადავა ამ პარალელური გადატანით B წერტილი?

20. A წერტილზე, რომლის კოორდინატებია (x; y), ჯერ იმოქმედეს კოორდინატთა სათავის მიმართ 90°-იანი მობრუნებით, ხოლო შემდეგ ჰომოთეტიით, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და 2-ის ტოლი კოეფიციენტით. დაადგინე მიღებული წერტილის კოორდინატები.

21. რეინჯერი ნავით მდინარის ერთი ნაპირიდან უნდა გადავიდეს მეორე ნაპირზე. მდინარის სიჩქარეა 6კმ/სთ, ხოლო ნავის საკუთარი სიჩქარე 10კმ/სთ. მდინარის სიგანე 400 მეტრია. რამდენ წუთში აღმოჩნდება რეინჯერი მეორე ნაპირზე, თუ დინების მიმართ ისეთი კუთხით იცურებს, რომლითაც ნავის მიერ გავლილი მანძილი იქნება უმოკლესი?



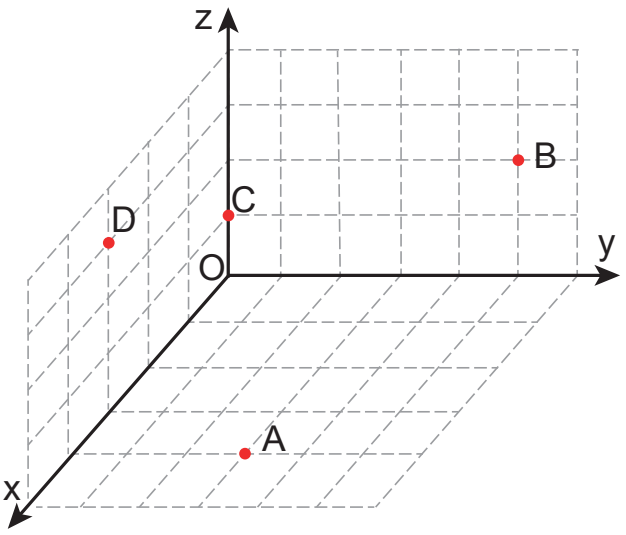
„დაგეგმარება ვექტორებით"

კარგადაა ცნობილი რა დიდი გამოყენება აქვს ვექტორებს ფიზიკაში. ფიზიკაში განხილული სიდიდეების დიდი ნაწილი ხომ ვექტორული სიდიდეებია. მაგრამ ვექტორებს ბევრ სხვა პრაქტიკულ საქმიანობაშიც ვიყენებთ. ერთ-ერთი ასეთია სახმელეთო, საზღვაო და საჰაერო მარშრუტების დაგეგმარება.

ნახაზზე საჰაერო მარშრუტის ერთი სქემაა მოცემული.

სქემაზე მოცემულია სივრცული (სამგანზომილებიანი) მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომელზეც წერტილების სახით დატანილია დასახლებული პუნქტები. A პუნქტი რაიონული ცენტრია, B, C და D რაიონის მაღალმთიანი სოფლები. რაიონული ცენტრი მიჩნეულია ნულოვან დონედ, ხოლო სოფლები ამ დონიდან სხვადასხვა სიმაღლეზე მდებარეობენ. ერთეულის ზომად აღებულია 1კმ.

ვერტმფრენი ყოველკვირეულად ახორციელებს წრიულ ფრენას რაიონული ცენტრიდან სამივე სოფლის მიმართულებით.



დავალება

1. მოცემული სქემის ანალიზი.

ა) სქემის მიხედვით დაადგინეთ ოთხივე პუნქტის კოორდინატები; ბ) დაადგინეთ მანძილები მოცემულ პუნქტებს შორის; გ) დაადგინეთ კუთხეები $\overline{AC}$ და $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ და $\overline{AC}$ ვექტორებს შორის; დ) გაარკვიეთ, არის თუ არა მოცემული ოთხი პუნქტი ერთ სიბრტყეში; ე) გაარკვიეთ, A პუნქტიდან B პუნქტისაკენ მიმავალმა ვერტმფრენმა რა კუთხით უნდა იფრინოს აღმოსავლეთ მიმართულებასთან (OX ღერძი გვიჩვენებს სამხრეთ მიმართულებას); ვ) შეადგინეთ მარშრუტის ვექტორული სქემა მანძილებისა და კუთხეების მითითებით.

2. რეალური სქემის შედგენა.

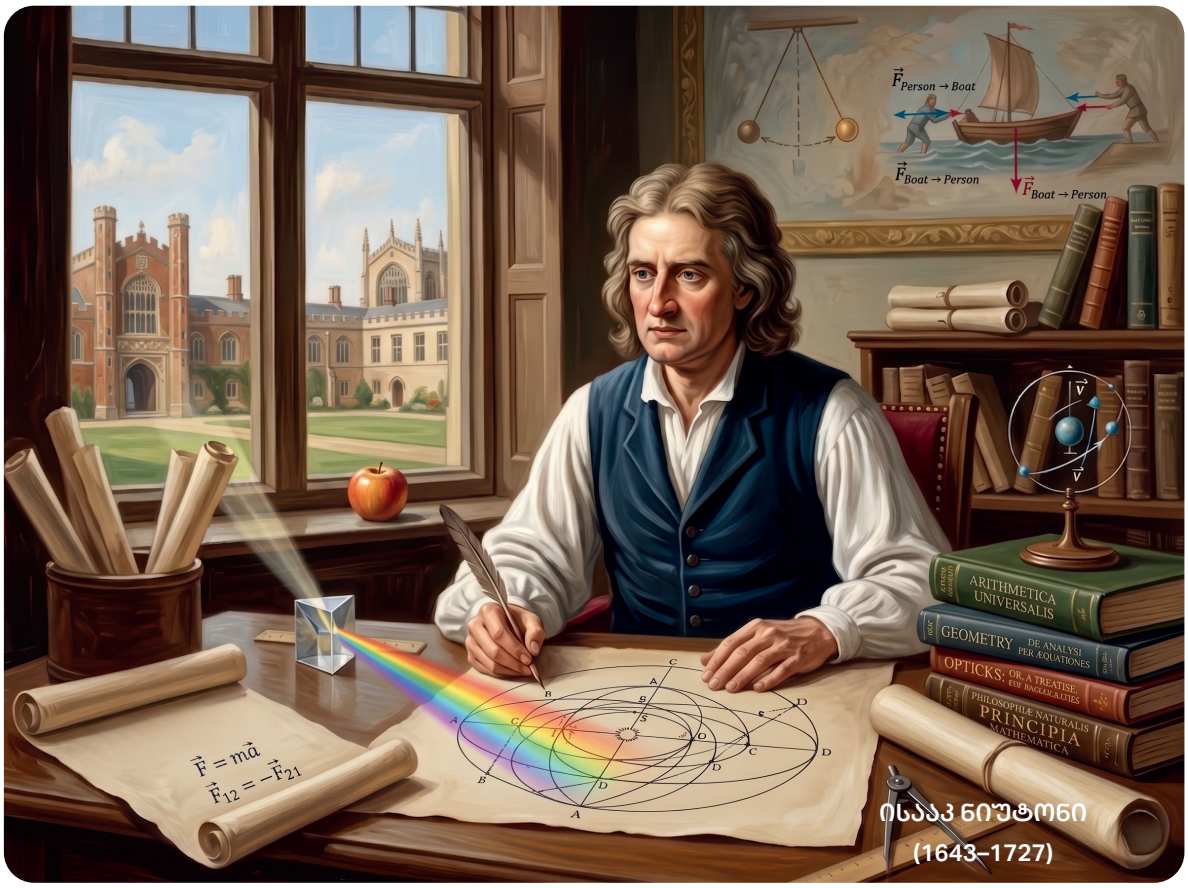
ა) საცხოვრებლის მახლობლად (ან თქვენთვის მისაღებ სხვა ლოკაციაში) შეარჩიეთ 3-4 პუნქტი და შეადგინეთ ტურისტული მარშრუტის (ან სხვა დანიშნულების, მაგალითად, სკოლიდან სახლამდე მისასვლელი სვლაგეზი) სქემა;

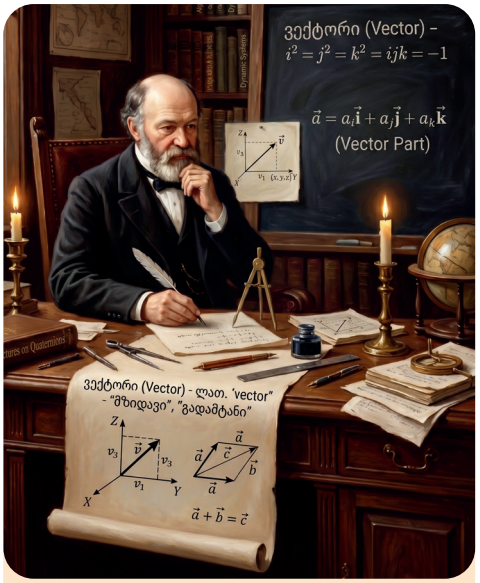
ბ) ააგეთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა (სასურველია სამგანზომილებიანი);

გ) დაიტანეთ შერჩეული პუნქტები, მიუთითეთ კოორდინატები, მიმართულებები და მანძილები ვექტორების საშუალებით;

დ) მიუთითეთ გადაადგილების თანმიმდევრობა და კუთხეები მიმართულებებს შორის.

ე) ნაშრომს დაურთეთ შესაბამისი ნახაზები და შერჩეული პუნქტების ფოტოები.





ტერმინი „ვექტორი“ ირლანდიელმა მათემატიკოსმა **იულიამ როუენ ჰამილნტონმა** (1805-1865 წ) დაამკვიდრა.

ლათინურად „VECTOR“ ნიშნავს: „მზიდავს“, „გადამტანს“.

ჯერ კიდევ მე-17 საუკუნეში დიდი ინგლისელი მეცნიერი **ისააკ ნიუტონი** იყენებდა ვექტორებს მექანიკის კანონების შესწავლასა და გადმოცემაში. ნიუტონი მიხვდა, რომ ისეთი ფიზიკური სიდიდეების დასახასიათებლად და მათზე მოქმედებების საწარმოებლად, როგორებიცაა ძალა, სიჩქარე და აჩქარება, საკმარისი არაა ამ სიდიდეთა მხოლოდ რიცხვითი მახასიათებელი, რადგან მათი მოქმედების შედეგი დამოკიდებულია მათ მიმართულებაზეც.

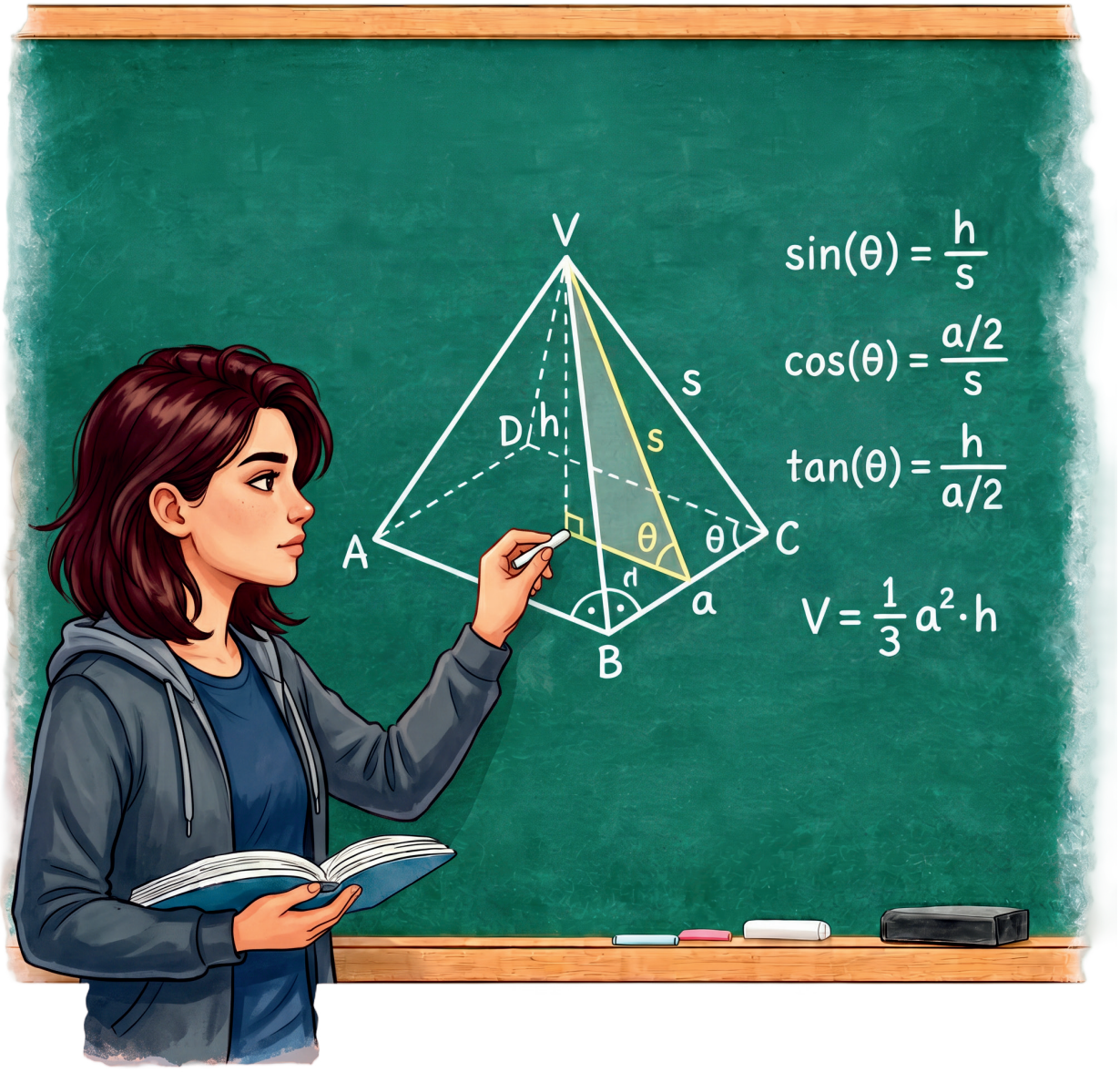
მიუხედავად იმისა, რომ ნიუტონის დროს ტერმინი „ვექტორი“ ჯერ არ არსებობდა, მისი ნაშრომები ფაქტობრივად ეყრდნობა ვექტორის ცნებასა და თვისებებს. მაგალითად, ნიუტონის კანონები თანამედროვე ტერმინებით შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ:

I კანონი. სხეულის სიჩქარე (ანუ ვექტორი) არ იცვლის სიდიდესა და მიმართულებას, თუ მასზე ძალა არ მოქმედებს;

II კანონი. ძალა (ვექტორი) ტოლია მასა (სკალარი) გამრავლებული აჩქარებაზე (ვექტორზე): $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$;

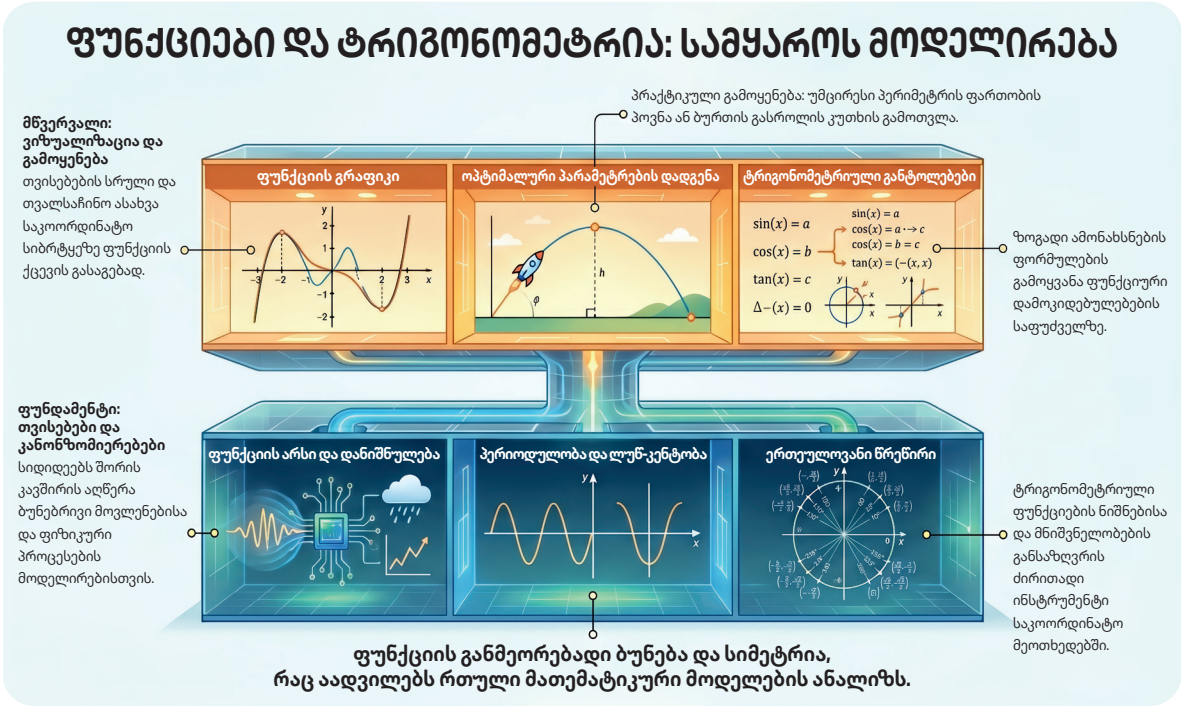
III კანონი. სხეულები ერთმანეთზე ტოლი და ერთმანეთის საპირისპირო ძალით (ვექტორებით) მოქმედებენ: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

თავი 4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები



ამ თავში ისწავლი:

- ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციების თვისებებს;
- y=sinx ფუნქციის თვისებებსა და გრაფიკს;
- y=cosx ფუნქციის თვისებებსა და გრაფიკს;
- y=tanx ფუნქციის თვისებებსა და გრაფიკს;
- უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამონახსნთა ფორმულებს.



ფუნქცია მათემატიკის ერთერთი ფუნდამენტური ცნებაა. მისი დახმარებით აღვწერთ ბუნების მოვლენებს, ერთმანეთთან ვაკავშირებთ სხვადასხვა ფიზიკურ, მათემატიკურ თუ სხვა ბუნებისა და შინაარსის სიდიდეებს. ფუნქციებს გასულ წელს ვიყენებდით და წელსაც გამოვიყენებთ ისეთი პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად, რომლებშიც დასადგენია ამა თუ იმ ობიექტის ოპტიმალური პარამეტრები (ასეთებია, მაგალითად, მოცემული ფართობის მქონე უმცირესი პერიმეტრის ფიგურის პარამეტრების დადგენა, ან ბურთის უშორეს მანძილზე გასასროლად საჭირო კუთხის პოვნა და.ა.შ.)

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებები (პერიოდულობა, ლუწ-კენტობა, ნიშნები მეოთხედების მიხედვით) სახელმძღვანელოს პირველ თავში ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით შევისწავლეთ. მაგრამ ტრიგონომეტრიული და ზოგადად ნებისმიერი რიცხვითი ფუნქციის სრულყოფილი შესწავლა გულისხმობს საკოორდინატო სიბრტყეში მისი გრაფიკის აგებას. ფუნქციის გრაფიკი იძლევა სრულ და თვალსაჩინო ინფორმაციას ფუნქციის თვისებების შესახებ.

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს ლუწ-კენტობის და პერიოდულობის თვისებები აქვთ. ამიტომ, ამ თავის პირველი პარაგრაფი ამ თვისებების მქონე ფუნქციებისა და მათი გრაფიკების ზოგად დახასიათებას ეძღვნება. ბოლო, დამამთავრებელ პარაგარფში კი ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ზოგადი ამონახსნების ფორმულებია გამოყვანილი.

თავის შესწავლის შემდეგ შეძლებ:

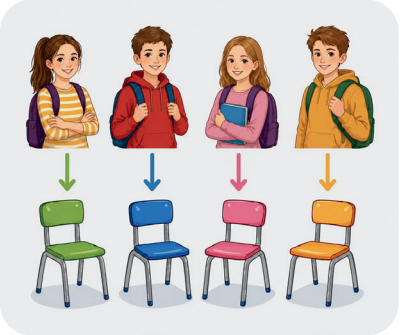
- ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციის ამოცნობას;
- ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციების გრაფიკების აგებას;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ამოცნობას მისი გრაფიკის მიხედვით;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკების აგებას;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციის დახასიათებას მისი გრაფიკის მიხედვით;
- ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნულების, ზრდადობა-კლებადობისა და ნიშანმუდმივობის შუალედების დადგენას;
- მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნას.

4.1

პერიოდული, ლუწი და კენტი ფუნქციები

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **ფუნქციის, მისი განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის განმარტება;**
- **რიცხვითი ფუნქციის გრაფიკის განმარტება და მაგალითების მოყვანა;**
- **პერიოდული, კენტი და ლუწი ფუნქციების განმარტება და მაგალითების მოყვანა;**
- **პერიოდული, კენტი და ლუწი ფუნქციების გრაფიკის დახასიათება;**
- **ფუნქციის პერიოდულობის და ლუწ-კენტობის დადგენა;**
- **პერიოდული ფუნქციის გრაფიკის აგება.**



ფუნქცია ორ ცვლადს შორის ისეთი შესაბამისობაა, როდესაც ერთი ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას მეორე ცვლადის ერთადერთი მნიშვნელობა შეესაბამება. პირველ ცვლადს ფუნქციის არგუმენტი, ხოლო მეორეს ფუნქციის მნიშვნელობა ეწოდება. თუ ამ ცვლადებს x-ით და y-ით აღვნიშნავთ, ხოლო წესს, რომლითაც x ცვლადის მნიშვნელობებს y ცვლადის მნიშვნელობები შეესაბამება – f-ით, დავწერთ, რომ მოცემულია y=f(x) ფუნქცია. იმ სიმრავლეს, რომლიდანაც x ცვლადი მნიშვნელობებს იღებს, f ფუნქციის განსაზღვრის არე, ხოლო იმ სიმრავლეს, რომლიდანაც მნიშვნელობებს იღებს y ცვლადი, **მნიშვნელობათა არე** ეწოდება.

ზოგადად, როგორც განსაზღვრის, ისე მნიშვნელობათა სიმრავლე ნებისმიერი ბუნების სიმრავლე შეიძლება იყოს. მაგალითად, თუ კლასის ყოველ მოსწავლეს შევუსაბამებთ სკამს, რომელზედაც ზის, მივიღებთ ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე იქნება კლასის მოსწავლეთა სიმრავლე, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე – კლასში არსებული სკამების სიმრავლე.

ფუნქციას, რომლის როგორც განსაზღვრის, ისე მნიშვნელობათა არე რიცხვითი სიმრავლეებია, **რიცხვითი ფუნქცია** ეწოდება. რიცხვითი ფუნქციის მაგალითებია:

წრფივი ფუნქცია: y=kx+b, სადაც k და b მოცემული რიცხვებია;

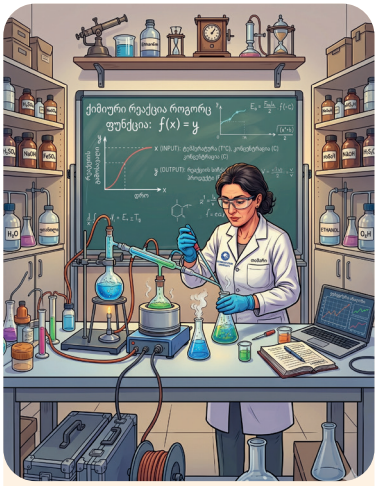
კვადრატული ფუნქცია: $y=ax^2+bx+c$, სადაც a, b და c მოცემული რიცხვებია;

ტრიგონომეტრიული ფუნქცია: y=sinx და სხვ.

ყველა ამ ფუნქციაში x და y რიცხვით მნიშვნელობებს იღებს.

ამა თუ იმ რიცხვითი ფუნქციის შესწავლის დროს მნიშვნელოვანია მისი გრაფიკის აგება. f ფუნქციის გრაფიკი (x; f(x)) კოორდინატების მქონე წერტილთა ერთობლიობაა საკოორდინატო სიბრტყეზე. გრაფიკი თვალსაჩინოდ წარმოგვიდგენს ფუნქციის თვისებებს. წინა კლასებში შევისწავლეთ წრფივი და კვადრატული ფუნქციები (გაიხსენე, რას წარმოადგენენ მათი გრაფიკები). ამ თავში შევისწავლით სამივე ტრიგონომეტრიულ ფუნქციას და ავაგებთ მათ გრაფიკებს.

ფუნქციის გრაფიკის აგების დროს დიდი მნიშვნელობა აქვს ვიცოდეთ, ხომ არაა ეს ფუნქცია პერიოდული, ლუწი ან კენტი. ფუნქციის ასეთი თვისებები გრაფიკს ამ თვისებებისთვის დამახასიათებელ ვიზუალს სძენს, რისი ცოდნაც გვეხმარება გრაფიკის სწორად აგებაში.



დღეს ფუნქციის გარეშე შეუძლებელია:

- ქიმიური რეაქციების პროგნოზირება, რადგან ყოველივე ეს დინამიური პროცესია, რომელსაც აღწერს ფუნქცია;
- კოსმოსური ტრაექტორიის გათვლა;
- ბირთვული რეაქტორების მუშაობა;
- ციკლონების განვითარების კანონზომიერების დადგენა.

გავიხსენოთ პერიოდული ფუნქციის განმარტება:

f რიცხვით ფუნქციას ეწოდება **პერიოდული ფუნქცია T პერიოდით,** თუ არსებობს ისეთი T არანულოვანი რიცხვი, რომ f ფუნქციის განსაზღვრის არედან აღებული ყოველი x რიცხვისათვის სრულდება ორი პირობა:

1. x+T და x–T რიცხვები ეკუთვნის f ფუნქციის განსაზღვრის არეს;
2. f(x–T)=f(x+T)=f(x).

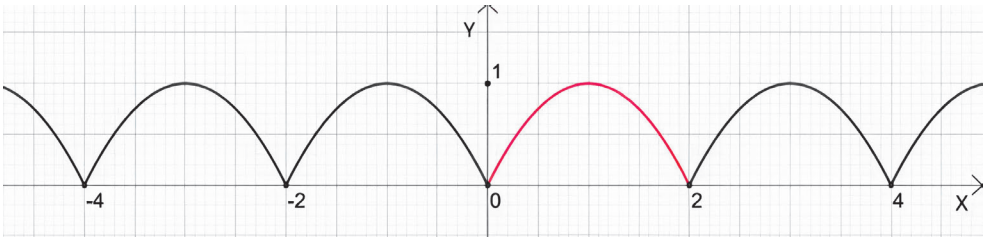
ადვილად შეგიძლია დარწმუნდე, რომ, თუ T რიცხვი f ფუნქციის პერიოდია, მაშინ f ფუნქციის პერიოდი იქნება, აგრეთვე, T რიცხვის ნებისმიერი ჯერადი რიცხვი, ანუ kT სახის რიცხვი, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

პერიოდული ფუნქციის უმარტივესი მაგალითია მუდმივი ფუნქცია. ასეთი ფუნქციის პერიოდი იქნება ნებისმიერი არანულოვანი რიცხვი (ახსენი, რატომ). სახელმძღვანელოს პირველ თავში დავრწმუნდით, რომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები პერიოდული ფუნქციებია. სინუსის და კოსინუსის უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ხოლო ტანგენსის უმცირესი დადებითი პერიოდია π.

მთელ რიცხვით ღერძზე განსაზღვრული T პერიოდის მქონე პერიოდული ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია გრაფიკი ავაგოთ T სიგრძის რაიმე შუალედში, ხოლო შემდეგ ეს გრაფიკი (kT; 0), $k \in Z$, პარალელური გადატანებით გავავრცელოთ მთელ აბსცისათა ღერძზე.

მაგალითი. ავაგოთ y=f(x) ფუნქციის გრაფიკი, თუ f ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული 2-ის ტოლი პერიოდის მქონე ფუნქციაა, რომელიც [0;2] შუალედში მოცემულია ტოლობით: $f(x) = 2x - x^2$.

ამოხსნა. როგორც ვხედავთ [0; 2] შუალედში f კვადრატული ფუნქციაა. ამიტომ ამ შუალედში მისი გრაფიკი იქნება პარაბოლას ნაწილი. ავაგოთ ეს ნაწილი და შემდეგ (±2;0) კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანის მრავალჯერადი გამოყენებით გავავრცელოთ მთელ ღერძზე (იხილე ნახაზი).



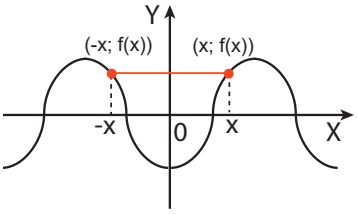
ვთქვათ, y=f(x) ფუნქციის პერიოდია T, მაშინ y=F(x)=f(kx) ფუნქციის პერიოდი, სადაც k ნებისმიერი არანულოვანი რიცხვია, იქნება $\frac{T}{k}$. მართლაც,

$$F\left(x \pm \frac{T}{k}\right) = f\left(k\left(x \pm \frac{T}{k}\right)\right) = f(kx \pm T) = f(kx) = F(x).$$

მაგალითად, ვიცით, რომ y=sinx ფუნქციის პერიოდია 2π. ამიტომ, y=sin2x ფუნქციის პერიოდი იქნება π, ხოლო y=sin0,5x ფუნქციის პერიოდია 4π.

ლუწი ეწოდება f რიცხვით ფუნქციას, თუ ყოველი x-სათვის განსაზღვრის არედან –x-იც ეკუთვნის განსაზღვრის არეს და ამასთან f(–x)=f(x).

მაგალითად, ლუწი ფუნქციაა $y=x^n$, სადაც n ლუწი ნატურალური რიცხვია. მართლაც ეს ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ რიცხვით ღერძზე და $(–x)^n=x^n$. ლუწი ფუნქციაა y=cosx, რადგან cos(–x)=cosx.

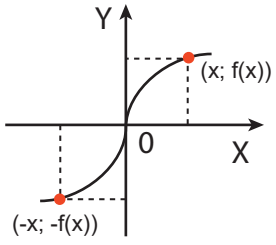


ნახ. 1

ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, რადგან ყოველ (x; f(x)) წერტილთან ერთად გრაფიკი შეიცავს (–x; f(x)) წერტილს (ნახ. 1).

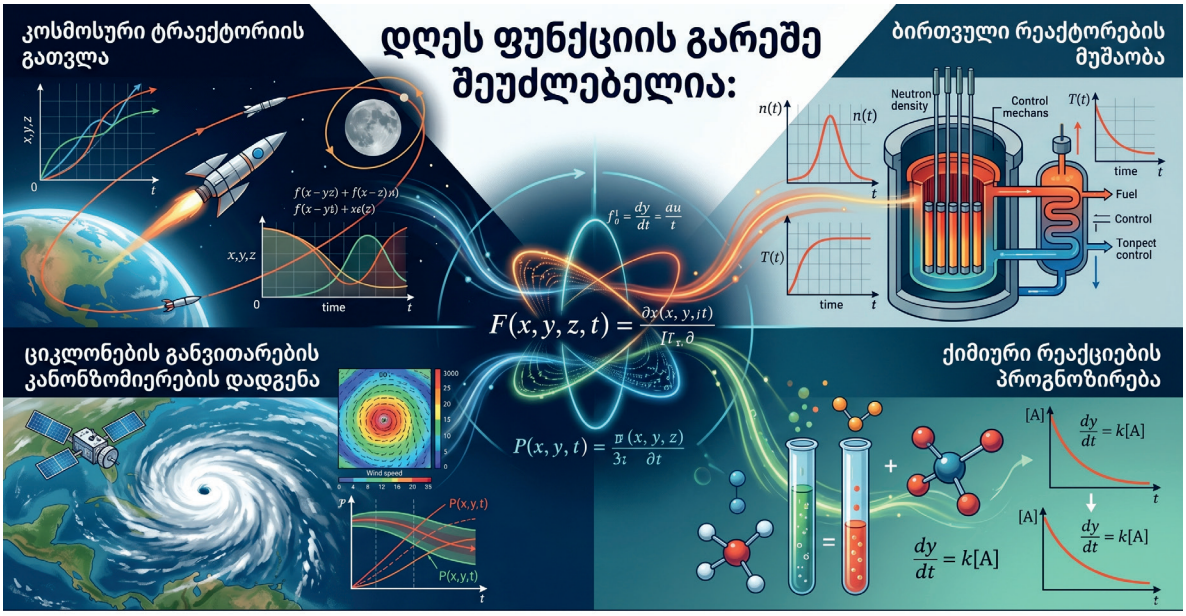
კენტი ეწოდება f რიცხვით ფუნქციას, თუ ყოველი x-სათვის განსაზღვრის არედან –x-იც ეკუთვნის განსაზღვრის არეს და ამასთან f(–x)=–f(x).

მაგალითად, კენტი ფუნქციაა $y=x^n$, სადაც n კენტი ნატურალური რიცხვია. მართლაც, ეს ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ რიცხვით ღერძზე და $(–x)^n=–x^n$. კენტი ფუნქვიაა y=sinx, რადგან sin(–x)=–sinx.



ნახ. 2

კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, რადგან ყოველ (x; f(x)) წერტილთან ერთად გრაფიკი შეიცავს (–x; –f(x)) წერტილს (ნახ. 2).



რადგან ყოველივე ეს დინამიური პროცესია, რომელსაც აღწერს ფუნქცია.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა არის ფუნქციის განსაზღვრის არე?
2. როგორ ფუნქციას ეწოდება რიცხვითი ფუნქცია?
3. რას ეწოდება რიცხვითი ფუნქციის გრაფიკი?
4. როგორ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული ფუნქცია?
5. რას ეწოდება ფუნქციის პერიოდი?
6. როგორ ააგებ პერიოდული ფუნქციის გრაფიკს?
7. რას ეწოდება კენტი ფუნქცია?
8. როგორი გრაფიკი აქვს ლუწ ფუნქციას?
9. ლუწია თუ კენტი ლუწი ფუნქციების ნამრავლი?
10. ლუწია თუ კენტი კენტი ფუნქციების ნამრავლი?

სავარჯიშოები

1. f პერიოდული ფუნქციაა 1-ის ტოლი პერიოდით. ამასთან, f(–0,3)=9.

   იპოვე: ა) f(–2,3); ბ) f(3,7).

2. f და g ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე მოცემული პერიოდული ფუნქციებია. f ფუნქციის პერიოდია 3, g ფუნქციის პერიოდია 5. ამასთან, f(0)+g(0)=–3. იპოვე:

   ა) f(3)+g(5); ბ) f(–6)+g(–10);

   გ) f(15)+g(15); დ) f(0)+g(15).

3. იპოვე მოცემული ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდი:

   ა) y=cos4x; ბ) y=sin0,2x;

   გ) y=tan2x; დ) y=sin2x+cos4x.

4. f და g ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე მოცემული პერიოდული ფუნქციებია. f ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია 4, g ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია 5. რა უმცირესი დაებითი პერიოდი აქვს f+g ფუნქციას?

5. ააგე y=f(x) ფუნქციის გრაფიკი, თუ f ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული 1-ის ტოლი პერიოდის მქონე ფუნქციაა, რომელიც [0;1] შუალედში მოცემულია ტოლობით: $f(x)=x-x^2$.

6. ააგე y=f(x) ფუნქციის გრაფიკი, თუ f ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული 4-ის ტოლი პერიოდის მქონე ფუნქციაა, რომელიც [–2; 2] შუალედში მოცემულია ტოლობით: f(x)=2–|x|.

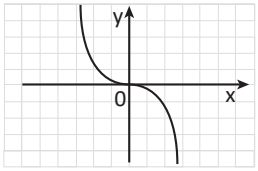
შესაძლებელია?

შესაძლებელია თუ არა ფუნქცია ლუწიც იყოს და კენტიც?

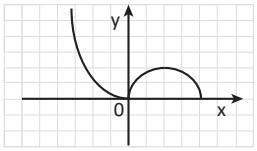
აბა, სცადე!

დაამტკიცე, რომ რიცხვით ღერძზე განსაზღვრული ნებისმიერი ფუნქცია კენტი და ლუწი ფუნქციების ჯამს წარმოადგენს.

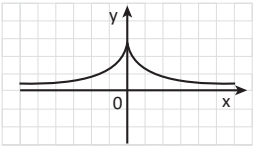
ა)



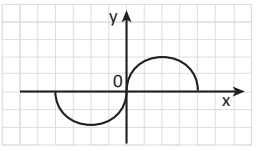
ბ)



გ)

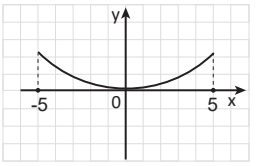


დ)

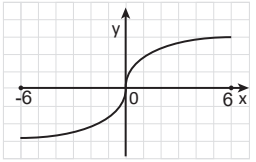


ნახ. 3

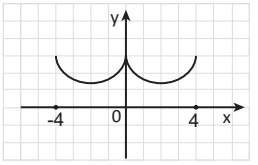
ა)



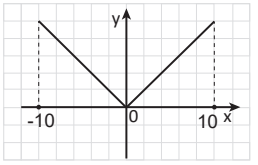
ბ)



გ)



დ)



ნახ. 4

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- პერიოდული, კენტი და ლუწი ფუნქციების თვისებები;
- პერიოდული, კენტი და ლუწი ფუნქციების გრაფიკები

7. ვთქვათ, f ფუნქციის პერიოდებია T_1 და T_2 დადებითი რიცხვები. იქნება თუ არა T_1+T_2 რიცხვი ამავე ფუნქციის პერიოდი?

8. მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეზე განსაზღვრული f ფუნქცია მოცემულია ტოლობით:

$$f(m)=\begin{cases}1, & \text{თუ } |m| \text{ კენტია,}\\ 2, & \text{თუ } |m| \text{ ლუწია.}\end{cases}$$

დაამტკიცე, რომ f პერიოდული ფუნქციაა და იპოვე მისი უმცირესი დადებითი პერიოდი.

9. მე-3 ნახაზზე მოცემული გრაფიკებიდან რომელია კენტი და რომელი ლუწი ფუნქციის გრაფიკი?

10. მე-4 ნახაზზე მოცემული გრაფიკებიდან რომელია კენტი ფუნქციის გრაფიკი?

11. დაამტკიცე, რომ ლუწი ფუნქციების ჯამი ლუწი ფუნქციაა.

12. დაამტკიცე, რომ კენტი ფუნქციების ჯამი კენტი ფუნქციაა.

13. მოცემული ფუნქციებიდან რომლებია ლუწი, რომლები კენტი და რომლები არაა არც ლუწი და არც კენტი?

ა) $y=\frac{1}{x}$; ბ) $y=\frac{x-1}{2}$; გ) $y=\tan x$; დ) $y=\sin x+\cos x$;

ე) $y=\frac{x^2}{x^4-1}$; ვ) $y=x^3+2x$; ზ) $y=\frac{1}{x^4+1}$;

თ) $y=x^3+2x^2+4$; ი) $y=|\tan x|$; კ) $y=\cos^2 x-\sin^2 x$.

14. მოცემულია ფუნქციები: $f(x)=|x|$ და $g(x)=x^3$. არის თუ არა ლუწი ან კენტი მათი:

ა) ჯამი? ბ) სხვაობა?

გ) ნამრავლი? დ) $f\circ g$ კომპოზიცია?

15. დაამტკიცე, რომ თუ f მთელ რიცხვით ღერძზე განსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ $F(x)=f(x)+f(-x)$ ლუწი, ხოლო $G(x)=f(x)-f(-x)$ კენტი ფუნქციაა.

16. მოცემულია f კენტი პერიოდული ფუნქცია 3-ის ტოლი პერიოდით. $f(-1)=2$. იპოვე $f(5)+f(7)$.

17. მოცემულია $y=f(x)$ კენტი პერიოდული ფუნქცია 2-ის ტოლი პერიოდით. ამასთან, როცა $x\in[0;1]$, მაშინ $f(x)=x^2-x$.

ა) გამოთვალე $f(-0,5)+f(1,5)$;

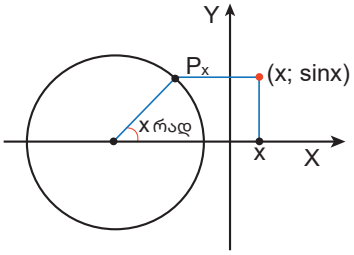
ბ) ააგე ამ ფუნქციის გრაფიკი $[-3; 3]$ შუალედში.

4.2

y=sinx ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **y=sinx ფუნქციის გრაფიკის აგება;**
- **y=sinx ფუნქციის თვისებების ჩამოყალიბება და გრაფიკზე დემონსტრირება.**



ნახ. 1

როგორც ვიცით, y=sinx ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რაც ნიშნავს, რომ x არგუმენტს ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობის მიღება შეუძლია.

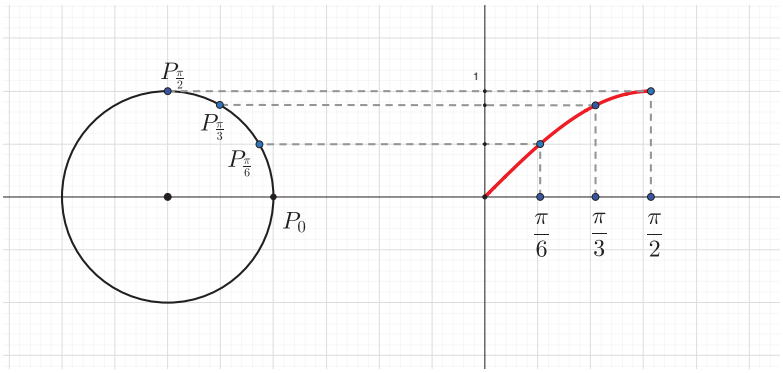
y=sinx ფუნქციის გრაფიკის აგება სხვადასხვა გზითაა შესაძლებელი.

როგორც აქამდე, სხვა ფუნქციების გრაფიკების აგებისას, ახლაც შესაძლებელია გრაფიკი ავაგოთ შემდეგი წესით: ვისარგებლებთ რა sinx-ის მნიშვნელობათა ცხრილით, საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგებთ (x;sinx) წერტილებს არგუმენტისა და ფუნქციის ჩვენთვის ცნობილი მნიშვნელობებისათვის და შემდეგ ამ წერტილებზე გავავლებთ გლუვ, უწყვეტ წირს.

შედარებით მარტივია გრაფიკის აგების გეომეტრიული ხერხი. ეს ხერხი ემყარება სინუსის ჩვენ მიერ 1.4 პარაგრაფში ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით მოყვანილ განმარტებას. მის საილუსტრაციოდ ერთეულოვანი წრის ცენტრი მოვათავსოთ აბსცისათა ღერძის რაიმე წერტილში. ნებისმიერი x არგუმენტისათვის ერთეულოვან წრეწირზე მოვძებნოთ P_x წერტილი, რომელიც მიიღება P_0 წერტილის x რადიანის ტოლი კუთხით მობრუნებით. ამ წერტილიდან გავატაროთ აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფე x წერტილზე გამავალ ორდინატთა ღერძის პარალელურ წრფესთან გადაკვეთამდე (ნახ.1). მიღებული გადაკვეთის წერტილი, კოორდინატებით (x; sinx), იქნება y=sinx ფუნქციის გრაფიკის წერტილი. როცა x წერტილს ვამოძრავებთ აბსცისთა ღერძზე, P_x იმოძრავებს ერთეულოვან წრეწირზე, ხოლო შესაბამისი (x;sinx) კოორდინატების მქონე წერტილი შემოწერს y=sinx ფუნქციის გრაფიკს.

გრაფიკის პრაქტიკულად ასაგებად პირველ ეტაპზე ერთეულოვანი წრეწირის დახმარებით ავაგოთ იგი $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, ხოლო შემდეგ სინუსის თვისებების გამოყენებით განვავრცოთ მთელ რიცხვით ღერძზე.

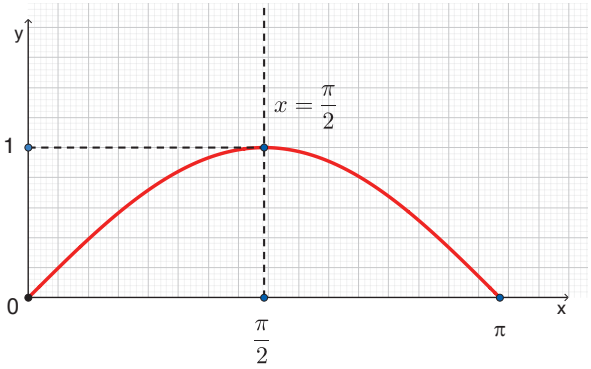
ამისათვის $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში ავიღოთ რამდენიმე არგუმენტი, ზემოთ აღწერილი მეთოდით მოვნიშნოთ ამ არგეუმენტების შესაბამისი გრაფიკის წერტილები და შევაერთოთ უწყვეტი გლუვი წირით. (გასაგებია, რომ რაც მეტ წერტილს მოვნიშნავთ, მით ზუსტი იქნება გრაფიკი).



ნახ. 2

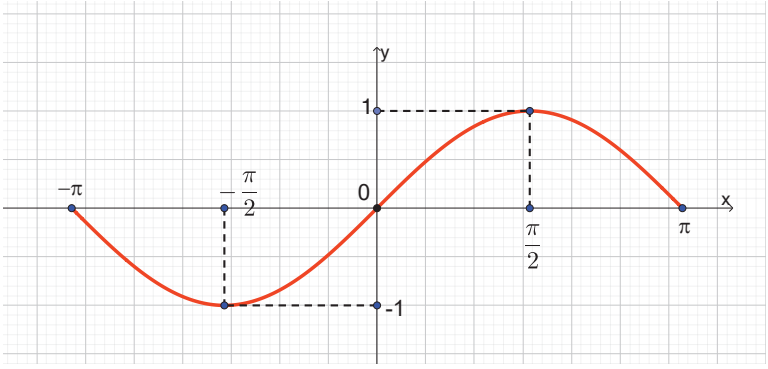
მე-2 ნახაზზე $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედის შესაბამისი გარფიკი მიღებულია გრაფიკზე მონიშნული 4 წერტილის შეერთებით.

დაყვანის ფორმულის ძალით $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, საიდანაც ვასკვნით, რომ $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ შუალედში (ნახ. 3) გრაფიკი სიმეტრიულია $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში აგებული გრაფიკისა $x=\frac{\pi}{2}$ წრფის მიმართ.



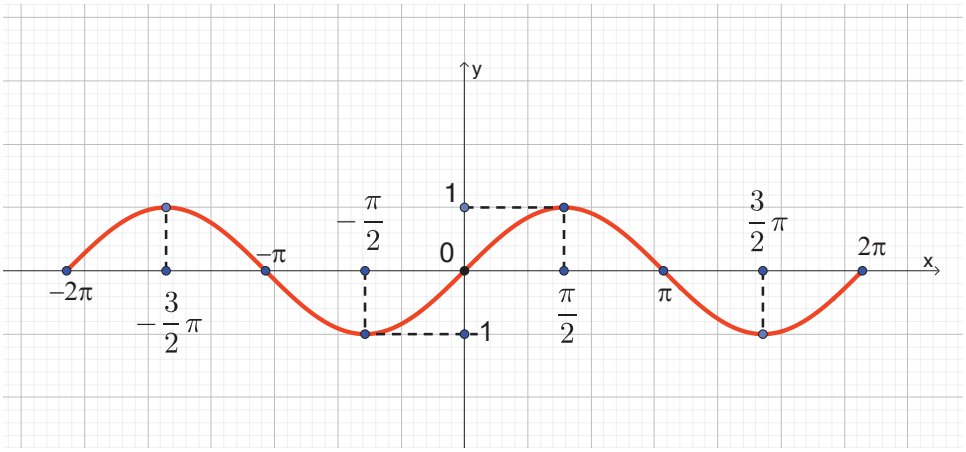
ნახ. 3

თუ ვისარგებლებთ იმით, რომ სინუსი კენტი ფუნქციაა და ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, მაშინ ცენტრული სიმეტრიით მივიღებთ გრაფიკს [–π; 0] შუალედში (ნახ. 4).



ნახ. 4

და ბოლოს, იმის გამო, რომ y=sinx პერიოდული ფუნქციაა 2π პერიოდით, [–π; π] შუალედში მოცემული გრაფიკის (2πk;0), k∈Z კოორდინატების მქონე პარალელური გადატანით მივიღებთ ფუნქციის გრაფიკს მთელ ღერძზე (ნახ.5).



ნახ. 5

y=sinx ფუნქციის გრაფიკს სინუსოიდა ეწოდება.

გრაფიკი მოქცეულია ზოლში, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძის პარალელური y=1 და y=–1 წრფეებით.

გავიხსენოთ y=sinx ფუნქციის რა თვისებებიც ვიცით და გრაფიკზე დაკვირვებით ჩამოვაყალიბოთ მისი ძირითადი თვისებები:

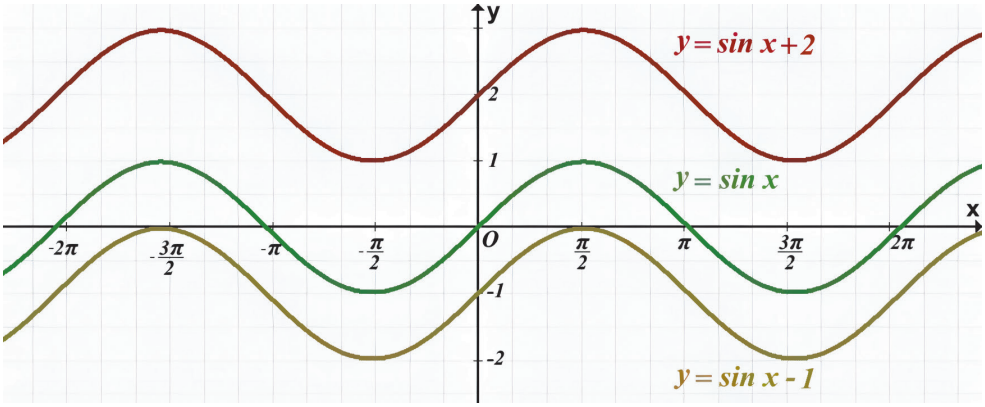
1. y=sinx ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
2. მნიშვნელობათა სიმრავლეა [–1; 1] შუალედი;
3. ფუნქცია კენტია: sin(–x)=–sinx ნებისმიერი x∈R-თვის. ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ;
4. ფუნქცია პერიოდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ანუ sin(x+2π)=sinx ნებისმიერი x∈R-თვის;
5. ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილებია $x_{max}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,$ ხოლო მაქსიმუმია $y_{max}=1$;
6. ფუნქციის მინიმუმის წერტილებია $x_{min}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,$ ხოლო მინიმუმია $y_{min}=-1$
7. sinx=0, როცა x=πk, k∈Z;
8. sinx>0, როცა x∈(2πk, π+2πk), k∈Z;
9. sinx<0, როცა x∈(–π+2πk, +2πk), k∈Z;
10. ფუნქცია ზრდადია $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k\in Z$, შუალედებში და კლებადია $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right], k\in Z$, შუალედებში.

მაგალითი 1. ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ y=sinx+2 და y=sinx–1 ფუნქციათა გრაფიკები.

ამოხსნა. გრაფიკების გარდაქმნის ყველა წესი წინა კლასებში გვაქვს განხილული. განსხვავება ახლა მხოლოდ ისაა, რომ უნდა გარდავქმნათ ტრიგონომეტრიული ფუნქციის გრაფიკი.

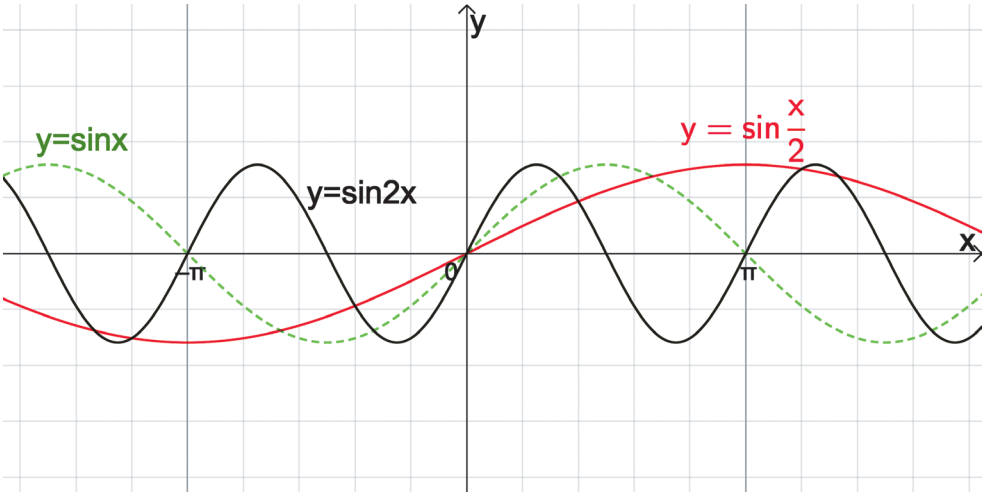
y=sinx+2 ფუნქციის გრაფიკი მიიღება y=sinx ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით (გადაწევით) 2 ერთეულით ზევით.

y=sinx–1 ფუნქციის გრაფიკი მიიღება y=sinx ფუნქციის გრაფიკის პარალელური გადატანით 1 ერთეულით ქვევით.



მაგალითი 2. ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგოთ y=sin2x და $y=\sin\frac{x}{2}$ ფუნქციათა გრაფიკები.

ამოხსნა. გრაფიკების გარდაქმნის წესის გამოყენებით y=sin2x ფუნქციის გრაფიკი მიიღება y=sinx ფუნქციის 2-ჯერ შეკუმშვით Oy ღერძის მიმართ. $y=\sin\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება y=sin x ფუნქციის გრაფიკის გაჭიმვით Oy ღერძის მიმართ.



უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ გავარკვიოთ გრაფიკის მიხედვით ფუნქციის ლუწ-კენტობა?
2. $[0;2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა $y=\sin x$ ფუნქცია კლებადი? ზრდადი?
3. რამდენი ნული აქვს $y=\sin x$ ფუნქციას $[0;2\pi]$ შუალედში?
4. $[0;2\pi]$ შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა $y=\sin x$ ფუნქცია დადებითი? უარყოფითი?
5. რა ზოლში იქნება მოთავსებული $y=2\sin x$ ფუნქციის გრფიკი?
6. აქვს თუ არა $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს სიმეტრიის ცენტრი? სიმეტრიის ღერძი?

სავარჯიშოები

1. იპოვე $y=2\sin x+1$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები.
2. მოცემული ფუნქციებიდან რომელია ლუწი და რომელი კენტი?

   ა) $y=\sin^2 x$; ბ) $y=\sin^3 x$; გ) $y=2\sin x-3x$; დ) $y=x^2-\sin x$.
3. $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის მიხედვით, გაარკვიე, $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$ ინტერვალიდან რომელი რიცხვის სინუსია:

   ა) 0,5-ის ტოლი; ბ) –1-ის ტოლი; გ) 1-ის ტოლი.
4. $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკზე მონიშნე:

   ა) $x=\frac{\pi}{6}$; ბ) $x=\frac{\pi}{3}$; გ) $x=\frac{2\pi}{3}$ არგუმენტების შესაბამისი წერტილები.
5. $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით დაადგინე, რომელია მეტი:

   ა) $\sin 1$ თუ $\sin 2$; ბ) $\sin\frac{\pi}{5}$ თუ $\sin\frac{\pi}{3}$;

   გ) $\sin\frac{3\pi}{5}$ თუ $\sin\frac{4\pi}{5}$; დ) $\sin\frac{5\pi}{6}$ თუ $\sin\frac{6\pi}{5}$.
6. ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი პროგრამა Geogebra-ს გამოყენებით:

   ა) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; ბ) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

   გ) $y=\sin 4x$; დ) $y=2\sin 2x$.
7. ააგე $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი და მასზე მიუთითე გრაფიკის ა) სიმეტრიის ცენტრები; ბ) სიმეტრიის ღერძები.
8. ააგე $y=-\sin x$ ფუნქციის გრაფიკი.

აბა, სცადე!

დაამტკიცე, რომ $y=\sin^2 x$ ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია π.

9. აგე ფუნქციის გრაფიკი:

ა) $y=\sin(x+\pi)$;

ბ) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

10. დაადგინე y=sin2x ფუნქციის მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილები.

11. აგე y=sin3x ფუნქციის გრაფიკი და მოძებნე [–π; π] შუალედში მოთავსებული ნულები.

12. დაალაგე ზრდის მიხედვით:

$\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$; $\sin\frac{\pi}{4}$; $\sin\frac{\pi}{6}$; $\sin\frac{\pi}{2}$; $\sin\frac{3\pi}{2}$.

13. იპოვე y=f(x) ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, თუ

ა) $f(x)=2+\sin^2 x$; ბ) $f(x)=1-\sin^2 x$;

გ) $f(x)=\frac{1}{2+\sin x}$; დ) $f(x)=\frac{1}{2-\cos^2 x}$.

14. გამოთვალე $y=\sin\pi x$ ფუნქციის (0;10) შუალედში არსებული ნულების ჯამი.

15. მოძებნე: $y=4\sin^2 x-5\cos^2 x+1$ ფუნქციის:

ა) უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები;

ბ) ექსტრემუმის წერტილები.

16. აგე მოცემული ფუნქციების გრაფიკები და გააანალიზე მათი მსგავსება და განსხვავება:

y=|sinx| და y=sin|x|.

17. იპოვე sinx=0,5 განტოლების [–2π; 2π] შუალედში მოქცეული ყველა ამონახსნი.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- y=sinx ფუნქციის გრაფიკის აგება;
- y=sinx ფუნქციის თვისებები.

4.3

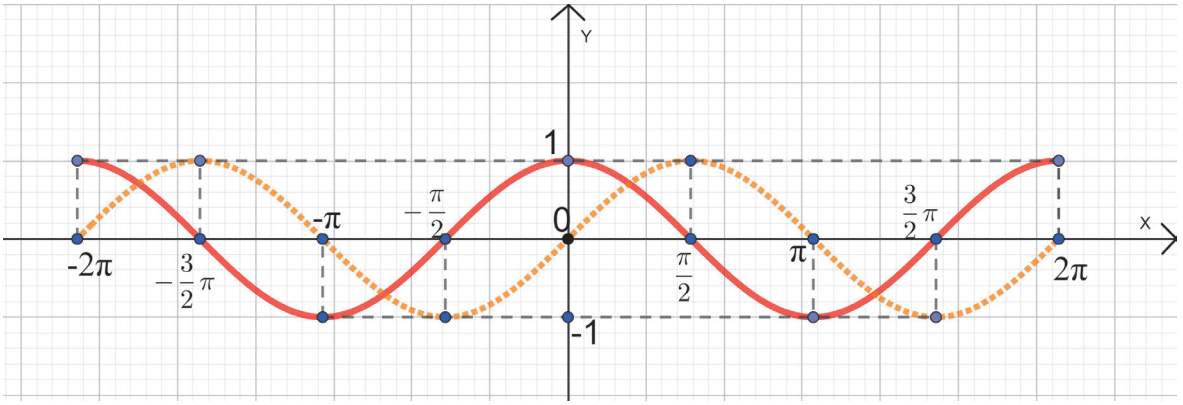
y=cosx ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **y=cosx ფუნქციის გრაფიკის აგება;**
- **y=cosx ფუნქციის თვისებების ჩამოყალიბება და გრაფიკზე დემონსტრირება.**

ვიცით y=cosx ფუნქციის ზოგიერთი თვისება და y=sinx ფუნქციის გრაფიკის აგება. ამ ცოდნაზე დაყრდნობითა და y=sinx ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით ადვილად მივიღებთ y=cosx ფუნქციის გრაფიკს.

დაყვანის ფორმულის თანახმად x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. მაშასადამე, y=cosx ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს აბსცისათა ღერძზე $\frac{\pi}{2}$-ით მარცხნივ გადაწეული სინუსოიდა. y=cosx ფუნქციის გრაფიკს **კოსინუსოიდა** ეწოდება (ნახ.1)



ნახ. 1

ცხადია, y=cosx ფუნქციის გრაფიკის აგება შესაძლებელია საერთო წესითაც, ანუ cosx-ის ცხრილის გამოყენებით ისე, როგორც სინუსოიდის აგებისას. შესაძლებელია აგრეთვე, ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებითაც, და ბოლოს, რა თქმა უნდა, Geogebra-ს გამოყენებით, რომელიც ყველაზე სწრაფად და ზუსტად მოგვცემს გრაფიკებს.

ჩამოვაყალიბოთ y=cosx ფუნქციის თვისებები.

1. განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
2. მნიშვნელობათა სიმრავლეა [–1; 1] შუალედი;
3. ლუწი ფუნქციაა, ნებისმიერი $x\in R$-თვის $\cos(-x)=\cos x$. ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ;
4, ფუნქცია პერიოდულია. უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π, ანუ $\cos(x+2\pi)=\cos x$, ნებისმიერი $x\in R$-თვის;
5. ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილებია $x_{max}=2\pi k$, $k\in Z$, ხოლო მაქსიმუმია $y_{max}=1$;
6. ფუნქციის მინიმუმის წერტილებია $x_{min}=\pi+2\pi k$, $k\in Z$, ხოლო მინიმუმია $y_{min}=-1$
7. $\cos x=0$, როცა $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$;

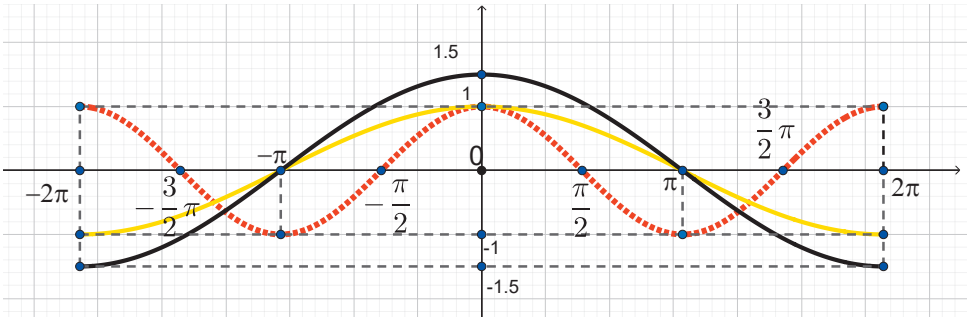
8. $\cos x>0$, როცა $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z$;

9. $\cos x<0$, როცა $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z$;

10. ფუნქცია ზრდადია $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $k\in Z$ შუალედებში და კლებადია $[2\pi k;\ \pi+2\pi k]$, $k\in Z$ შუალედებში.

მაგალითი 1. ავაგოთ $y=1{,}5\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ვიცით როგორ ავაგოთ y=cosx ფუნქციის გრაფიკი. იმის გამო, რომ $y=\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის პერიოდი 2-ჯერ მეტია y=cosx ფუნქციის პერიოდზე, მისი „ტალღის“ სიგრძე იქნება 2-ჯერ მეტი. ამიტომ, თუ y=cosx ფუნქციის გრაფიკს გავჭიმავთ აბსცისათა ღერძის გასწვრივ 2-ჯერ, მივიღებთ $y=\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკს.

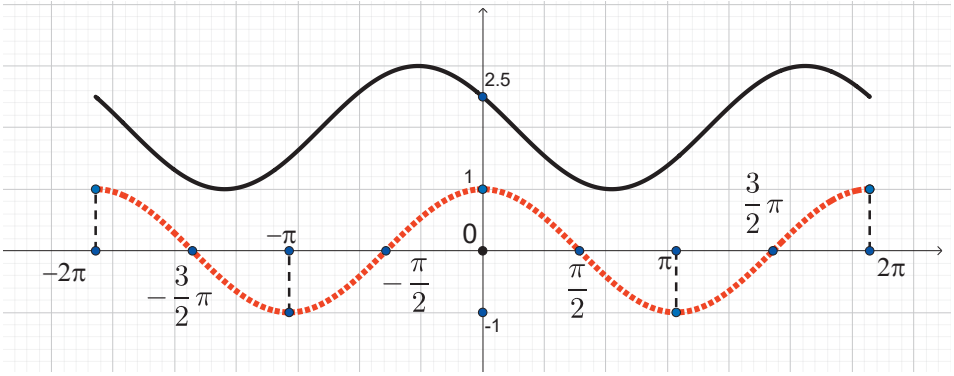


ნახ. 2

$y=1{,}5\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა [–1,5; 1,5], ამიტომ $y=\cos\frac{x}{2}$-ის მიღებული გრაფიკი უნდა გავჭიმოთ 1,5-ჯერ ორდინატთა ღერძის გასწვრივ და მივიღებთ $y=1{,}5\cos\frac{x}{2}$ ფუნქციის გრაფიკს.

მაგალითი 2. ავაგოთ $y=2+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი.

ამოხსნა. ავაგოთ y=cosx ფუნქციის გრაფიკი. შემდეგ გრაფიკი გადავიტანოთ $\frac{\pi}{3}$-ით მარცხნივ და 2 -ით ზემოთ.



ნახ. 3

პასუხეზე კითხვებს:

1. რომელი საკოორდინატო ღერძის მიმართ არის სიმეტრიული y=cosx ფუნქციის გრაფიკი?
2. რა კავშირია y=sinx და y=cosx ფუნქციების გრაფიკებს შორის?
3. [0; 2π] შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=cosx ფუნქცია ზრდადი? კლებადი?
4. რამდენი ნული აქვს y=cosx ფუნქციას [0; 2π] შუალედში?
5. აქვს თუ არა y=cosx ფუნქციის გრაფიკს სიმეტრიის ცენტრი?
6. [0; 2π] შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=cosx ფუნქცია: დადებითი? უარყოფითი?
7. რა არის y=cosx ფუნქციის: უდიდესი მნიშვნელობა? უმცირესი მნიშვნელობა?
8. რა ზოლში იქნება მოთავსებული y=3cosx ფუნქციის გრაფიკი?
9. რომელ წერტილებში იკვეთება სინუსოიდა და კოსინუსოიდა?

სავარჯიშოები

1. ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

   ა) y=0,5cosx; ბ) y=3cosx.

2. ააგე მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

   ა) y=–cosx; ბ) y=cosx+1.

3. ააგე პროგრამა Geogebra-ს გამოყენებით y=cos2x და y=cos0,5x ფუნქციების გრაფიკები და იმსჯელე მათ მსგავსება-განსხვავებაზე.

4. ააგე $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ და $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციების გრაფიკები და იმსჯელე მათ მსგავსება-განსხვავებაზე

5. ააგე $y=1+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ფუნქციის გრაფიკი და შეადარე y=cosx ფუნქციის გრაფიკს.

6. ააგე y=|cosx| და y=cos|x| ფუნქციების გრაფიკები Geogebra-ს გამოყენებით და მოახდინე მათი შედარებითი ანალიზი. ჩამოაყალიბე შესაბამისი დასკვნა.

7. გრაფიკის გამოყენებით განსაზღვრე, [0; 2π] შუალედის რომელი არგუმენტებისთვის არის y=cosx ფუნქციის მნიშვნელობა:

   ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) –1; დ) 0.

8. y=cosx ფუნქციის გრაფიკის გამოყენებით დაადგინე, რომელია მეტი:

ა) cos1 თუ cos 2; ბ) $\cos\frac{\pi}{5}$ თუ $\cos\frac{\pi}{3}$;

გ) $\cos\frac{3\pi}{5}$ თუ $\cos\frac{4\pi}{5}$; დ) $\cos\frac{5\pi}{6}$ თუ $\cos\frac{7\pi}{3}$.

9. დაადგინე y=cos2x ფუნქციის მაქსიმუმის და მინიმუმის წერტილები.

10. გრაფიკის მიხედვით დაადგინე, (–π; π) შუალედის რა ქვესიმრავლეზე სრულდება cosx>0 უტოლობა.

11. იპოვე y=f(x) ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, თუ:

ა) f(x)=1+2cosx; ბ) $f(x)=2-\cos^2 x$;

გ) $f(x)=\frac{1}{3-\cos x}$; დ) $f(x)=\frac{1}{1+\cos^2 x}$.

12. მოძებნე y=cos3x ფუნქციის [–π; π] შუალედში მოთავსებული ნულები.

13. მოძებნე: $y=3\cos^2 x-4\sin^2 x+2$ ფუნქციის:

ა) უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები;

ბ) ექსტრემუმის წერტილები.

14. იპოვე cosx=0,5 განტოლების [–2π; 2π] შუალედში მოქცეული ყველა ამონახსნი.

15. იპოვე cosπx=1 განტოლების [0;10] შუალედში მოქცეული ყველა ამონახსნის ჯამი.

16. დაალაგე კლების მიხედვით:

$\cos\frac{\pi}{3}; \cos\frac{4\pi}{3}; \cos\frac{\pi}{4}; \cos\frac{\pi}{6}; \cos\frac{\pi}{2}; \cos\frac{3\pi}{4}$.

17. მოცემულია tanα=5. გამოთვალე:

ა) tan(π+α); ბ) tan(π–α); გ) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; დ) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

18. არგუმენტის რა მნიშვნელობებისთვის არაა განსაზღვრული y=tanx ფუნქცია (0; 2π) შუალედში?

აბა, სცადე!

დაამტკიცე, რომ y= sinxcosx ფუნქციის უმცირესი დადებითი პერიოდია π.

17-18

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- y=cosx ფუნქციის გრაფიკის აგება;
- y=cosx ფუნქციის თვისებები.

4.4

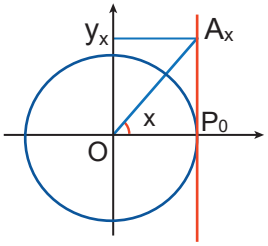
y=tanx ფუნქციის თვისებები და გრაფიკი

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **y=tanx ფუნქციის გრაფიკის აგება;**
- **y=tanx ფუნქციის თვისებების ჩამოყალიბება და გრაფიკზე დემონსტრირება.**

განმარტების თანახმად $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. ამ განმარტებაში იგულისხმება, რომ $\cos x \neq 0$, ანუ $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. ე.ი. ტანგენსის განსაზღვრის არე არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს გამოკლებული $\frac{\pi}{2} + \pi k$ სახის რიცხვების სიმრვალე, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლის დასადგენად ერთეულოვანი წრის P_0 წერტილზე გავავლოთ ორდინატთა ღერძის პარალელური წრფე (1-ელ ნახაზზე A_xP_0 წრფე). ამ წრფეს **ტანგენსების წრფე** ეწოდება.

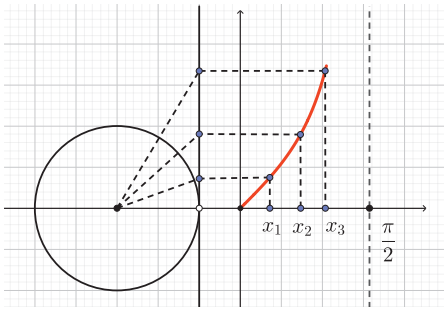


ნახ. 1

ნახაზიდან ვასკვნით, რომ ნებისმიერი $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ არგუმენტისათვის $\tan x = \frac{A_xP_0}{OP_0} = \frac{A_xP_0}{1} = y_x$, სადაც y_x არის A_x წერტლის ორდინატა.

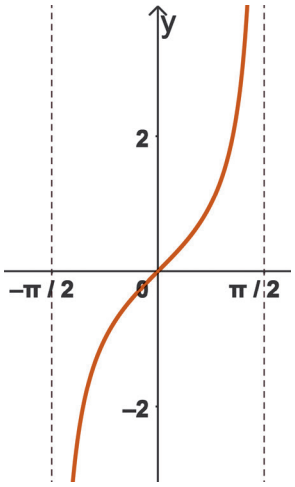
თუ x არგუმენტს ვამოძრავებთ $-\frac{\pi}{2}$-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, მაშინ A_x წერტილი გაირბენს ტანგენსების წრფეს, ხოლო მისი y_x კოორდინატი – მთელ რიცხვით ღერძს $-\infty$-დან $+\infty$-მდე. აქედან ვასკვნით, რომ y=tanx ზრდადი ფუნქციაა $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში და ამ შუალედში მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეა.

იმის გამო, რომ y=tanx კენტი ფუნქციაა, მისი გრაფიკის $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში ასაგებად საკმარისია გრაფიკი ავაგოთ $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში და კოორდონატთა სათავის მიმართ ცენტრული სიმეტრიით გავავრცოთ $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ შუალედზე.

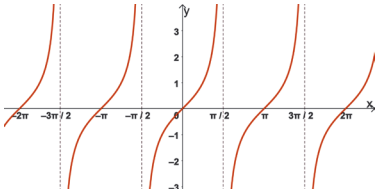


ნახ. 2

გრაფიკის ასაგებად ვიყენებთ ტანგენსების წრფეს (ნახ. 2). $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში ვიღებთ $x_0, x_1, \ldots x_n$ რიცხვებს, ერთეულოვან წრეწირზე P_0 წერტლის $x_0, x_1, \ldots x_n$ რადიანებით მობრუნებით მიღებულ წერტილებს, ხოლო ტანგენსების წრფეზე მათი შესაბამისი წერტილებიდან ვავლებთ აბსცისთა ღერძის პარალელურ წრფეებს, $x_0, x_1, \ldots x_n$ წერტილებიდან ორდინატთა ღერძის პარალელურად გავლებული წრფეების გადაკვეთამდე. კვეთაში მიღებული წერტილები იქნება გრაფიკის წერტილები. ამ წერტი-



ნახ. 3



ნახ. 4

ლების გლუვი უწყვეტი წირით შეერთებით მივიღებთ ტანგენსის გრაფიკს $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში.

ამ გრაფიკის ცენტრული სიმეტრიით მივიღებთ გრაფიკს $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში (ნახ. 3), რომელსაც ტანგენსის გრაფიკის **მთავარი შტო** ეწოდება.

იმის გამო, რომ გრაფიკი π სიგრძის შუალედში უკვე აგებული გვაქვს და π რიცხვი ტანგენსის პერიოდია, მიღებული გრაფიკის (πk;0) კოორდინატებიანი პარალელური გადატანებით, სადაც k ნებისმიერი მთელი რიცხვია, მივიღებთ ტანგენსის გრაფიკს მთელ მის განსაზღვრის არეში (ნახ. 4).

ჩამოვაყალიბოთ y=tanx ფუნქციის თვისებები:

1. განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, გარდა $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ სახის რიცხვებისა;
2. მნიშვნელობათა სიმრავლეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე R;
3. კენტი ფუნქციაა, tan(–x)=–tanx, ამიტომ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ;
4. პერიოდული ფუნქციაა. უმცირესი დადებითი პერიოდია π;
5. ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმის წერტილები;.
6. tanx=0, როცა $x=\pi k,\ k\in Z$;
7. tanx>0, როცა $x\in\left(\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ k\in Z$;
8. tanx<0, როცა $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pi k\right),\ k\in Z$;
9. ფუნქცია ზრდადია $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in Z$ შუალედებში. კლებადი არაა განსაზღვრის არის არცერთ შუალედში.

უპასუხე კითხვებს:

1. რა ცენტრის მიმართაა სიმეტრიული ტანგენსის გრაფიკი?
2. რა არის ტანგენსის განსაზღვრის არე? მნიშვნელობათა სიმრავლე?
3. როგორ ავაგოთ ტანგენსების წრფე?
4. [0; 2π] შუალედის რა ქვესიმრავლეებზეა y=tanx ფუნქცია ზრდადი?
5. რამდენი ნული აქვს y=tanx ფუნქციას [–2π; π] შუალედში?
6. აქვს თუ არა y=tanx ფუნქციის გრაფიკს სიმეტრიის ღერძი?
7. [–π; π] შუალედის რა ქვესიმრავლეზეა y=tanx ფუნქცია დადებითი? უარყოფითი?
8. აქვს თუ არა y=tanx ფუნქციას უდიდესი მნიშვნელობა? უმცირესი მნიშვნელობა?

სავარჯიშოები

1. ააგე y=tanx ფუნქციის გრაფიკი პროგრამა Geogebra-ს გამოყენებით და მისი დახმარებით დაადგინე რომელია მეტი:

ა) tan1 თუ tan0,5?; ბ) tan0,6 თუ tan0,5;

გ) $\tan\frac{\pi}{4}$ თუ $\tan\frac{\pi}{6}$; დ) tan1,5 თუ tan1,6.

2. y=tanx ფუნქციის გრაფიკის მთავარ შტოზე მონიშნე ის წერტილები, რომელთა ორდინატებია:

ა) 1; ბ) –1 გ) $x=\sqrt{3}$; დ) $-\sqrt{3}$;

3. y=tanx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით იპოვე tanx=1 განტოლების ყველა ის ამონახსნი, რომელიც მოთავსებულია მითითებულ შუალედში:

ა) $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; ბ) $\left(-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

4. y=tanx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით იპოვე tanx=0 განტოლების ყველა ის ამონახსნი, რომელიც მოთავსებულია $[-2\pi; 2\pi]$ შუალედში.

5. y=tanx ფუნქციის გრაფიკის დახმარებით იპოვე tanx<0 უტოლობის ყველა ის ამონახსნი, რომელიც $(-\pi;\pi)$ შუალედს ეკუთვნის.

6. გაარკვიე, მოცემული ფუნქციებიდან რომელია ლუწი და რომელი კენტი ფუნქცია:

ა) $y=\tan^2x+3$; ბ) y=3sin2x+2tan3x; გ) y=|tanx|;

დ) $y=\tan(\pi-x)$; ე) y=cosx+tanx.

7. იპოვე tanx=tan(–x) განტოლების ყველა ამონახსნი.

8. ააგე ფუნქციის გრაფიკი: ა) y=|tanx|; ბ) y=tan|x| .

9. გაამარტივე გამოსახულება:

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; ბ) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$;

გ) $(\tan\alpha+\tan^{-1}\alpha)(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$.

10. იპოვე x არგუმენტი $(-90^o;90^o)$ შუალედიდან, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა:

ა) sinx=0,5; ბ) sinx=–0,5; გ) sinx=0;

დ) tanx=0; ე) $\tan x=\sqrt{3}$; ვ) $\tan x=-\sqrt{3}$.

11. იპოვე sinα და cosα, თუ tanα=0,75.

9-11

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- y=tanx ფუნქციის გრაფიკის აგება;
- y=tanx ფუნქციის თვისებები.

4.5 უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა

მიზანი. უნდა შეძლო:

- **arcsin-ის, arccos-ისა და arctan-ის განმარტება და მაგალითებით ჩვენება;**
- **sinx=a, cosx=a და tanx=a განტოლებათა ზოგადი ამონახსნის ჩაწერა;**
- **მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა;**
- **მარტივი ტრიგონომეტრიული განტოლების ზოგადი ამონახსნიდან მოცემული პირობის მიხედვით კერძო ამონახსნის ამორჩევა.**

ტრიგონომეტრიული განტოლება არის განტოლება, რომელშიც უცნობი მოქცეულია ფუნქციის ნიშნის ქვეშ.

ამოვხსნათ ტრიგონომეტრიული განტოლება, ნიშნავს, ვიპოვოთ მისი ყველა ამონახსნი ან ვაჩვენოთ, რომ ამოხსნა არა აქვს.

ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნის რამდენიმე ხერხი არსებობს. ესენია ამოხსნა ფორმულების, გრაფიკისა და ტრიგონომეტრიული წრეწირის გამოყენებით.

ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნის შესწავლა დავიწყოთ მარტივი განტოლებებიდან.

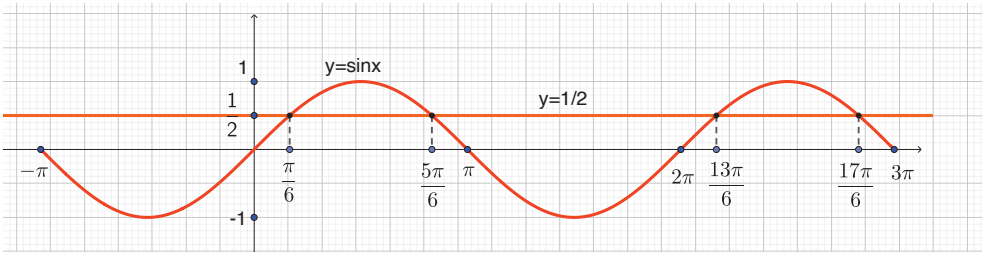
მაგალითი 1. ვიპოვოთ $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ყველა ამონახსნი.

ამოხსნა: ავაგოთ y=sinx და $y=\frac{1}{2}$ ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ.1).

ამ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილთა აბსცისები იქნება მოცემული განტოლების ამონახსნები.

როგორც 1-ლი ნახაზიდან ვრწმუნდებით, განტოლებას უამრავი ამონახსნი აქვს. ჩვენი მიზანია, რაიმე ფორმულით აღვწეროთ ყველა ეს ამონახსნი.

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, $x=\frac{\pi}{6}$. დაყვანის ფორმულის ძალით $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედში გვექნება კიდევ ერთი ამონახსნი: $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. სინუსის პერიოდულობის გამო თითოეული ეს ამონახსნი წარმოშობს ამონახსნთა სიმრავლეს: $A=\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}$ და $B=\left\{\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}$.



ნახ. 1

გრაფიკზე დაკვირვებით ვრწმუნდებით, რომ მოცემულ განტოლებას მხოლოდ ამ ორი სახის ამონახსნები აქვს. შევეცადოთ, ამონახსნთა ეს ორი სიმრავლე ჩავწეროთ ერთი ფორმულით. ამისათვის B სიმრავლე გადავწეროთ შემდეგაირად:

$$B=\left\{\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\right\}=\left\{-\frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi, k\in Z\right\}.$$

თუ A და B სიმრავლეებს შევადარებთ, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ A სიმრავლის ელემენტები მიღებულია $\frac{\pi}{6}$-სთვის π-ს ლუწი ჯერადების დამატებით, ხოლო B სიმრავლის ელემენტები $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$-სთვის π-ს კენტი ჯერადების დამატებით. ამ ორი სიმრავლის გაერთიანება შეგვიძლია ჩავწეროთ ტოლობით:

$$A \cup B = \left\{(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z\right\}.$$

პასუხი. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

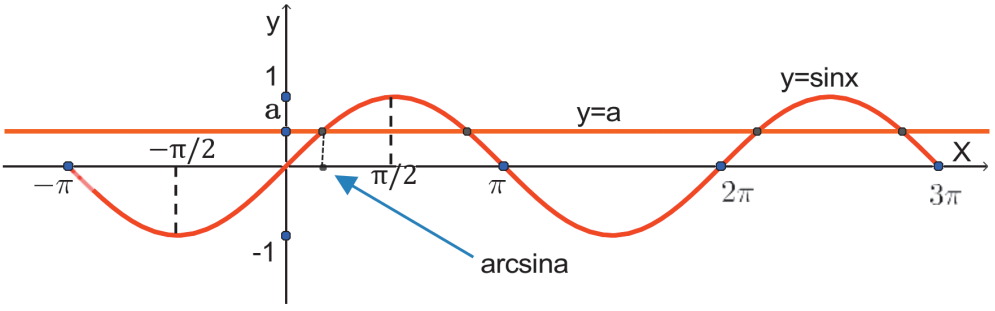
განვიხილოთ sinx=a განტოლება ნებიმიერი a რიცხვის შემთხვევაში:

თუ a>1 ან a<–1 მოცემულ განტლებას ამონახსნი არ აქვს, რადგან სინუს ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა [–1;1] შუალედი.

ვთქვათ, |a|≤1. ისევე, როგორც განხილულ მაგალითში, ავაგოთ y=sinx და y=a ფუნქციათა გრაფიკები (ნახ. 2).

როგორც ამ ნახაზიდან ვრწმუნდებით, sinx=a განტოლებას $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამ ამონახსნს arcsina ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება: „არკსინუს ა“). ე.ი. განმარტების ძალით,

$$\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ და } \sin(\arcsin a) = a.$$



ნახ. 2

ყველა დანარჩენი ამონახსნი იმავე მსჯელობით მიიღება, როგორც ეს 1-ელ მაგალითში იყო მიღებული. კერძოდ, დაყვანის ფორმულის ძალით $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ შუალედში გვექნება კიდევ ერთი ამონახსნი: π-arcsina, ხოლო სინუსის პერიოდულობის გამო თითოეული ეს ამონახსნი წარმოშობს ამონახსნთა სიმრავლეს: $A = \{\arcsin a + 2\pi k, k \in Z\}$ და $B = \{-\arcsin a + (2k+1)\pi, k \in Z\}$. ამ ორი სიმრავლის გაერთიანებით მივიღებთ sinx=a განტოლების **ზოგადი ამონახსნის** ფორმულას:

$$x=(-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z. \qquad (1)$$

შევნიშნოთ, რომ ტრიგონომეტრიული განტოლების ამონახსნები საჭიროების შემთხვევაში შეგვიძლია გრადუსებში ჩავწეროთ. მაგალითად, განხილულ $\sin x=\frac{1}{2}$ განტოლების ამონახსნები გრადუსებში ასე ჩაიწერება:

$$x=(-1)^n\cdot 30^\circ+180^\circ\cdot n,\ n\in Z.$$

მაგალითი 2. $2\sin^2x-3\sin x-2=0$.

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\sin x=y$. ამოვხსნათ მიღებული კვადრატული განტოლება:

$$2y^2+3y-2=0\Rightarrow y_1=-\frac{1}{2},\ y_2=2\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\sin x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n, n\in Z\\ \sin x=2\Rightarrow\varnothing\end{array}\right.$$

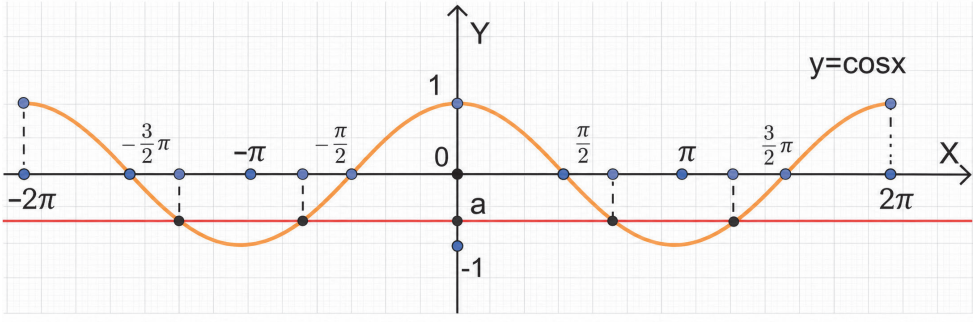
პასუხი: $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

განვიხილოთ $\cos x=a$ განტოლება. ისევე, როგორც $\sin x=a$ შემთხვევაში, აქაც, როცა $|a|>1$, განტოლებას არა აქვს ამონახსნი. განვიხილოთ $\cos x=a$, როცა $|a|\le 1$.

ავაგოთ $y=\cos a$ და $y=a$ ფუნქციების გრაფიკები.

როგორც მე-3 ნახაზიდან ჩანს $[0;\pi]$ შუალედში მოცემულ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ამ ამონახსნს $\arccos a$ ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება: „არკკოსინუს ა“). ე.ი. განმარტების თანახმად,

$$\arccos a\in[0;\pi] \text{ და } \cos(\arccos a)=a.$$



ნახ. 3

იმის გამო, რომ კოსინუსი ლუწი ფუნქციაა $\arccos a$-თან ერთად $\cos x=a$ განტოლებას დააკმაყოფილებს აგრეთვე $-\arccos a$, ხოლო პერიოდულობის გამო – ამ ორ ამონახსნს დამატებული 2π-ს ნებისმიერი ჯერადები. ამიტომ $\cos x=a$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z. \qquad (2)$$

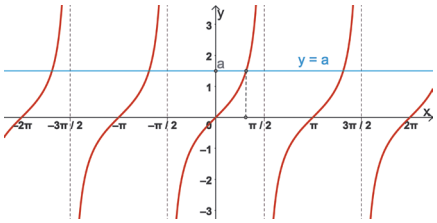
მაგალითი 3. ამოვხსნათ $\cos(2x+10^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ განტოლება.

ამოხსნა. იმის გამო, რომ არგუმენტში გრადუსებში მოცემული შესაკრები მონაწილეობს, ამონახსნიც გრადუსებში უნდა ჩაი-

წეროს: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.

$$2x+10^\circ=\pm135^\circ+360^\circ\cdot n,\ n\in Z\Rightarrow x=-5^\circ\pm67{,}5^\circ+180^\circ\cdot n,\ n\in Z.$$

პასუხი. ა) $x=-5^\circ\pm67{,}5^\circ+180^\circ\cdot n,\ n\in Z$.



ნახ. 4

tanx=a განტოლებას ნებისმიერი a რიცხვისათვის აქვს ამონახსნი, რადგან ტანგენსის მნიშვნელობათა სიმრავლეა მთელი რიცხვითი წრფე. როგორც მე-4 ნახაზზე ჩანს, მოცემულ განტოლებას $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. თუ ამ ამონახსნს arctana ჩანაწერით აღვნიშნავთ (იკითხება: „არკტანგენს ა“) და ტანგენსის პერიოდსაც გავითვალისწინებთ, მივიღებთ tanx=a განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$x=\arctan a+\pi k,\ k\in Z. \qquad (3)$$

განმარტების თანახმად, $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}a<\frac{\pi}{2}$ და $\tan(\arctan a)=a$.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ განტოლება $\cos^2\frac{x}{3}-7\cos\frac{x}{3}+4=\sin^2\frac{x}{3}$.

ამოხსნა. განტოლების მარჯვენა ნაწილში $\sin^2\frac{x}{3}$ უნდა ჩავანაცვლოთ $1-\cos^2\frac{x}{3}$-ით. მივიღებთ:

$$\cos^2\frac{x}{3}-7\cos\frac{x}{3}+4=1-\cos^2\frac{x}{3}.$$

$\cos\frac{x}{3}=a$ აღნიშვნის შემოტანისა და გამარტივების შემდეგ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$2a^2-7a+3=0,$$

რომლის ფესვებია: $a_1=3,\ a_2=\frac{1}{2}$, ანუ $\cos\frac{x}{3}=3,\ \cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$.

ცხადია, $\cos\frac{x}{3}=3$ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი, რადგან $\cos\frac{x}{3}\le1$, ხოლო $\cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$ განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\frac{x}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\Rightarrow x=\pm\pi+6\pi k,\ k\in Z.$$

პასუხი: $\pm\pi+6\pi k,\ k\in Z$.

მაგალითი 5. ამოვხსნათ განტოლება:

$$\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0.$$

ამოხსნა. განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ $\cos^2x$-ზე. ეს მოქმედება რომ შესაძლებელი იყოს, უნდა დავრწმუნდეთ, რომ $\cos^2x\neq0$ ყველა იმ x-თვის, რომელიც მოცემული განტოლების ამონახსნია. მართლაც, თუ $\cos^2x=0$, მაშინ მოცემულ განტოლებაში მეორე და მესამე შესაკრებები იქნება 0-ის ტოლი და მივიღებთ, რომ sinx=0. სინუსი და კოსინუსი ერთდროულად 0-ის

ტოლი ვერ იქნება, ე. ი. $\cos^2 x$-ზე გაყოფა შეგვიძლია. გაყოფის შესრულებისა და გამარტივების შემდეგ განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$$

საიდანაც $x = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ x = \arctan 3 + \pi n,\ n \in Z.$

პასუხი: $\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \arctan 3 + \pi n,\ n \in Z.$

მაგალითი 6. ამოვხსნათ განტოლება: $3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0.$

ამოხსნა. განტოლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} \cos x = 0; & (1) \\ 3\sin x + 2\cos x = 0. & (2) \end{cases}$$

1-ელი განტოლების ამოხსნით მივიღებთ, რომ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

მე-2 განტოლების ორივე ნაწილი გავყოთ cosx-ზე. (cosx-ზე გაყოფა შესაძლებელია, რადგან თუ კოსინუსი ნულია, მაშინ მე-2 განტოლებიდან მივიღებთ, რომ სინუსიც ნულია. ეს კი შეუძლებელია.) მივიღებთ განტოლებას:

$$3\tan x + 2 = 0 \Rightarrow \tan x = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z.$$

პასუხი: $\frac{x}{2} + \pi n;\ \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

ზოგჯერ, განტოლების მამრავლებად დაშლის გზით ამოხსნისას გარეშე ფესვები წარმოიშვება. მათი გამორიცხვა შეიძლება საწყის განტოლებაში ჩასმითა და შემოწმებით.

მაგალითი 7. ამოვხსნათ განტოლება: tanx–sinx=1–tanxsinx

ამოხსნა. გამოვიყენოთ დაჯგუფების ხერხი:

$$(\tan x + \tan x \sin x) - (1 + \sin x) = 0,$$
$$(1 + \sin x)(\tan x - 1) = 0,$$
$$1 + \sin x = 0, \quad \tan x - 1 = 0.$$

შესაბამისად,

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z; \qquad (1)$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z. \qquad (2)$$

x-ის (1) მნიშვნელობებისთვის ტანგენსი არაა განსაზღვრული, ამიტომ ეს მნიშვნელობები არაა განტოლების ამონახსნები.

(2) მნიშვნელობების შემოწმება დაგვარწმუნებს, რომ ისინი განტოლების ამონახსენებია.

პასუხი: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

? უპასუხე კითხვებს:

1. როგორ განიმარტება arcsina? arccosa? arctana?
2. რამდენი ამონახსნი აქვს sinx=0,5 განტოლებას $(0; 2\pi)$ შუალედში?
3. როგორი a რიცხვისთვის აქვს ამოხსნა განტოლებას: cosx=a? tanx=a?
4. რამდენი ამონახსნი აქვს tanx=a განტოლებას $(0; \pi)$ შუალედში?

? სავარჯიშოები

1. იპოვე arcsina, თუ:

ა) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ე) a=1; ვ) a=–1; ზ) a=0.

2. იპოვე arccosa, თუ:

ა) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ე) a=1; ვ) a=–1; ზ) a=0.

3. იპოვე arctana, თუ:

ა) a=1; ბ) a=–1; გ) $a=\sqrt{3}$; დ) $a=-\sqrt{3}$;

ე) $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$; ვ) $a=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; ზ) a=0.

4. მოცემული გამოსახულებებიდან რომელს არა აქვს აზრი?

ა) arcsin0,7; ბ) arccos(–0,3); გ) arctan13; დ) arccos3.

5. იპოვე:

ა) sin(arcsin1); ბ) cos(arccos0,13);

გ) tan(arctan7); დ) cos(arccos0,5).

6. იპოვე sinx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ:

ა) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ე) a=1; ვ) a=–1; ზ) a=0.

7. იპოვე cosx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ:

ა) $a=\frac{1}{2}$; ბ) $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$; გ) $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ე) a=1; ვ) a=–1; ზ) a=0.

8. იპოვე tanx=a განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ:

ა) a=1; ბ) a=–1; გ) $a=\sqrt{3}$; დ) $a=-\sqrt{3}$; ე) $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

ვ) $a=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; ზ) $a=0$.

9. ამოხსენი განტოლება:

ა) $\sin 2x=0$; ბ) $\sin 3x=\frac{1}{2}$; გ) $\cos(x+3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

დ) $\cos(2x+30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; ე) $\sqrt{3}\operatorname{tg}x-3=0$.

ვ) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; ზ) $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

თ) $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. იპოვე $2\sin x+1=0$ განტოლების $(\pi;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი.

11. იპოვე $\sqrt{2}\cos x-1=0$ განტოლების $(1{,}5\pi;2\pi)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნი.

12. გამოთვალე $\sqrt{12}\tan x-2=0$ განტოლების $(-\pi;\pi)$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნების ჯამი.

13. ამოხსენი განტოლება:

ა) $\sin^2x+2\sin x+1=0$; ბ) $2\cos^2x-5\cos x+2=0$;

გ) $\tan x+\frac{1}{\tan x}=2$; დ) $1-\cos^2x=2\sin x$.

ე) $2\sin^2 x+3\cos x=0$; ვ) $\tan x+\frac{3}{\tan x}=4$;

ზ) $2\sin x=3\cos x$; თ) $\sin^2 x-2\sin x=0$;

ი) $\frac{1}{\tan^2 x}+\frac{4}{\tan x}=0$.

14. მოცემულია $\sin x=\tan x$ განტოლება.

ა) ამოხსენი განტოლება გრაფიკულად პროგრამა Geogebra-ს დახმარებით;

ბ) ამოხსენი იგივე განტოლება ალგებრულად.

15. იპოვე $\cos^2x=1$ განტოლების $[-\pi;\pi]$ შუალედში მოთავსებულ ამონახსნთა ჯამი.

16. დაადგინე გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა:

ა) $\arcsin(\sin\pi)$; ბ) $\arccos(\cos 0)$;

გ) $\sin(\arctan 1)$; დ) $\sin(\arctan 2)$.

17. ამოხსენი განტოლება:

ა) $\sin x-\cos x=0$; ბ) $\cos^2x-\sin^2x=0$;

გ) $\cos^4x-\sin^4x=1$; დ) $\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=0$.

ე) $6\cos^2 x=1+\cos x$; ვ) $\sin^2 x+2\sin x=3$; ზ) $\cos^2 x+1=3\cos x$.

18. ამოხსენი განტოლება:

ა) $2\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$;

ბ) $2\sin x\cos x+5\cos^2 x=4$;

გ) $\sin^2 x+5\sin x\cos x+8\cos^2 x=0$;

დ) $2\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=0$.

19. ამოხსენი განტოლება:

ა) $(1-\sin x)\left(\tan^2 x-3\right)=0$;

ბ) $\cos^2 x+\sin x\cos x=0$;

გ) $\sin^2 x-\sin x\cos x=0$.

რა ვისწავლეთ ამ პარაგრაფში

- arcsin-ის, arccos-ის და arctan-ის განმარტებები;
- sinx=a, cosx=a და tanx=a განტოლებათა ზოგადი ამონახსნების ფორმულები

მეოთხე თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. ქვემოთ მოცემულთაგან რომელი უტოლობაა ჭეშმარიტი?

ა) $\sin\frac{\pi}{12}>\sin\frac{\pi}{6}$; ბ) $\tan\frac{\pi}{12}\geq\tan\frac{\pi}{6}$;

გ) $\cos\frac{\pi}{12}<\cos\frac{\pi}{6}$; დ) $\sin\frac{\pi}{12}<\sin\frac{\pi}{6}$.

2. იპოვე f(x)=3sinx+1 ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები.

3. y=f(x) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ლუწი პერიოდული ფუნქციაა პერიოდით 3. f(8)=11. გამოთვალე f(1)+f(11).

4. გამოთვალე: cos(arccos1)+sin(arcsin1)+tan(arctan1).

5. ამოხსენი განტოლება:

ა) $\tan x-\frac{3}{\tan x}=0$; ბ) $\sin^2 x+4\cos x-4=0$.

გ) $\cos^2 x=\frac{1}{2}$; დ) $\tan^2 x=\tan x$;

ე) $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$; ვ) $2\tan x+\frac{3}{\tan x}=5$.

6. იპოვე $\sin x=-0,5$ განტოლების $[0;2\pi]$ შუალედში მოთავსებული ამონახსნების ჯამი.

7. იპოვე $\sqrt{2}\sin x=1$ განტოლების უდიდესი უარყოფითი ამონახსნი.

8. გამოთვალე: $\sin^2(\arccos(-1))+\cos^2(\arcsin(-1))$.

9. ამოხსენი განტოლება:

ა) $2\cos^2 x=3\sin x+2$; ბ) $2\cos^2 x+5\sin x=4$;

გ) $\sin^4 x-\cos^4 x-9\sin x+5=0$;

აბა, სცადე!

გამოთვალე: arccos(cos4)

წყვილებში სამუშაო (პროექტი)

„რა სიმაღლეზე არიან?“



1. ლელა და გელა დღის 12 საათზე დასხდნენ „ეშმაკის ბორბალზე“. ბორბალი, რომლის რადიუსი 30 მეტრია, ერთ სრულ ბრუნს 1 საათში ასრულებს. რა სიმაღლეზე იქნებიან ლელა და გელა ა) 12 საათსა და 15 წუთზე; ბ) 12 საათსა და 30 წუთზე; გ)12 საათსა და 45 წუთზე?

2. ვთქვათ, „ეშმაკის ბორბლის“ რადიუსია R მეტრი, ხოლო ერთი სრული ბრუნის დრო – T წუთი. ამ მონაცემებით გამოთვალეთ:
ა) ბორბალში ჩაჯდომიდან t წუთის შემდეგ მიღწეული h(t) სიმაღლე;
ბ) წუთების ის რაოდენობა, რომელიც ბორბალში ჩაჯდომიდან 0,5R სიმაღლის მისაღწევად არის საჭირო.

3. ნაშრომი გააფორმეთ და მოამზადეთ საპრეზენტაციოდ. ნაშრომს დაურთეთ თქვენ მიერ ჩატარებული გამოთვლები და ნახაზები.

ეს საინტერესოა



იოჰან პეტერ დირიხლე

1805-1859 წ.

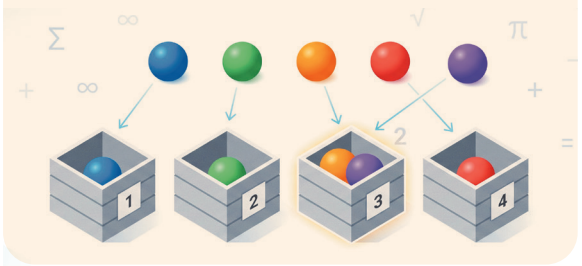
ცნობილი გერმანელი მათემატიკოსი

ფუნქციის თანამედროვე გააზრებაში მნიშვნელოვანი წვლილი აქვს შეტანილი ცნობილ გერმანელ მათემატიკოს იოჰან პეტერ დირიხლეს. დირიხლეს მრავალმხრივი შემოქმედებიდან შევჩერდეთ ორ საინტერესო და შედარებით მარტივ საკითხზე.

დირიხლეს პრინციპი

თუ n+1 საგანს მოვათავსებთ n ყუთში, მაშინ სულ მცირე ერთ ყუთში მაინც იქნება მინიმუმ 2 საგანი.

მაგალითად, თუ კლასში 13 მოსწავლეა, სულ მცირე 2 მოსწავლე მაინც იქნება ერთი და იმავე თვეში დაბადებული.



დირიხლეს ფუნქცია

როგორც წინა კლასებიდანაა შენთვის ცნობილი, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ორი თანაუკვეთი სიმრავლისგან შედგება. ერთი არის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, ანუ იმ რიცხვების სიმრავლე, რომელთა წილადის სახით ჩაწერაა შესაძლებელი (ასეთი რიცხვები უსასრულო პერიოდული ათწილადებია). მეორე სიმრავლე ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, ანუ უსასრულო არაპერიოდული ათწილადების სიმრავლეა.

რაციონალურია ყველა მთელი, წილადი და შერეული რიცხვი. რაციონალური რიცხვების ჯამი, ნამრავლი და განაყოფი ისევ რაციონალური რიცხვია.

ირაციონალური რიცხვებია, მაგალითად, $\sqrt{2}$, π, $\sqrt[3]{7}$... .

ირაციონალური რიცხვების ჯამი შეიძლება რაციონალური აღმოჩნდეს (მოიყვანე მაგალითი), ხოლო ირაციონალური და რაციონალური რიცხვების ჯამი აუცილებლად ირაციონალური იქნება.

დირიხლეს ფუნქცია შემდეგი წესით განსაზღვრული ფუნქციაა:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,}\\ 0, \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია.}\end{cases}$$

ამ განსაზღვრებაზე დაყრდნობით:

ა) გამოთვალე $f\left(\sqrt{2}\right)+f\left(\pi\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(2+\sqrt{2}\right)$;

ბ) დაადგინე, ლუწია თუ კენტი დირიხლეს ფუნქცია;

გ) დაამტკიცე, რომ დირიხლეს ფუნქცია პერიოდული ფუნქციაა და დაადგინე მისი პერიოდი. აქვს თუ არა დირიხლეს ფუნქციას უმცირესი დადებითი პერიოდი?

აბა, სცადე!

დირიხლეს პრინციპის გამოყენებით დაამტკიცე: ნებისმიერი 10 ნატურალური რიცხვიდან, მინიმუმ ერთი წყვილია ისეთი, რომელთა სხვაობა არის 9-ის ჯერადი.

პასუხები

თავი 1

1.1 **2.** $\frac{8}{17}, \frac{15}{17}, \frac{8}{15}$. **3.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}$. **4.** $\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{3}$. **5.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}$. **6.** 6 მ. **7.** ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; გ) $\frac{1}{7}$.
8. $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$. **9.** 1,24. **10.** $1\frac{4}{13}$. **11.** 12 სმ, 9 სმ. **12.** $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$. **13.** 10 სმ, 6 სმ. **14.** $\frac{1}{2}$.
15. 54 სმ^2. **16.** $\frac{15}{17}$. **17.** 40 სმ, 60 სმ^2. **18.** 0,6; 0,8; 0,75. **19.** ა) 0,5; ბ) 0,42. **20.** 9, 12, 15.

21. ა) გამომდინარეობს სინუსისა და კოსინუსის განმარტებიდან.

შესაძლებელია? ა) სინუსის და კოსინუსის არა, ტანგენსის კი; ბ) არა.

აბა, სცადე! ა) გამომდინარეობს $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\geq 0$ უტოლობიდან;
ბ) გამომდინარეობს $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\leq 2$ უტოლობიდან, ა) –ს გამოყენებით.

1.2 **1.** ა) 0,259; 0,966; 0,268. ბ) 0,966; 0,259; 0,732. **2.** 0,125. **3.** ა) 0; ბ) 1; გ) 0; დ) –2,5. **4.** 3 მ. **5.** 2,3 მ.
6. 7,45 მ. **7.** ა) 2; ბ) 1,5. **8.** 5000 მ. **9.** $10\left(\sqrt{3}+1\right)$. **10.** ა) $\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -1$. ბ) $\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **11.** 10 დმ^2.
12. 9 მ^2. **13.** $5\sqrt{2}$ სმ^2. **14.** 5 სმ. **15.** $S=ab\sin\alpha$. **16.** 30 მ^2. **17.** 60 სმ^2. **18.** $49\sqrt{3}$ სმ^2. **19.** 6 სმ^2.
20. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **21.** $9\sqrt{3}$ სმ^2. **22.** $48\sqrt{3}$ სმ^2.

შესაძლებელია? ა) კი; ბ) არა.

აბა, სცადე! $\frac{a^2\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta}{2(\tan\alpha+\tan\beta)}$.

1.3 **1.** ა) 5 სმ; ბ) $\sqrt{37}$ სმ; გ) $\sqrt{13}$ სმ. **2.** ა) $\sqrt{169-60\sqrt{3}}$ სმ; ბ) 13 სმ; გ) $\sqrt{169+60\sqrt{3}}$ სმ. **3.** $100\sqrt{37}$ მ.
4. $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ სმ. **5.** ≈111,4 კმ. **6.** ა) 90°, 45°, 45°; ბ) 120°, 30°, 30°; **7.** ა) 90°; ბ) 150°. **8.** ა) ბლაგვკუთხა;
ბ) მართკუთხა; გ) მახვილკუთხა. **9.** 8 სმ. **10.** 4 სმ, $2\sqrt{13}$ სმ, $2\sqrt{13}$ სმ. **11.** $4\left(\sqrt{19}+\sqrt{7}\right)$ მ.
12. 3 სმ, $\sqrt{17}$ სმ. **13.** 7სმ, $\frac{\sqrt{145}}{2}$ სმ, $\frac{\sqrt{241}}{2}$ სმ. **14.** $3\sqrt{2}$ სმ. **15.** $\frac{\sqrt{190}}{2}$. **16.** $2\sqrt{37}$ სმ, $4\sqrt{7}$ სმ,
14 სმ ან $2\sqrt{13}$ სმ, $4\sqrt{19}$ სმ, $2\sqrt{97}$ სმ. **17.** ა) 10 სმ; ბ) $8\sqrt{2}$ სმ; გ) $4\sqrt{3}$ სმ. **18.** ა) 6 სმ; ბ) $6\sqrt{2}$ სმ;
გ) $6\sqrt{3}$ სმ; დ) 12 სმ; ე) $6\sqrt{3}$. **19.** ა) 1; ბ) $\frac{1}{2}$; გ) $\frac{5}{12}$. **20.** $2\sqrt{6}$ მ. **21.** 60° ან 120°.
22. 10 სმ. **23.** ა) 9; ბ) 3; გ) $2\sqrt{2}$. **24.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ მ. **25.** 4.

შესაძლებელია? არა.
აბა, სცადე! ა) გამომდინარეობს სინუსების თეორემიდან;
ბ) გამომდინარეობს კოსინუსების თეორემიდან.

1.4

2. $285^\circ \in$ IV, $-376 \in$ IV, $204^\circ \in$ III, $-172^\circ \in$ III, $-12^\circ \in$ IV, $730^\circ \in$ I, $-92^\circ \in$ III, $800^\circ \in$ I. **3.** ა) (x; y); ბ) (x; y); გ) (–x; –y). **4.** ა) sin65°>0; sin105°>0; sin179°>0; sin200°<0; sin250°<0; sin365°>0; sin380°>0; ბ) cos40°>0; cos87°>0; cos100°<0; cos192°<0; cos200°<0; cos250°<0; cos339°>0 cos380°>0; გ) tan40°>0; tan 80°>0; tan100°<0; tan102°<0 tan185°>0; tan250°>0; tan386°<0; tan320°<0; tan368°>0; **5.** ა) I და II; ბ) I და IV; გ) I და III. **6.** ა) sin145°>0; ბ) sin(–92)°<0; გ) cos145°<0; დ) cos(–45°)>0; ე) tan96°<0; ვ) tan182°>0. **7.** ა) $\sin 85^\circ \cdot \sin 102^\circ > 0$; ბ) $\cos 184^\circ \cdot \cos 172^\circ > 0$; გ) $\sin 142^\circ \cdot \cos 142^\circ \cdot \tan 142^\circ > 0$; დ) $\tan 111^\circ \cdot \tan 172^\circ > 0$; ე) $\cos 192^\circ \cdot \tan 255^\circ < 0$; ვ) $\sin 80^\circ \cdot \tan 290^\circ \cdot \cos 170^\circ > 0$. **8.** ა) sin20°<sin40°; ბ) cos20°>cos40°; გ) tan20°<tan40°. **9.** ა) sin25° – sin26°<0; ბ) sin130° – sin240°>0; გ) cos25° – cos26°>0; დ) sin45° – sin40°>0; ე) sin62° – sin70°<0; ვ) cos40° – cos42°>0. **10.** ა) sin20°, sin30°, sin45°, sin60°, sin70°, sin80°; ბ) cos90°, cos60°, cos50°, cos45°, cos40°, cos30°. **11.** ა) sin180°=0, cos180°=–1, tan180°=0; ბ) sin270°=–1, cos270°=0, tan270° ar arsebobs; გ) sin360°=0, cos360°=1, tan360°=0.

12. ა) $\sin 405^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 405^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 405^\circ = 1$;

ბ) $\sin(-405^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(-405^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan(-405^\circ) = -1$;

გ) $\sin 420^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 420^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 420^\circ = \sqrt{3}$;

დ) $\sin(-420^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-420^\circ) = \frac{1}{2}$, $\tan(-420^\circ) = -\sqrt{3}$;

ე) sin720° = 0, cos720°=1, tan720°=0; ვ) sin(–720°)=0, cos(–720°)=1, tan(–720°)=0.
13. ა) sin225°; ბ) cos140°. **14.** ა) a; ბ) b; გ) c. **15.** ა) –a; ბ) b; გ) –c. **16.** 60° და 120°. **17.** 45° და 225°.

18. 90° და 270°. **19.** ა)1; ბ) $\sqrt{2}$; გ) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; დ) 1; ე) –1; ვ) –1. **20.** ა) –1; ბ) $-\sqrt{3}$; გ) 0; დ) 0. **21.** ა) $2a-5a^2$; ბ) $\frac{a+b}{a-b}$; გ) a+b; დ) 15. **22.** ა) $\frac{\pi}{2}$; ბ) π; გ) $\frac{\pi}{12}$. **23.** ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, –0,5, $-\sqrt{3}$; ბ) 0,5, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; გ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0,5, $-\sqrt{3}$. **24.** ა) 160°; ბ) 200°. **25.** ა) 160°; ბ) 340°. **26.** ა) $\pi k,\ k \in Z$; ბ) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

27. π-ჯერ, 2π-ჯერ; **28.** ა) π სმ; ბ) $\frac{\pi}{2}$ სმ; გ) $\frac{\pi}{3}$ სმ; დ) $\frac{\pi}{4}$ სმ; ე) $\frac{\pi}{6}$ სმ; ვ) $\frac{\pi}{12}$ სმ. **29.** ა) 5; ბ) 1სმ; გ) 1.

30. 0,91. **31.** $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \sqrt{2}v_1v_2}$. **32.** ბ) ≈3 მ.

1.5

1. $\frac{2\pi}{15}$. **2.** $\frac{\pi}{16}$. **3.** ა) π, ბ) 4 π. **4.** ა) I; ბ) I I; გ) I I; დ) I I I; ე) IV. **5.** $\sin 4 < 0$, $\cos 1{,}5 > 0$, $\tan 0{,}3 > 0$.

6. $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{9}$. **7.** ა) ყველა დადებითია; ბ) პირველი სამი უარყოფითი, დანარჩენი დადებითია; გ) პირველი სამი უარყოფითი, დანარჩენი დადებითია.

8. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)>0$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)>0$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)>0$; $\cos(\pi-\alpha)<0$;

$\tan(\pi+\alpha)>0$; $\tan(2\pi-\alpha)<0$. **9.** 12°, 36°,132°. **10.** $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{5}$. **11.** ა) $\frac{\pi}{3}$; ბ) $\frac{\pi}{2}$; გ) $\frac{2\pi}{3}$. **12.** ა) 0; ბ) 13; გ) $\sqrt{2}+3$; დ) –2. **13.** ა) $2a-a^2$; ბ) $b\sqrt{2}+a$; გ) $b\sqrt{2}-3\sqrt{3}a+a$; დ) $\frac{a+b}{a-b}$.

14. ა) sin1°<sin1; ბ) sin0,5<sin0,6; გ) sin6°>sin6; დ) cos0,8>cos0,9; ე) cos60°< $\cos\frac{\pi}{6}$; ვ) cos30°>cos3. **15.** ა) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$, ბ) $\alpha = 2\pi k,\ k \in Z$, გ) $\alpha = \pi k, k \in Z$.

16. ანიმ. **17.** ა) $\sin 0{,}5 < 0{,}5$; ბ) $\cos 0{,}5 > 0{,}5$; გ) $\tan 1 > 1$. **18.** 12 სმ. **24.** ა) a; ბ) –a; გ) –a; დ) a.

1.6

1. ა) 1; ბ) 0; გ) –1; დ) 0; ე) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ვ) $\sin\frac{\sqrt{3}}{2}$; ზ) 0; თ) 0; ი) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; კ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ლ) $\frac{1}{2}$; მ) $\frac{1}{2}$; ნ) 0; ო) 1; პ) –1; ჟ) $\sqrt{3}$; რ) $-\sqrt{3}$; ს) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** ა) კენტი; ბ) ლუწი; გ) კენტი; დ) არც კენტი და არც ლუწი; **3.** ა) არაა პერიოდული; ბ) პერიოდულია; გ) პერიოდულია; დ) პერიოდულია.

4. ა) $\frac{2\pi}{5}$; ბ) $\frac{\pi}{2}$; გ) $\frac{\pi}{3}$; დ) 4π; ე) $\frac{\pi}{2}$; ვ) 2π. **5.** ა) $\frac{2\pi}{7}$; ბ) $\frac{3\pi}{2}$; გ) 6π. **6.** $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\tan\alpha = \frac{5}{12}$. **7.** $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\tan\alpha = -\frac{5}{12}$. **8.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$. **10.** $\frac{\sqrt{15}}{16}$. **11.** ა) $[-3;1]$; ბ) $[-1;0]$; გ) $[-1;2]$; დ) $[0;+\infty)$. **12.** ა) $2\cos^2\alpha$; ბ) 0; გ) $\sin^2\alpha$; დ) 1; ე) $\tan^2\alpha$; ვ) $1-\sin\alpha$. ზ) $1+\cos\alpha$; თ) $\sin\alpha+\cos\alpha$. **13.** ა) 2π; ბ) π; გ) π; დ) π; ე) $\frac{2\pi}{3}$; ვ) 12π; ზ) π; თ) 12π; **14.** [0; 4]; **15.** ა) სინუსი; ბ) ტანგენსი; გ) კოსინუსი. **16.** ა) a; ბ) b; გ) $\frac{1}{c}$.

1.7

1. ა) $\cos\alpha$; ბ) $\sin\alpha$; გ) $\sin\alpha$; დ) $-\cos\alpha$; ე) $-\frac{1}{\tan\alpha}$; ვ) $-\tan\alpha$ **2.** ა) $-\sin\alpha$; ბ) $-\cos\alpha$; გ) $-\cos\alpha$; დ) $-\sin\alpha$; ე) $-\tan\alpha$. **3.** ა) $\cos\alpha$; ბ) $-\cos\alpha$; გ) $\tan\alpha$; დ) $\sin^2\alpha$; ე) $\frac{1}{\tan^2\alpha}$. **4.** $-\tan\alpha$. **5.** ა) $\sin 0{,}2\pi$; ბ) $-\cos 0{,}1\pi$; გ) $-\frac{1}{\tan 0{,}2\pi}$; დ) $-\tan 0{,}2\pi$. **6.** ა) $\cos 35°$, $\sin 25°$, $-\cos 22°$; ბ) $\sin 35°$, $-\sin 16°$, $-\sin 5°$; გ) $-\tan 31°$; $\tan 41°$; $-\tan 17°$. **7.** ა) 60°, 120°; ბ) 225°, 315°; გ) 270°. **8.** ა) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; ბ) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; გ) π. **9.** ა) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; ბ) 0; π; გ) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$. **10.** ა) $\cos\alpha$ ბ) $-\frac{1}{\cos\alpha}$; გ) $\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$; დ) $\cos\alpha$; ე) 0; ვ) $-\cos\alpha$; ზ) $\sin\alpha+\cos\alpha$; თ) $-\sin^2\alpha$. **11.** ა) $-\sin\alpha\cos\alpha$; ბ) $\cos^2\alpha$; გ) $2\cos\alpha$; დ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **12.** ა) –6; ბ) $2\sqrt{3}$; გ) $1+\sqrt{3}$; დ) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$; ე) $-\frac{6+\sqrt{6}}{6}$. **13.** ა) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) 1; გ) 0. **14.** ა) –1; ბ) $\frac{1}{2}\sin 50°$. **16.** ა) 0,5; ბ) 0,25; გ) $\frac{1}{3}$. **17.** ა) 0,75; ბ) 0,25. **18.** ა) 1; ბ) 1; გ) $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$; დ) $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$. **19.** ა) –a; ბ) a; გ) $-\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$; დ) –a.

აბა, სცადე! ა) 0; ბ) 1.

პირველი თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. ა) $\sqrt{3}$; ბ) –1; გ) $5\frac{1}{3}$; დ) 0; ე) 1; ვ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ზ) 1; თ) –0,5. **2.** ა) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ბ) –1. **4.** ა) 3 სმ²; ბ) $10\sqrt{2}$ სმ²; გ) $15\sqrt{3}$ სმ²; დ) 49 სმ²; ე) 22 სმ²; ვ) $20\sqrt{2}$ სმ². **5.** ა) 1; ბ) $\frac{2}{3}$; გ) 1. **6.** ა) 50 სმ²; ბ) $50\sqrt{3}$ სმ²; გ) $50\sqrt{3}$ სმ²; დ) 50 სმ². **7.** ა) 28 სმ²; ბ) $28\sqrt{2}$ სმ²; გ) 56 სმ²; დ) 28 სმ². **8.** ა) 0; ბ) $-\frac{1}{5}$; გ) $\frac{19}{96}$; დ) – 0,75. **9.** ა) მართკუთხა; ბ) მახვილკუთხა; გ) მახვილკუთხა; დ) ბლაგვკუთხა. **10.** 5 მ. **11.** $\sqrt{3{,}5}$ სმ. **12.** 6 სმ². **14.** $\frac{5\sqrt{13}}{3}$ სმ.

15. $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}; \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **16.** $\frac{c\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}$. **18.** $\sqrt{17\frac{5}{7}}$. **19.** $\frac{5\sqrt{7}}{3}$. **20.** $2\sqrt{3}$. **21.** $\frac{16}{65}$ ან $\frac{56}{65}$. **22.** $10\sqrt{41-20\sqrt{2}}$.

შესაძლებელია? კი.

აბა, სცადე! $1<x<3$.

თავი 2

2.1 **3.** ა) 45°; ბ) 90°; გ) 90°; **4.** AK და BC, AK და DC, BK და AD, BK და DC, BK და AC, DK და AB, DK და BC, DK და AC, CK და AB, CK და AD. **5.** ა) A, B, S, M; ბ) A, B, C, N; გ) ABC; დ) ASB ; ე) SC; ვ) AC. **6.** ა) ASC და DEF; ბ) BSC და DEF; გ) EF; დ) DE; ე) ASC და ABC; ვ) ASB და BSC. **8.** ა) $a\subset\alpha$; ბ) $A\in a$, $B\in a$; გ) $a\cap b=\{C\}$; დ) $\alpha\cap\beta=a.$; **10.** წფესა და მის გარეთ მდებარე წერტილზე ერთადერთი სიბრტყე გაივლება. **11.** წინააღმდეგ შემთხვევაში A, B, C და D წერტილები ერთ სიბრტყეში აღმოჩნდება. **12.** ჭეშმარიტია გ). **13.** პასუხია ა). **14.** $OB=2,4$; $A_1B_1=6\frac{2}{3}$. **15.** არა, რადგან M, K და P არაა ერთ წრფეზე. **16.** ორ გადამკვეთ წრფეზე ერთადერთი სიბრტყე გაივლება.

აბა, სცადე! უნდა ავაგოთ სამკუთხა პირამიდა.

2.2 **1.** ა) 4 სმ; ბ)12 სმ; გ) 7 სმ; დ) 15 სმ. **2.** 8 სმ. **3.** ა) $\frac{a}{b}$; ბ) $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$; გ) $\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$. **4.** 50°. **5.** 60°. **6.** 60°. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8.** ა) არა; ბ) კი. **9.** 2,5 მ. **11.** 2,5 მ. **12.** 19 სმ ან 4 სმ. **13.** $x=a+b-c$. **14.** 10 სმ. **15.** $\sqrt{43}$ სმ. **20.** $12\sqrt{3}$ სმ. **21.** $10\sqrt{10}$ სმ. **22.** 12 სმ. **23.** $12\sqrt{3}$ სმ.

შესაძლებელია? 1. შესაძლებელია, თუ სიბრტყეს მოპირდაპირე წვეროებზე გავატარებთ; 2. შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა რომბი კვადრატია.

აბა, სცადე! $\frac{a+b+c}{3}$.

2.3 **1.** ABM, CBM, MAD, MCD. **2.** 6 სმ. **3.** 17 სმ. **4.** 3 სმ. **5.** 14 სმ. **6.** 4 სმ. **7.** 6 სმ. **9.** 2სმ. **10.** 15 სმ, 20სმ. **11.** $\sqrt{h^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$. **12.** 20 სმ. **13.** 4 სმ. **14.** $\sqrt{a^2+b^2}$.

შესაძლებელია? შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა მართკუთხედი კვადრატია.

აბა, სცადე! 45°.

2.4 **1.** 6. **2.** ა) 90°; ბ) 45°; გ) 90°; დ) საძიებელი კუთხის ტანგენსია $\sqrt{2}$; **3.** 12 სმ. **4.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ სმ. **5.** 8 სმ. **6.** 30°. **7.** 5 სმ. **8.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ სმ. **9.** 45°. **10.** 30°. **11.** 5 სმ. **12.** 60°. **13.** $2\sqrt{2}$ სმ. **14.** 3 სმ.

15. $\sqrt{171}$ სმ. **16.** ა) 45°; ბ) 30°. **17.** $a^2\sqrt{2}$ სმ². **18.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

აბა, სცადე! ფურცელი უნდა გაიშალოს და გაევლოს AB წრფე.

მეორე თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. გაივლება 4 სიბრტყე. თანაუკვეთი სიბრტყეები არაა. **2.** 3 წყვილი. **5.** ა) 19,2 სმ; ბ) 15,36 სმ².

6. 30°. **7.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **8.** 8 სმ. **9.** 5 სმ. **10.** ა) 72 სმ²; ბ) $72\sqrt{7}$ სმ². **11.** $18\sqrt{3}$ სმ². **12.** $2\sqrt{2}$ დმ². **13.** $5\sqrt{2}$ სმ. **14.** 45°;

15. $\frac{2}{3}\sqrt{3a^2+3ab+3b^2}$.

აბა, სცადე! ა)1; ბ) 2.

თავი 3

3.1 **1.** $\overline{BA}$. **2.** ა) 4; ბ) 8. **3.** ბ). **4.** გ). **5.** ა) $\overline{DC}$; ბ) $\overline{BA}$, $\overline{CD}$; გ) $\overline{AC}$; დ) $\overline{DB}$; ე) $\overline{AB}$ და $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ და $\overline{CB}$, $\overline{BA}$ და $\overline{BC}$, $\overline{BA}$ და $\overline{CB}$. **6.** ბ); ე). **7.** გ). **8.** პარალელოგრამი. **9.** ტრაპეცია. **10.** დ). **11.** $4\vec{a}$. **12.** $7\vec{a}+16\vec{b}$.

13. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$. **14.** $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$.

15. $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AC}$. **16.** $\sqrt{336}$ ნიუტონი. **17.** 90°.

18. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$. **22.** $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AD}$. **23.** $\overrightarrow{AK}=\frac{5}{13}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{8}{13}\cdot\overrightarrow{AB}$. **24.** $\overrightarrow{CK}=-\frac{4}{5}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{BC}$.

27. $2\sqrt{13}$. **28.** 5.

3.2 **2.** ა) (7; 3); ბ) (6; 8); გ) (1; 2,9); დ) $\left(-\sqrt{2};-2\right)$. **3.** ა) 5; ბ) 13; გ) $\sqrt{10}$; დ) 2. **4.** ა) 5; ბ) 5; გ) $3\sqrt{2}$; დ) 17; ე) 17; ვ) 1; ზ) 2. **5.** ა) $2\vec{i}+2\vec{j}$; ბ) $3\vec{i}+2\vec{j}$; გ) $-2\vec{i}+3\vec{j}$; დ) $-\vec{i}+4\vec{j}$; ე) $\vec{i}-4\vec{j}$; ვ) $5\vec{j}$; ზ) $5\vec{i}$. **6.** ა) (3; 5); ბ) (3; –5); გ) (–3; –5); დ) (0; 5); ე) (3; 0); ვ) (1; –1). **7.** ა) 5; ბ) 13; გ) 5; დ) 7; ე) 5; ვ) $\sqrt{2}$; ზ) $\sqrt{2}$.

8. ა) (–7; 9); ბ) (14; –18); გ) (–21; 27). **9.** ა) (0; 0); ბ) (–4; 3; 5); გ) (6; –15); დ) (16; 9). **10.** (–18; 4).

11. ა) 5; ბ) 13; გ) 2; დ) $\sqrt{113}$. **12.** $\sqrt{313}$. **13.** ±6. **14.** ±8. **15.** (0; –2). **16.** 45°. **17.** ა) 135°; ბ) 135°; გ) 15°. **18.** ა) 45°; ბ) 135°; გ) 30°; დ) 60°; ე) 120°; ვ) 30°. **19.** ა) $\uparrow\downarrow$; გ) $\uparrow\uparrow$. **20.** ა) 4; ბ) –4. **21.** 3.

22. ა) $\vec{a}=(12;16)$; ბ) $\vec{a}=(-12;16)$. **23.** $\vec{a}=\left(3;-\frac{16}{3}\right)$. **24.** $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=(0;-1)$. **25.** $\vec{a}=-3\vec{b}+2\vec{c}$.

26. ა) 90°; ბ) 0°; გ) 180°; დ) 60°; ე) 120°; ვ) 135°. **27.** ა) $\frac{1}{9}$; ბ) 0; გ) $-\frac{1}{5}$.

28. ა) ბლაგვკუთხა; ბ) მართკუთხა; გ) მახვილკუთხა.

შესაძლებელია? არა.

3.3 **1.** 12. **2.** –10. **3.** ა) 21; ბ) $14\sqrt{2}$; გ) –66; დ) 0. **4.** ა) –3; ბ) 0; გ) 4; დ) 0. **5.** ა) $\frac{7}{25}$; ბ) 0; გ) 0; დ) $\frac{240}{289}$. **6.** ა) 180° ბ) 90°; გ) 0°; დ) 30°. **7.** ა) 60°; ბ) 45°; გ) 150°. **8.** 0 ან –1,5. **9.** ა) მახვილი; ბ) ბლაგვი; გ) მართი; დ) ბლაგვი. **10.** 2. **11.** –59. **12.** $3\sqrt{29+10\sqrt{3}}$. **13.** 1,5. **14.** –20. **15.** 7. **16.** 10. **17.** (–1,5; 7). **18.** 5. **19.** (–2;1). **20.** $4\sqrt{3}$. **21.** 13.

3.4 **1.** ა) OX; ბ) OZ; გ) OX; დ) OY; ე) სამივეს; ვ) არცერთს. **2.** ა) XOZ; ბ) YOZ; გ) XOY; დ) YOZ; ე) YOZ-ს და XOY-ს; ვ) არცერთს. **3.** ა) 13; ბ) 5; გ) 13; დ) $\sqrt{111}$. **4.** $\pm\sqrt{21}$. **5.** $AB=2\sqrt{2}$. **6.** 5. **7.** 13. **8.** $(\pm1,1;0;0)$. **9.** $(0;\pm9;0)$. **10.** $(0;0;\pm7)$. **11.** ა) 3; ბ) 2; გ)1. **12.** ა) $(2;0;-1)$; ბ) $(2,5;-4,5;2)$; გ) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};4;\frac{1}{2}\right)$. **13.** ა) 5; ბ) $\sqrt{14}$; გ) $\frac{\sqrt{70}}{2}$. **14.** $C=(1;1;0)$; $C_1=(1;1;1)$; $D_1=(0;1;1)$; $B_1=(1;0;1)$. **15.** ა) $\frac{\sqrt{61}}{3}$; ბ) $\frac{\sqrt{14}}{3}$; გ) $\frac{\sqrt{13}}{3}$. **16.** $C=(3;4;0)$; $C_1=(3;4;5)$; $D_1=(0;4;5)$; $B_1=(3;0;5)$. **17.** $\overrightarrow{AB}(-3;3)$, $\overrightarrow{BA}(3;-3)$. **18.** ა) (–9; –26); ბ) $11\sqrt{2}$; გ) $\frac{-7}{\sqrt{170}}$.

შესაძლებელია? არა.

3.5 **1.** ა) (–2; –1; –6); ბ) (6;1; –13); გ) (0,5; –3;1); დ) $(-\sqrt{3};-2)$. **2.** ა) $\sqrt{16+9+144}=13$; ბ) $\sqrt{25+0+144}=13$; გ) $\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$; დ) $\sqrt{2+0+0}=\sqrt{2}$. **3.** ა) 5; ბ) 5; გ) 5; დ) 17; ე) 3; ვ) 2. **4.** ა) $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{k}$; ბ) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$; გ) $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; დ) $\vec{a}=-4\vec{i}+8\vec{j}+2\vec{k}$. **5.** ა) (1;2;3); ბ) (2;3; –4); გ) (1;4;0); დ) (0;2;3); ე) (–7;0;0). **6.** ა) $\sqrt{38}$; ბ) $\sqrt{146}$; გ) 5; დ)1,2. **7.** ა) (–1;4; –3); ბ) (2; –8;6); გ) (–3;12; –9). **8.** ა) (–12; 19; 4); ბ) (3; 5; 17); გ) (6; –17; 3). **9.** (–10; –8; 11). **10.** ა) $\sqrt{249}$; ბ) $\sqrt{118}$; გ) 2; დ) $\sqrt{65}$. **11.** $\sqrt{414}$. **12.** ა) 10,5; ბ) $6\sqrt{2}$; გ) –52; დ) 0. **13.** ა) 1; ბ) 0; გ) 10; დ) 3. **14.** ა) $-\frac{137}{169}$; ბ) $\frac{25}{169}$; გ) 0,48; დ) $\frac{64}{289}$. **15.** ა) 180°; ბ) 0°; გ) 180°; დ) 30°. **16.** ა) 60°; ბ) 45°; გ) 150°. **17.** ა) ბლაგვია; ბ) მახვილია; გ) მახვილია; დ) ბლაგვია. **18.** 2. **19.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **20.** –68. **21.** **7.** **22.** ა) $(48;-12;16)$; ბ) $(12;-16;-48)$. **23.** $\frac{\sqrt{46}}{2}$. **24.** –70. **25.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

შესაძლებელია? არა.

3.6 **6.** 90°. **8.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab\cos\varphi}$. **9.** $\cos\varphi=\frac{a^2+b^2+c^2-d^2}{2ab}$. **10.** ა) მართია; ბ) მახვილია. **11.** (0; –1;3). **12.** 60°.

შესაძლებელია? სამკუთხედის შემთხვევაში შეუძლებელია, ოთხკუთხედის (მაგალითად, ტრაპეციის ან პარალელოგრამის) შემთხვევაში შესაძლებელი.

3.7 **9.** 660° და 300°. **10.** ა) –35° ბ) 180°; გ) 270°. **11.** ა) –40°; ბ) – 10°; გ) 35°; დ) –70°. **12.** 30°, 150°, –90°. **13.** (–2; –4). **14.** ა) (–2; –4); ბ) (–2; –4); გ) (–4;2); დ) (4; –2). **15.** ა) (3;4); ბ) (3;4); გ) (4; –3); დ) (–4;3). **16.** ა) (–y; x); ბ) (–y; x); გ) (–x; –y). **17.** ა) (0;1); ბ) (–1;0); გ) (0; –1); დ) (1;0). **18.** (5; –5). **19.** ა) B(–0,5;0,5), D(0,5;0,5); ბ) B(–0,5; –0,5), C(–1;0), D(–0,5;0,5). **20.** $A_1(1; -4)$, $C_1(-2; -8)$.
21. ა) აბსცისა მიიღებს მნიშვნელობებს 0–დან 1–მდე (ჩათვლით), ხოლო ორდინატი მნიშვნელობებს –1-დან 1-მდე (ჩათვლით); ბ) შეიცვლება; გ) არ შეიცვლება.

22. ა) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ბ) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ გ) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$. **23.** 19 გრადუსით 20–ჯერ მობრუნებით.
24. 10 წუთში. **25.** $\frac{360°}{n}$.

შესაძლებელია? კი.

3.8 **6.** (–5; 7,5). **7.** ±3,5. **8.** ა) ≈±109,3; ბ) ≈±0,27. **9.** $\pm 1\frac{1}{3}$. **10.** ±3. **11.** ±2. **12.** ა) (12; –10); ბ) (–3; 2,5). **13.** –28. **14.** –3. **15.** 4. **16.** ა) (0; 0); ბ) (5; –4). **17.** (–4; 6). **18.** (5; 0,5). **19.** (–7; 2). **20.** (0; –4). **21.** (–2; –4). **22.** (–4; 6). **25.** 4, $k_{1,2} = \pm\frac{R_1}{R_2}$, $k_{3,4} = \pm\frac{R_2}{R_1}$. **26.** 4 სმ. **28.** (kx+a;ky+b), (kx+ka;ky+kb). **29.** y=2x+11. **30.** y=ax+kb.

მესამე თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. (8;12). **2.** 25. **3.** –4; **4.** $-7\vec{i}+2\vec{j}$. **5.** 180°. **6.** –15. **7.** $\vec{a}=\vec{b}+2\vec{c}$. **8.** $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. **9.** 3. **10.** 5. **11.** 10. **12.** (1; 2; –4). **13.** $5\sqrt{2}$. **14.** $\frac{48}{65}$. **15.** 60°. **16.** x=–0,5; y=–8. **17.** x=2, y=4. **18.** 8. **19.** P(–2; –5), (–3; –4). **20.** (–2y;2x). **21.** 3 წთ.

შესაძლებელია? არა.

აბა, სცადე! $\left(0;\pm\frac{\sqrt{3}}{3};\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

თავი 4

4.1 **1.** ა) 9; ბ) 9. **2.** ა) –3; ბ) –3; გ) –3; დ) –3. **3.** ა) $\frac{\pi}{2}$; ბ)10π; გ) $\frac{\pi}{2}$; დ) π. **4.** 20. **8.** 2. **9.** კენტია ა) და დ), ლუწია გ). **10.** ბ). **13.** ლუწია ე), ზ), ი), კ); კენტია ა), გ), ვ); დანარჩენი არც ლუწია და არც კენტი. **14.** ა) არა; ბ) არა; გ) კენტია; დ) ლუწია. **16.** 0. **17.** ა) 0,5.

შესაძლებელია? კი.

4.2 **1.** 3 და –1. **2.** ლუწია ა), კენტია ბ) და გ). **3.** ა) $\frac{\pi}{6}$; ბ) $-\frac{\pi}{2}$; გ) $\frac{\pi}{2}$. **5.** ა) sin2>sin1; ბ) $\sin\frac{\pi}{3}>\sin\frac{\pi}{5}$; გ) $\sin\frac{3\pi}{5}>\sin\frac{4\pi}{5}$; დ) $\sin\frac{5\pi}{6}>\sin\frac{6\pi}{5}$. **10.** $x_{max}=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_{min}=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$. **11.** $0, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\pi$. **12.** $\sin\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{4\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{2}$. **13.** ა) 3, 2; ბ) 1, 0; გ) 1, $\frac{1}{3}$; დ) 1, 0,5. **14.** 45. **15.** ა) 5 და –4; ბ) $x_{max}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_{min}=\pi k, k\in Z$. **17.** $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

4.3 **7.** ა) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; ბ) $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$; გ) π; დ) 0, 2π. **8.** ა) cos1>cos2; ბ) $\cos\frac{\pi}{5}>\cos\frac{\pi}{3}$; გ) $\cos\frac{3\pi}{5}>\cos\frac{4\pi}{5}$; დ) $\cos\frac{7\pi}{3}>\cos\frac{5\pi}{6}$. **9.** $x_{max}=\pi k$, $x_{min}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$. **10.** $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. **11.** ა) 3 და –1; ბ) 2 და1; გ) 0,5 და 0,25; დ) 1 და 0,5. **12.** $\pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$. **13.** ა) უდიდესი 5, უმცირესი –2; ბ) $x_{max}=\pi k$, $x_{min}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$. **14.** $\pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{5\pi}{3}$. **15.** 30. **16.** $\cos\frac{\pi}{6}; \cos\frac{\pi}{4}; \cos\frac{\pi}{3}; \cos\frac{\pi}{2}; \cos\frac{4\pi}{3}; \cos\frac{3\pi}{4}$. **17.** ა) 5; ბ) –5; გ) –0,2; დ) 0,2. **18.** $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

4.4 **1.** ა) tan1>tan0,5; ბ) tan0,6>tan0,5; გ) $\tan\frac{\pi}{4}>\tan\frac{\pi}{6}$; დ) tan1,5>tan1,6. **3.** ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$. **4.** $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$. **5.** $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. **6.** ლუწია ა) და გ), კენტია ბ) და დ). **7.** $\pi k, k\in Z$. **9.** ა) 1; ბ) 1; გ) $\frac{1}{\tan\alpha}$. **10.** ა) 30°; ბ) –30°; გ) 0°; დ) 0°; ე) 60°; ვ) –60°. **11.** $\sin\alpha=\pm0,6$, $\cos\alpha=\pm0,8$.

4.5 **1.** ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $\frac{\pi}{3}$; გ) $-\frac{\pi}{4}$; დ) $-\frac{\pi}{3}$; ე) $\frac{\pi}{2}$; ვ) $-\frac{\pi}{2}$; ზ) 0. **2.** ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $\frac{\pi}{6}$; გ) $\frac{3\pi}{4}$; დ) $\frac{5\pi}{6}$; ე) 0; ვ) π; ზ) $\frac{\pi}{2}$. **3.** ა) $\frac{\pi}{4}$; ბ) $-\frac{\pi}{4}$ გ) $\frac{\pi}{3}$; დ) $-\frac{\pi}{3}$; ე) $\frac{\pi}{6}$; ვ) $-\frac{\pi}{6}$; ზ) 0. **4.** დ). **5.** ა) 1; ბ) 0,13; გ) 7; დ) 0,5.

6. ა) $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; ბ) $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; გ) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; დ) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; ვ) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; ზ) $\pi k, k\in Z$. **7.** ა) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$; გ) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$; დ) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$; ე) $2\pi k, k\in Z$; ვ) $\pi+2\pi k, k\in Z$; ზ) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

8. ა) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; ბ) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; გ) $\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; დ) $-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; ე) $\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$; ვ) $-\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

ზ) $\pi k, k\in Z$. **9.** ა) $\frac{\pi}{2}k, k\in Z$; ბ) $(-1)^k\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k, k\in Z$; გ) $-3\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$; დ) $-15^\circ\pm 15^\circ+180^\circ k, k\in Z$;

ე) $\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$. **10.** $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. **11.** $\frac{7\pi}{4}$. **12.** $-\frac{2\pi}{3}$. **13.** ა) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$;

გ) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; დ) $\pi k, k\in Z$; ე) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$; ვ) $\frac{\pi}{4}+\pi k, \arctan 3+\pi k, k\in Z$; ზ) $\arctan\frac{3}{2}+\pi k, k\in Z$;

თ) $\pi k, k\in Z$; ი) $-\arctan\frac{1}{4}+\pi k, k\in Z$. **14.** $\pi k, k\in Z$. **15.** 0. **16.** ა) 0; ბ) 0; გ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; დ) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

17. ა) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; ბ) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; გ) $\pi k, k\in Z$; დ) $\pi k, -\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$.

მეოთხე თავის დამატებითი სავარჯიშოები

1. დ). **2.** –2 და 4. **3.** 22; **4.** 3. **5.** ა) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; ბ) $2\pi k, k\in Z$; გ) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$; დ) $\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$;

ე) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$; ვ) $\frac{\pi}{4}+\pi k, \arctan\frac{3}{2}+\pi k, k\in Z$. **6.** 3π **7.** $-\frac{5\pi}{4}$. **8.** 0. **9.** ა) $\pi k, k\in Z$; ბ) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$;

გ) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

აბა, სცადე! 2π–4.

განმარტებითი ლექსიკონი

აბსცისა – პირველი კოორდინატი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

აპლიკატი – მესამე კოორდინატი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

არგუმენტი – დამოუკიდებელი ცვლადი, რომლის მნიშვნელობაზე დამოკიდებულია სხვა ცვლადი.

აქსიომა – დებულება (გამონათქვამი), რომელიც დაუმტკიცებლად არის ჭეშმარიტად მიჩნეული.

აცდენილი წრფეები – ერთ სიბრტყეში არამდებარე ორი წრფე.

ბისექტორი – ორწახნაგა კუთხის შუაზე გამყოფი სიბრტყე.

ბისექტრისა – კუთხის წვეროდან გამოსული სხივი, რომელიც კუთხეს შუაზე ჰყოფს.

გეგმილი (წერტილის) – წერტილიდან წრფეზე ან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძე.

გეგმილი (ფიგურის) – ფიგურის შემადგენელ წერტილთა გეგმილების სიმრავლე.

გრაფიკი (ფუნქციის) – არგუმენტისა და ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობისგან შედგენილ წყვილთა სიმრავლე, გამოსახული საკოორდინატო სიბრტყეზე.

დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე – ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლის მიღებაც შეუძლია ცვლადს.

დახრილი (სიბრტყისადმი) – წრფე ან მონაკვეთი, რომელიც არაა სიბრტყის არც მართობული და არც პარალელური.

ექსტრემალური მნიშვნელობა – ფუნქციის მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობა მოცემულ შუალედში.

ვექტორების სკალარული ნამრავლი – ორი ვექტორის სიგრძის ნამრავლი მათ შორის კუთხის კოსინუსზე.

ვექტორი – მიმართულების მქონე მონაკვეთი.

ვექტორის კოორდინატები – კოორდინატთა სათავეში მოდებული ვექტორის წვეროს კოორდინატები.

ვექტორის სიგრძე – მანძილი ვექტორის საწყის და ბოლო წერტილს შორის.

თეორემა – დებულება, რომლის ჭეშმარიტება მოითხოვს დამტკიცებას.

იგივეობა – ტოლობა, რომელიც ჭეშმარიტია ცვლადის ყველა დასაშვები მნიშვნელობისათვის.

ირაციონალური რიცხვი – უსასრულო არაპერიოდული ათწილადი.

კათეტი – მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის მიმდებარე გვერდი.

კენტი ფუნქცია – ფუნქია, რომლიც იცვლის ნიშანს არგუმენტის ნიშნის ცვლილებისას.

კოლინეარული ვექტორები – ერთ წრფეზე მოთავსებადი ვექტორთა წყვილი.

კომპლანარული ვექტორები – ერთ სიბრტყეში მოთავსებადი ვექტორთა სამეული.

კოსინუსი – ტრიგონომეტრიული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობა ერთეულოვან წრეწირზე მდებარე წერტილის აბსცისაა.

კოსინუსოიდა – კოსინუსის გრაფიკი.

კუთხე – საერთო სათავის მქონე ორი სხივით შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილი.

კუთხე დახრილსა და სიბრტყეს შორის – კუთხე დახრილსა და მის გეგმილს შორის.

კუთხე ორ აცდენილ წრფეს შორის – კუთხე აცდენილი წრფეების პარალელურ, გადამკვეთ წრფეებს შორის.

კუთხე ორ ვექტორს შორის – კუთხე, ერთ წრტილში მოდებულ ორ ვექტორს შორის.

ლუწი ფუნქცია – ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობა არ იცვლება არგუმენტის ნიშნის ცვლილებისას.

მართობი (სიბრტყის) – წრფე ან მონაკვეთი, რომელიც სიბრტყეში მდებარე ყველა წრფის მართობულია.

მართობის ფუძე – მართობისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე – ნულის, ნატურალური რიცხვებისა და მისი მოპირდაპირე რიცხვებისგან შედგენილი სიმრავლე (აღინიშნება Z-ით).

მობრუნება – გარდაქმნა, რომლის დროს სიბრტყის წერტილები ერთი წერტილის (ცენტრის) გარშემო მოცემული კუთხით მოტრიალდება.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე – რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანება (აღინიშნება R-ით).

ნახევარსიბრტყე – წრფით ორ ნაწილად გაყოფილი სიბრტყის ერთი ნაწილი.

ნულოვანი ვექტორი – ვექტორი, რომლის საწყისი და ბოლო წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა.

ორდინატა – მეორე კოორდინატი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში.

ორწახნაგა კუთხე – საერთო საზღვრის მქონე ორი ნახავარსიბრტყით შემოსაზღვრული სივრცის ნაწილი.

პარალელური გადატანა – გარდაქმნა, რომლის დროს ყველა წერტილი ერთ მანძილზე და ერთი მიმართულებით გადაადგილდება.

პერიოდი – არანულოვანი რიცხვი, რომლითაც არგუმენტის ცვლილება არ ცვლის ფუნქციის მნიშვნელობას.

პროპორცია – ორი შეფარდების ტოლობა.

რაციონალური რიცხვი – $\frac{m}{n}$ სახის ჩვეულებრივი წილადით წარმოდგენილი რიცხვი, სადაც m მთელი რიცვია, ხოლო n – ნატურალური.

სინუსი – ტრიგონომეტრიული ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობა ერთეულოვან წრეწირზე მდებარე წერტილის ორდინატაა.

სინუსოიდა – სინუსის გრაფიკი.

სკალარი – სიდიდე, რომელიც მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობით ხასიათდება.

ტანგენსოიდა – ტანგენსის გრაფიკი.

ფუნქცია – ორ ცვლადს შორის დამოკიდებულება, რომლის დროსაც ერთი ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას მეორის ერთადერთი მნიშვნელობა შეესაბამება.

წახნაგი – მრავალწახნაგას ზედაპირის ბრტყელი ნაწილი.

წიბო (ორწახნაგა კუთხის) – წახნაგების საერთო საზღვარი.

ჰიპოტენუზა – სამკუთხედში მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდი.

ჰომოთეტია – გარდაქმნა, რომლის დროს ყველა წერტილი მოცემული წერტილიდან (ცენტრიდან) ერთი და იმავე ფარდობით გადაადგილდება.

საცნობარო მასალა

ტრიგონომეტრია

დაყვანის ფორმულები

$$\sin(90°\pm\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(90°\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$$
$$\sin(180°\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$$
$$\cos(180°\pm\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\sin(270°\pm\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\cos(270°\pm\alpha)=\pm\sin\alpha$$

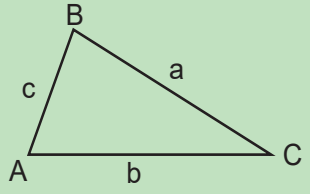
ტრიგინომეტრიული იგივეობები და განტოლებები

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha,\quad 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\sin x=a,\ x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z$$
$$\cos x=a,\ x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$$
$$\tan x=a,\ x=\arctan a+\pi k,\ k\in Z$$

მნიშვნელობათა ცხრილი

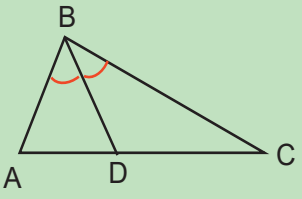
$$\sin 0=0,\ \cos 0=1,\ \tan 0=0$$
$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$
$$\sin\frac{\pi}{2}=1,\ \cos\frac{\pi}{2}=0,\quad \text{რად}=180°$$

სინუსების და კოსინუსების თეორემები



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

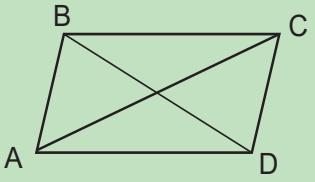
ბისექტრისის თვისება



AB:BC=AD:DC

BD^2= AB•BC - AD•DC

პარალელოგრამის თვისება



$AC^2+BD^2=2(AB^2+BC^2)$

ვექტორები

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cos\alpha=$$
$$=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$$

$$\vec{a}(x;y;z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k};$$
$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2=x^2+y^2+z^2;$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=a^2-b^2$$

ფართობი

სამკუთხედის

$$S=\frac{ah_a}{2},\ S=\frac{ab\sin\angle C}{2}$$

ტოლგვერდა სამკუთხედში:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ R=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$p=\frac{a+b+c}{2},\ S=\frac{abc}{4R},\ S=pr$$
$$S_{\text{გეგ.}}=S_{\text{დახ}}\cdot\cos\alpha$$

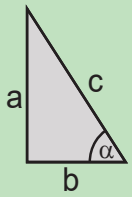
წრის

$$S=\pi r^2;$$

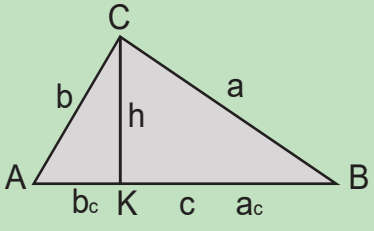
სექტორის

$$S=\frac{\pi r^2\alpha}{360}$$

მართკუთხა სამკუთხედი



$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\ \cos\alpha=\frac{b}{c},\ \text{tg}\alpha=\frac{a}{b}$$
$$R=\frac{c}{2},\ r=\frac{a+b-c}{2}$$



$$a^2+b^2=c^2$$

$$h^2=a_c\cdot b_c$$
$$a^2=a_c\cdot c$$
$$b^2=b_c\cdot c$$
$$a\cdot b=h\cdot c$$

საქართველო მრავალი გამოჩენილი მეცნიერის სამშობლოა. მათ შორის განსაკუთრებული ადგილი უკავია ილია ვეკუას (1907–1977) — მსოფლიოში აღიარებულ მათემატიკოსს, რომლის კვლევებმა დიფერენციალურ განტოლებებსა და მათემატიკურ ფიზიკაში უდიდესი წვლილი შეიტანა თანამედროვე მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარებაში.

ვეკუას ბრწყინვალე მათემატიკური იდეები დღესაც გამოიყენება ინჟინერიაში, მშენებლობაში, აერონავტიკასა და ბუნებრივი პროცესების მოდელირებაში. მისი ნაშრომები განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ისეთ სფეროებში, რომლებშიც საჭიროა ფიზიკური პროცესების მათემატიკური აღწერა: სითხის მოძრაობა, ელასტიკურობა და აეროდინამიკა. ეს მიმართულებები თვითმფრინავების, რაკეტებისა და სხვა საფრენი სისტემების შექმნის საფუძველია.

ილია ვეკუას მოღვაწეობა ნათელი მაგალითია იმისა, რომ დიდი მიღწევები ღრმა ცოდნას, დაუღალავ კვლევასა და შემოქმედებით აზროვნებას ეფუძნება. თუკი ცოდნას მუდმივად გაიღრმავებ, შენც შეძლებ გახდე წარმატებული ინჟინერი, პროგრამისტი ან მეცნიერი; გადაჭრა რეალური პრობლემები და ამით შენი წვლილი შეიტანო როგორც საქართველოს, ისე მსოფლიოს მეცნიერების განვითარებაში.



9 789941 889158

26.04.10.1.1